

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.Г. ДУБЕНЕЦЬ, В.В. ХІЛЬЧЕВСЬКИЙ, О.В. САВЧЕНКО

ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

(Видання друге, виправлене і доповнене)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Чернігів ЧДТУ 2007

УДК 539.3/.6(075.8)

ББК 30.121

Д 79

Автори:

Дубенець В.Г., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського державного технологічного університету

Хільчевський В.В., доктор технічних наук, професор кафедри лазерної технології, матеріалознавства і технології конструювання машин Національного технічного університету України “КПІ”

Савченко О.В., доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського державного технологічного університету

Рецензенти:

Матвєєв В.В., акад. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор (Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України)

Кальченко В.І., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри металорізальних верстатів і систем Чернігівського державного технологічного університету

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1.4/18-Г-829 від 28.09.2006 р.)

Дубенець В.Г., Хільчевський В.В., Савченко О.В.

Д 79 Основи методу скінченних елементів: Навчальний посібник. – Чернігів: ЧДТУ, 2007. – 288 с.

ISBN

У посібнику викладено основи методу скінченних елементів і наведено приклади застосування методу для розрахунку задач опору матеріалів у системі MathCAD.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

288 с., іл. 129, бібліогр. 47

УДК 539.3/.6(075.8)

ББК 30.121

ISBN

© В.Г. Дубенець, В.В. Хільчевський,
О.В. Савченко

© Чернігівський державний
технологічний університет

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ...	9
1.1. Навантаження і напруження. Тензор напружень.....	9
1.2. Головні напруження і головні площадки.....	12
1.3. Переміщення і деформації.....	15
1.4. Основні рівняння теорії пружності.....	17
1.4.1. Статичні рівняння.....	17
1.4.2. Геометричні рівняння.....	19
1.4.3. Умови сумісності деформацій.....	20
1.4.4. Фізичні залежності.....	21
1.5. Потенціальна енергія деформації.....	22
1.6. Загальна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла.....	23
1.7. Варіаційна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла.....	24
1.8. Метод Рітца.....	27
1.9. Варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського.....	29
1.10. Методи зважених нев'язок.....	31
РОЗДІЛ 2. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	32
2.1. Локальні функції і перехід від класичного методу Рітца до методу скінченних елементів.....	32
2.2. Алгоритм методу скінченних елементів.....	38
2.2.1. Дискретизація конструкції.....	38
2.2.2. Побудова матриць жорсткості елементів.....	40
2.2.3. Синтез скінченно-елементної моделі конструкції.....	41
2.2.4. Розв'язок систем рівнянь МСЕ.....	43
2.2.5. Обробка результатів.....	43
РОЗДІЛ 3. ВИКОРИСТАННЯ МСЕ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНІВ І БАЛОК	44
3.1. Побудова матриць жорсткості і зовнішніх сил для стержневих елементів.....	44
3.1.1. Елементи, які працюють на розтяг-стиск.....	44
3.1.2. Елемент, що працює на кручення.....	48
3.2. Скінченні елементи балок, які працюють на згин.....	49

3.2.1. Елемент балки при плоскому згині.....	49
3.2.2. Елемент стержня, який працює на згин із розтягом-стиском.....	51
3.2.3. Матриці жорсткості елементів у глобальних координатах.....	53
3.2.4. Елемент стержня, який працює на згин, розтяг-стиск і кручення.....	56
3.3. Синтез скінченно-елементних моделей стержневих конструкцій.....	60
3.4. Алгоритм використання методу скінченних елементів для аналізу стержневих систем.....	64
3.5. Приклади розрахунку стержневих систем.....	65
РОЗДІЛ 4. ДВОВИМІРНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ.....	95
4.1. Основні залежності плоскої задачі напруженого стану.....	95
4.2. Трикутні скінченні елементи.....	97
4.3. Прямокутний елемент із чотирма вузлами.....	100
4.4. Використання автоматичної побудови сітки скінченних елементів для плоских пластинчатих конструкцій.....	111
РОЗДІЛ 5. СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК.....	126
5.1. Основні рівняння згину прямокутних пластин.....	126
5.2. Застосування МСЕ до розрахунку пластин.....	131
5.3. Скінченно-елементні моделі оболонок обертання.....	136
РОЗДІЛ 6. ОБ'ЄМНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ. МОДЕЛЮВАННЯ МАСИВІВ.....	156
6.1. Тетраедральний скінченний елемент.....	156
6.2. Об'ємний елемент у формі паралелепіпеда.....	159
6.3. Кільцевий елемент з трикутним перерізом.....	161
РОЗДІЛ 7. ВИКОРИСТАННЯ ІЗОПАРАМЕТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	172
7.1. Плоскі скінченні елементи.....	174
7.2. Застосування ізопараметричних елементів у об'ємних задачах.....	180
7.3. Використання перетворень координат для побудови сітки скінченних елементів.....	186
РОЗДІЛ 8. СТІЙКІСТЬ.....	194
8.1. Стійкість прямолінійного стержня під дією статичних сил.....	195

8.2. Енергетичний метод визначення критичних сил.....	198
8.3. Застосування методу скінченних елементів.....	199
РОЗДІЛ 9. РОЗРАХУНКИ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ.....	205
9.1. Метод скінченних елементів у теорії коливань.....	205
9.2. Вільні коливання.....	209
9.3. Вимушені коливання без демпфірування.....	211
РОЗДІЛ 10. МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ У НЕІДЕАЛЬНО-ПРУЖНИХ КОНСТРУКЦІЯХ.....	221
10.1. Метод аналізу нестационарних коливань у конструкціях із частотно-залежним розсіянням енергії.....	221
10.2. Використання скінченно-елементних моделей для аналізу нестационарних коливань стержнів і стержневих систем.....	225
РОЗДІЛ 11. МСЕ У ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	240
11.1. Одновимірний випадок переносу тепла.....	246
11.2. Двовимірний перенос тепла.....	251
11.2.1. Плоский трикутний елемент.....	251
11.3. Температурні деформації і напруження в стержнях.....	259
РОЗДІЛ 12. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	261
12.1. Поняття про метод суперелементів.....	261
12.2. Джерела похибок.....	264
12.3. Збіжність методу скінченних елементів.....	266
12.4. Програмна реалізація МСЕ.....	268
ДОДАТОК А. ОПЕРАТОРИ І ФУНКЦІЇ MathCAD.....	271
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	283

ВСТУП

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним із найбільш поширених чисельних методів розрахунку конструкцій. Популярність його пояснюється успішним поєднанням порівняно простого алгоритму з можливістю застосування його до розрахунку систем довільної складності. Суттєвою перевагою методу є ефективність програмного забезпечення, створеного на алгоритмах МСЕ.

Ідеї, на яких базується МСЕ, виникли при розробці матричних методів розрахунку стержневих конструкцій, зокрема, методу сил і методу переміщень. Широкому застосуванню цих методів завадила відсутність ефективних машинних методів розв'язку великих систем алгебраїчних рівнянь.

Бурхливий розвиток обчислювальної техніки сприяв зростанню інтересу інженерів до матричних методів. На можливість розповсюдження цих методів на дво- і тривимірні конструкції вперше звернув увагу Аргіріс [1]. Подальший розвиток МСЕ був пов'язаний з розрахунками конструкцій у таких галузях як суднобудування, літакобудування, цивільне будівництво, машинобудування [7, 18, 19, 28, 29, 30, 31, 32, 36, 35, 39, 44].

Розвиток МСЕ зараз відбувається у двох паралельних напрямках, які доповнюють один одного. Один із них, і історично перший, пов'язаний з інженерними розрахунками і тлумаченням МСЕ як методу розрахунку конструкцій шляхом синтезу з окремих елементів (підконструкцій) [7].

Другий напрямок, математичний, розглядає МСЕ як варіант чисельних методів, відносячи його до групи так званих варіаційно-різницевого методів. Аналізу МСЕ з цієї точки зору присвячені численні публікації, зокрема [20, 22, 38, 45]. Виявлений зв'язок МСЕ з варіаційними методами [21] привів до широкого його використання при розв'язку задач в інших областях техніки [6, 12, 23, 34, 41].

Ще більш широкою сфера застосування МСЕ стала після того, як було показано, що рівняння МСЕ можна одержати за допомогою методів зважених нев'язок, зокрема методу Бубнова-Гальоркіна [8, 38, 41]. Встановлення цього факту відіграло важливу роль у теоретичному обґрунтуванні МСЕ і дозволило застосувати його для розв'язку довільних диференціальних рівнянь. За останні 25 років інтенсивного розвитку МСЕ став основним методом розв'язку задач будівельної механіки, механіки деформівного твердого тіла, теплопровідності, гідромеханіки тощо. Практичне застосування методу охоплює все нові та нові області інженерного аналізу.

На цей час МСЕ існує і розвивається у трьох варіантах:

- МСЕ як узагальнення методу переміщень, сил і змішаного методу будівельної механіки;
- МСЕ як варіант методу Рітца мінімізації деякого функціонала, що описує стан системи;
- МСЕ як варіант методу зважених нев'язок.

Основна ідея методу скінченних елементів полягає у тому, що довільну неперервну величину (температуру, переміщення, час тощо) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченній кількості підобластей. При побудові дискретної моделі неперервної величини реалізується така послідовність дій:

1) У заданій області фіксують скінченну кількість точок, які називають вузлами. Значення неперервної величини у кожній вузловій точці вважаються розшукуваними невідомими;

2) Область визначення неперервної величини розбивається з урахуванням вузлових точок на скінченну кількість підобластей, які називають елементами;

3) Неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини. Поліноми підбираються таким чином, щоб зберегти неперервність величини на границях елемента. Елементи мають спільні вузлові точки і в сукупності апроксимують форму області.

Задача визначення вузлових значень неперервної величини виявляється більш простою і може бути зведена до розв'язку систем алгебраїчних рівнянь, на відміну від реальної задачі, яка описується диференціальними рівняннями.

Дуже важливим фактором є можливість виділення типових елементів-підобластей, що дозволяє записати функцію-поліном для кожного елемента незалежно від його майбутнього використання. Зазначимо, що для апроксимації розшукуваної функції можна використати декілька типів елементів із різними розмірами і властивостями.

Після розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень розшукуваної величини значення цієї величини в інших точках може бути знайдене з урахуванням інтерполяційного полінома на даному елементі.

На цей час метод скінченних елементів є найбільш поширеним методом розрахунку конструкцій і, взагалі, найбільш універсальним методом числового розв'язку задач механіки. Існують численні обчислювальні комплекси, які реалізують алгоритми МСЕ, розроблене математичне і програмне забезпечення. Однак для інженера, якому необхідно в більшості випадків розв'язувати задачі середньої складності, використання таких комплексів неможливе з декількох причин.

По-перше, використання обчислювальних комплексів потребує значної підготовки і більш-менш глибокого знайомства з основами їх роботи, не кажучи вже про необхідність мати у власному користуванні програму і відповідну ЕОМ.

По-друге, часто при спробі використати універсальну програму виявляється, що якраз для даної задачі вона і не підходить.

Існує і суто психологічний ефект, який заважає використанню універсальних програм. Усі вони працюють за принципом “чорного ящика”, коли користувач вводить дані і одержує результат, не маючи уявлення про те, як ці дані оброблялись і, головне, не маючи змоги переглянути результати розрахунку на якомусь з етапів і, можливо, внести корективи.

Існуючі навчальні посібники з МСЕ [3, 4, 17, 25, 33] відображають стан обчислювальної техніки на 80-і роки минулого століття, що утруднює їх сприйняття користувачами персональних комп'ютерів.

У зв'язку з цим цікаво розглянути процес реалізації МСЕ програмами нового покоління, які працюють у діалоговому режимі, такими як універсальні математичні програми Mathematica, Maple, MathCAD, Matlab та ін.

Серед цих програм найбільш поширеною і найбільш дружньою до користувача є MathCAD. MathCAD – це інтегрована система програмування, яка призначена для виконання інженерних і наукових розрахунків, алгоритми яких описуються у звичайних математичних термінах.

Від інших програмних засобів вона відрізняється спрямованістю на створення високоякісних документів у режимі Wysiwyg^{*)}. Це означає, що екран комп'ютера повністю відтворює вигляд документа, а вводячи зміни, користувач відразу бачить на екрані відповідні результати. Існує думка, що математичні пакети – це потужні калькулятори і не більше. Якщо це було до деякої міри справедливо для перших версій, то сучасні математичні пакети і, зокрема, MathCAD – це потужні системи програмування, які мають усі необхідні засоби для створення ефективних програм.

Посібник побудовано таким чином, що у кожному розділі спочатку наводяться теоретичні відомості стосовно теми розділу і особливості застосування МСЕ, після чого подаються приклади розрахунку, реалізовані у системі MathCAD. Для полегшення сприйняття змісту посібника у теоретичній частині матриці позначаються напівжирним шрифтом.

Додаток вміщує таблиці основних операторів і функцій MathCAD.

^{*)} What you see is what you get (англ.)

РОЗДІЛ 1

ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

1.1. Навантаження і напруження. Тензор напружень

Розглянемо довільне тіло з накладеними на нього в'язями, яке знаходиться під дією поверхневих і об'ємних навантажень (рис. 1.1).

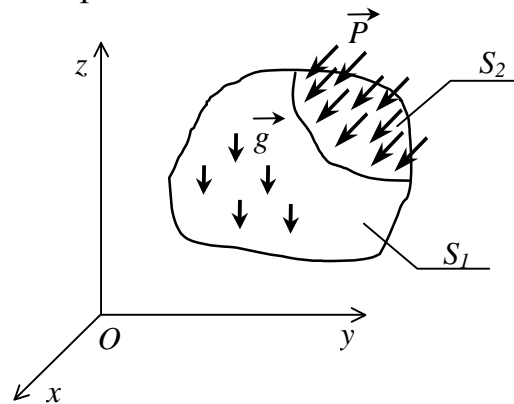


Рис. 1.1. Довільне тіло під дією навантажень

Поверхневі і масові сили визначаються інтенсивностями, які в загальному випадку залежать від координат x , y , z , пов'язаних із тілом. Проекції поверхневих сил на осі координат позначимо p_x, p_y, p_z , а проекції масових сил – q_x, q_y, q_z .

Під дією масових навантажень у тілі з'являються внутрішні сили взаємодії – напруження. Напруження є умовними силами, які введені у механіці суцільного середовища як заміна атомних і молекулярних сил. Напруження діють у кожній площадці, виділеній в об'ємі, залежать від орієнтації площадки, проведеної через дану точку і визначаються у деякій точці K як границя відношення середньої сили, діючої у площадці, до величини цієї площадки, якщо остання стягується у точку K

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Означене таким чином напруження є вектором.

Множина напружень у площадках, проведених через дану точку, називається напруженим станом у точці.

Напружений стан у точці можна описати, задаючи вектори напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках, проведених через дану

точку (рис. 1.2, *a-в*). Для зручності й наочності замість цих трьох площадок розглядають грані куба, виділеного в околі точки (рис. 1.2, *г*). Розкладаючи вектори напружень у кожній з граней на складові по координатних осях, одержимо дев'ять компонент напружень, які складають матрицю

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

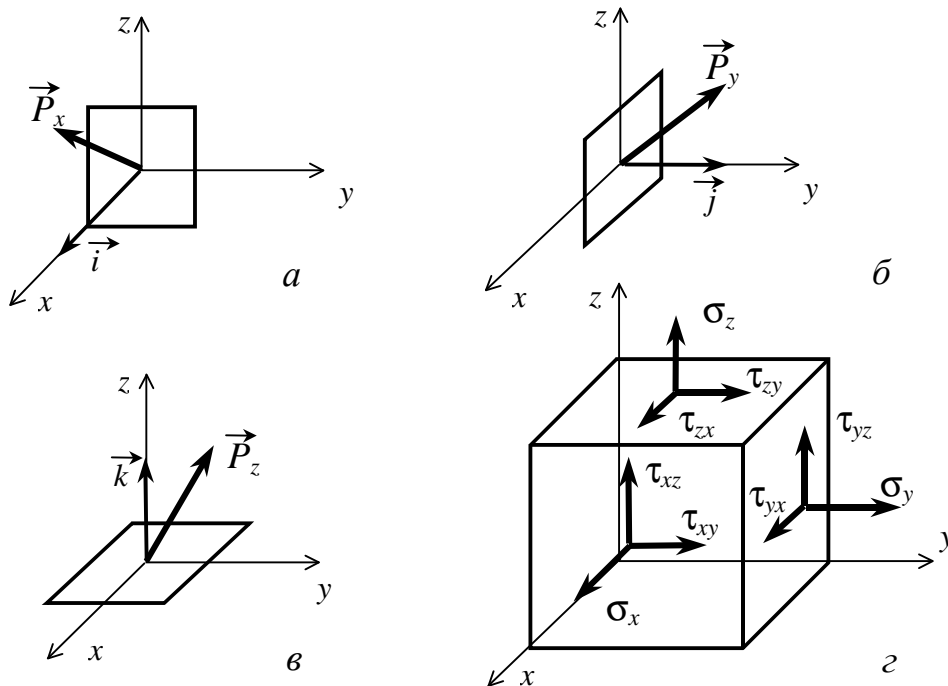


Рис. 1.2. Моделювання напруженого стану у точці

Додатні напрямки напружень збігаються з напрямками координатних осей.

Оскільки через точку можна провести нескінченну кількість площадок, то в одній і тій самій точці можна записати нескінченну кількість матриць типу (1.1). Кожну з цих матриць можна розглядати як проекції деякого математичного об'єкта – тензора. У тривимірній системі координат тензор має своїми компонентами вектори напружень, діючих у трьох взаємно перпендикулярних площадках (тобто на гранях умовного куба) (рис.1.2, *г*).

У векторній нотації

$$\vec{T}_\sigma = \vec{P}_x \vec{i} + \vec{P}_y \vec{j} + \vec{P}_z \vec{k}.$$

Таким чином, можна говорити, що напружений стан у точці визначається тензором \vec{T}_σ , а напружений стан у площадці, яка проведена через цю точку, – вектором \vec{P}_n , де \vec{n} – вектор нормалі до площадки.

Покажемо, як за однією проекцією тензора (тобто матрицею \mathbf{T}_σ) можна знайти всі інші проекції. Розглянемо дві ортогональні декартові системи координат $Oxyz, Ox'y'z'$ (рис. 1.3). Взаємне положення осей визначимо матрицею напрямних косинусів

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(x', x), & \alpha_{12} &= \cos(x', y), & \alpha_{13} &= \cos(x', z), \\ \alpha_{21} &= \cos(y', x), & \alpha_{22} &= \cos(y', y), & \alpha_{23} &= \cos(y', z), \\ \alpha_{31} &= \cos(z', x), & \alpha_{32} &= \cos(z', y), & \alpha_{33} &= \cos(z', z). \end{aligned}$$

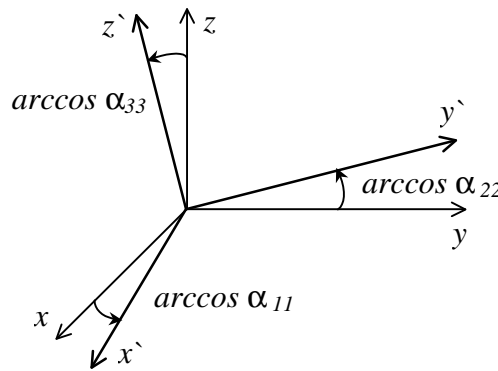


Рис. 1.3. Декартова система координат при повороті осей

Згідно з правилом перетворення декартових тензорів другого рангу [16], компоненти тензора напружень у двох системах координат пов'язані співвідношенням

$$\mathbf{T}'_\sigma = \Lambda \mathbf{T}_\sigma \Lambda^T. \quad (1.3)$$

Маючи одну з проекцій тензора напружень, можна також знайти вектор напружень у довільній площадці (рис. 1.4), для якої є відомим вектор напрямної нормалі \vec{n} . Розглянемо для цього елементарний тетраедр з вершиною в точці O . Очевидно, площі граней, що збігаються з координатними площинами, дорівнюють dSn_x, dSn_y, dSn_z , де $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \cos \beta$, $n_z = \cos \gamma$.

Рівняння рівноваги сил, що діють на тетраедр (див. рис. 1.4),

$$\vec{P}dS = \vec{P}_x dSn_x + \vec{P}_y dSn_y + \vec{P}_z dSn_z, \quad (1.4)$$

у матричній формі

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}, \quad (1.5)$$

де $\mathbf{P} = (X \ Y \ Z)^T$; X, Y, Z – проекції вектора \vec{P} на осі x, y, z ;

$$\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T.$$

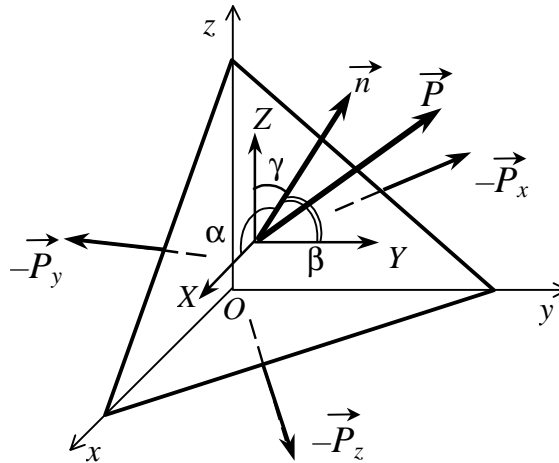


Рис. 1.4. Напруження у довільній площадці

Таким чином, щоб визначити компоненти вектора напружень у площадці dS , необхідно помножити матрицю тензора напружень на вектор напрямних косинусів нормалі до площадки. Компоненти вектора \mathbf{P} , паралельні осям x , y , z , не перпендикулярні й не дотичні до площадки dS , а отже не зовсім зручні для характеристики напружень у площадці. Тому знайдемо нормальну і дотичну складові вектора \mathbf{P} . Проекція вектора \mathbf{P} на нормаль визначається як скалярний добуток

$$\sigma_n = \vec{P} \cdot \vec{n},$$

або у матричній формі

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}. \quad (1.6)$$

Дотичні напруження

$$\tau_n = \sqrt{\vec{P}^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n})^2}. \quad (1.7)$$

Для визначення напружень у площадці і компонент тензора напружень у нових координатних осях згідно з (1.5), (1.6), (1.7) можна скористатися безпосередньо операторами системи MathCAD.

1.2. Головні напруження і головні площадки

З нескінченної кількості похилих площадок можна знайти такі, на яких відсутні дотичні напруження, тобто діють лише нормальні напруження. Ці площадки, а також напруження, що діють у них, називають головними. Для кожної такої площадки можна записати

$$\vec{P} = \sigma \vec{n}, \quad (1.8)$$

де σ – модуль вектора напружень.

Враховуючи (1.5), з (1.8) дістанемо

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Матричне рівняння (1.9) містить три скалярні рівняння. Система однорідних рівнянь (1.9) має ненульові розв'язки лише тоді, коли $\det(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) = 0$. Розкривши визначник, одержимо многочлен третього степеня відносно σ (характеристичне рівняння матриці \mathbf{T}_σ)

$$\sigma^3 - \Sigma_1 \sigma^2 + \Sigma_2 \sigma - \Sigma_3 = 0, \quad (1.10)$$

де $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ – інваріанти напруженого стану:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \Sigma_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}; \\ \Sigma_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Корені рівняння (1.10) є власними значеннями матриці \mathbf{T}_σ і головними напруженнями, які відшукуються. Можна показати, що три головні напруження діють у взаємно перпендикулярних площадках, а матриця тензора напружень у головних осях має вигляд

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

У загальному випадку рівняння (1.10) має три дійсні корені $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Оскільки, як буде показано далі, матриця \mathbf{T}_σ є симетричною відносно головної діагоналі, характеристичне рівняння (1.10) завжди має дійсні корені, хоча серед них можуть бути і нульові.

Якщо $\Sigma_3 = 0$, то рівняння (1.10) має один нульовий корінь, а два інші визначаються з рівняння

$$\sigma(\sigma^2 - \Sigma_1 \sigma + \Sigma_2) = 0, \quad (1.13)$$

звідки

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \frac{\Sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma_1}{2}\right)^2 - \Sigma_2}. \quad (1.14)$$

Якщо $\Sigma_3 = \Sigma_2 = 0$, то рівняння (1.10) має лише один ненульовий корінь $\sigma = \Sigma_1$.

Напружений стан, при якому одне з трьох головних напружень дорівнює нулю, називають плоским, а якщо два напруження нульові – лінійним, або одновісним. У загальному випадку напружений стан називають об'ємним.

Для визначення головних напружень можна скористатися програмами розв'язування кубічного рівняння (1.10) або методами визначення власних

значень матриці \mathbf{T}_σ , не пов'язаними з утворенням характеристичного рівняння, так званими методами обертань [37], які приводять матрицю до діагонального вигляду. У системі MathCAD для визначення коренів многочленів використовують функції `polyroots()`, `eigenvals()`.

Кожному з головних напружень відповідає напрям, для якого напрямні косинуси подаються як розв'язки системи рівнянь

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma_i \mathbf{E}) \mathbf{n}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.15)$$

де $\mathbf{n}_i = (n_{1i} \ n_{2i} \ n_{3i})^T$ – вектори напрямних косинусів площадок із головними напруженнями σ_i , \mathbf{E} – одинична матриця.

Наприклад, вектор напрямних косинусів до площадки, де діє головне напруження σ_1 , є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)n_{11} + \tau_{xy}n_{21} + \tau_{xz}n_{31} &= 0; \\ \tau_{yx}n_{11} + (\sigma_y - \sigma_1)n_{21} + \tau_{yz}n_{31} &= 0; \\ \tau_{zx}n_{11} + \tau_{zy}n_{21} + (\sigma_z - \sigma_1)n_{31} &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

за умови

$$n_{11}^2 + n_{21}^2 + n_{31}^2 = 1.$$

У розрахунках на міцність широко використовуються дві характерні складові тензора напружень: шаровий тензор $\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{I}}_\sigma$ і тензор-девіатор $\bar{\mathbf{D}}_\sigma$, матриці яких мають вигляд

$$\mathbf{I}\mathbf{I}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Скористаємося виразами для інваріантів тензора напружень і запишемо інваріанти цих двох тензорів

$$\Sigma_1^{III} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_c, \quad \Sigma_2^{III} = 3\sigma_c^2, \quad \Sigma_3^{III} = \sigma_c^3,$$

$$\Sigma_1^D = 0,$$

$$\Sigma_2^D = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)], \quad (1.18)$$

$$\Sigma_3^D = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix}.$$

У теорії пластичності широко використовується поняття інтенсивності дотичних напружень τ_i , яка визначається як

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sqrt{\Sigma_2^D} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.3. Переміщення і деформації

При навантаженні в кожному тілі відбувається зміна відносного положення точок об'єму. Кожна точка переміщується на деяку величину, проекції якої на осі координат, пов'язані з тілом, позначимо u, v, w .

Матрицю $(u \ v \ w)^T$ називають вектором переміщень у точці.

Відносні деформації у кожній точці об'єму можна описати за допомогою тензора деформацій, який будується за аналогією з тензором напружень. Матриця тензора деформацій має вигляд

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – лінійні відносні деформації у напрямках x, y, z ,

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – кутові деформації у площадках Oxy, Oyz, Oxz .

За аналогією з теорією напруженого стану можна показати, що в кожній точці мають місце три взаємно перпендикулярних напрямки, в яких об'єм тільки розтягується або стискається, а деформації зсуву відсутні. Ці деформації називають головними. Вони визначаються як корені кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0, \quad (1.21)$$

де I_1, I_2, I_3 – інваріанти тензора деформацій

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

Матриця шарового тензора деформації –

$$\mathbf{Ш}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (1.23)$$

Матриця девіатора –

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_c \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Шаровий тензор деформацій характеризує об'ємну деформацію у точці тіла, а девіатор – деформацію зміни форми. Зокрема, перший інваріант шарового тензора

$$I_1^{III} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.25)$$

характеризує відносну зміну об'єму. Його можна зв'язати з осьовою деформацією в напрямку, перпендикулярному октаедричній^{*)} площадці

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_c = I_1/3. \quad (1.26)$$

Другий інваріант девіатора деформацій

$$I_2^D = \frac{1}{6}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \quad (1.27)$$

можна зв'язати з кутом зсуву на цій же площадці

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (1.28)$$

У теорії пластичності використовується поняття інтенсивності деформацій зсуву γ_i , яке визначається як

$$\gamma_i = 2\sqrt{I_2^D} = \sqrt{\frac{2}{3}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]}, \quad (1.29)$$

а також інтенсивності поздовжніх деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (1.30)$$

^{*)} Площадка, рівнонахилена до головних осей

1.4. Основні рівняння теорії пружності

У теорії пружності об'єктом дослідження є тіла із суцільного, однорідного і пружного матеріалу. Вважається, що для матеріалу справедливий закон Гука, а деформації достатньо малі, щоб нехтувати їх квадратами.

Основні рівняння теорії пружності складаються зі статичних, геометричних і фізичних рівнянь.

1.4.1. Статичні рівняння

Щоб одержати залежності між напруженнями в довільній точці об'єму, розглянемо елементарний паралелепіпед, виділений в околі точки (рис. 1.6). Внаслідок змінності напружень вздовж осей x , y , z вектори напружень у площадках, віддалених від координатних на відстані dx , dy , dz , відрізнятяться від тих, що діють у координатних площадках, на величину приросту, пов'язаного з приростом відповідних координат. Крім напружень, у площадках на елемент можуть діяти й масові сили, вектор яких $\vec{p}dxdydz$. Оскільки елемент в об'ємі перебуває в рівновазі, його можна виділити окремо і виконати відповідну заміну в'язей (у даному разі напруженнями на площадках і об'ємними силами). Ця операція ґрунтується на аксіомі звільнення від в'язей, яка розглядається в курсі теоретичної механіки.

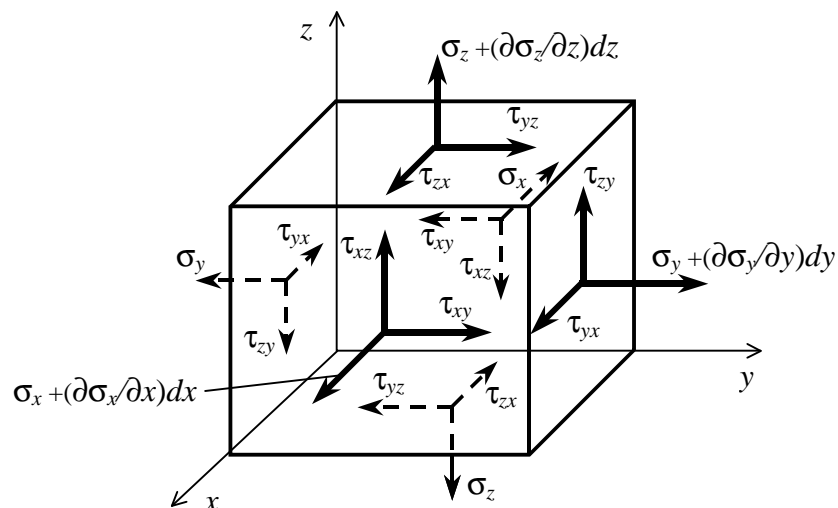


Рис. 1.6. Елементарний паралелепіпед в околі точки

Умови рівноваги елемента (рівність нулю головного вектора і головного момента сил, які діють на нього) приводять до таких рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{p}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{p}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{p}_z + \vec{p} = 0, \quad (1.31)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Перше і називають, власне, рівнянням рівноваги. У матричній формі його можна записати так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{pmatrix} = (0). \quad (1.32)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}.$$

Останні рівності називаються законом парності дотичних напружень. З нього випливає, що з дев'яти компонент матриці тензора напружень лише шість є незалежними (матриця \mathbf{T}_σ є симетричною відносно головної діагоналі). Це дає змогу записати незалежні компоненти тензора напружень у формі вектора-стовпця

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx})^T. \quad (1.33)$$

З урахуванням цього позначення рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}, \quad (1.34)$$

де $\mathbf{p}_V = \{X_V \quad Y_V \quad Z_V\}^T$,

\mathbf{A} – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

1.4.2. Геометричні рівняння

Проекції переміщень точок об'єму, що деформується, на координатні осі x , y , z позначимо відповідно u , v , w . Переміщення u , v , w є функціями координат, тобто в різних точках неоднакові. Неоднаковість переміщень у сусідніх точках у загальному випадку призводить до появи деформації.

Розглянемо переміщення елементарного квадрата у площині XOY (рис. 1.7). Якщо переміщення точки A у напрямках осей X , Y позначити відповідно u і v , то переміщення точок B і C на сторонах квадрата відрізнятимуться від u і v на величини, зумовлені приростом координат x і y на dx і dy при переході від A до B і C .

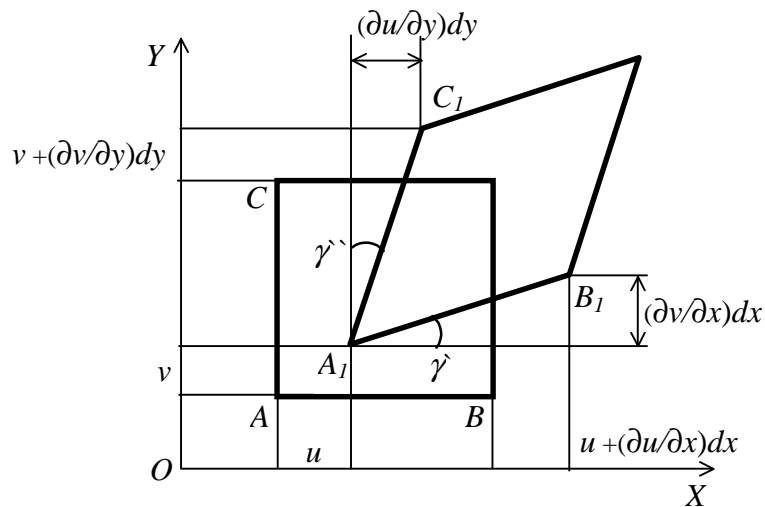


Рис. 1.7. Переміщення елементарного квадрата

Абсолютні деформації вздовж осей X і Y

$$\epsilon_{AB} = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$$\epsilon_{AC} = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v = \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Відносні деформації в тих самих напрямках

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{AB}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\epsilon_{AC}}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.36)$$

Крім лінійних деформацій, як видно з рис. 1.7, змінюються кути у виділеному квадраті. Позначивши γ_{xy} зміну кута у вершині A , знайдемо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy}. \quad (1.37)$$

Розглянувши так само переміщення й деформації квадратів, виділених паралельно площинам XOZ і YOZ , запишемо

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.38)$$

Таким чином, маємо шість залежностей, які пов'язують деформації та переміщення у точках об'єму тіла, що деформується. Ці залежності називають формулами Коші. Шість деформацій можна розглядати як компоненти тензора деформацій з матрицею (1.20)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Матриця \mathbf{T}_ε є симетричною відносно головної діагоналі. Оскільки тензор \vec{T}_ε , так само як і тензор напружень \vec{T}_σ , є тензорами другого рангу, і структура їх однакова, усі формули й висновки, одержані раніше для \vec{T}_σ , можна записати і для \vec{T}_ε . Зокрема, деформацію у точці можна записати у вигляді вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T. \quad (1.39)$$

Останнє твердження дає змогу записати залежності між деформаціями й переміщеннями у матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (1.40)$$

1.4.3. Умови сумісності деформацій

Якщо потрібно знайти переміщення за відомими деформаціями, формули Коші необхідно розв'язати відносно переміщень. Але в цьому разі три невідомі виражаються через шість деформацій, і для однозначності розв'язку необхідно накласти на деформації такі умови [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Ці залежності називають рівняннями Сен-Венана. Якщо вони задовольняються, то в кожній точці об'єму переміщення є однозначними функціями, тобто при деформуванні об'єму не виникає розривів і пустот. У матричній формі рівняння мають такий вигляд

$$\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad (1.42)$$

де \mathbf{B} – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial_{yy} & \partial_{xx} & 0 & -\partial_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{zz} & \partial_{yy} & 0 & -\partial_{yz} & 0 \\ \partial_{zz} & 0 & \partial_{xx} & 0 & 0 & -\partial_{xz} \\ 2\partial_{yz} & 0 & 0 & -\partial_{xz} & \partial_{xx} & -\partial_{xy} \\ 0 & 2\partial_{zx} & 0 & -\partial_{yz} & -\partial_{yx} & \partial_{yy} \\ 0 & 0 & 2\partial_{xy} & \partial_{zz} & -\partial_{zx} & -\partial_{zy} \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

$$\partial_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{ і т. д.}$$

1.4.4. Фізичні залежності

Зв'язок між напруженнями і деформаціями описується так званими фізичними залежностями. Їх вигляд визначається властивостями матеріалу, а також умовами навантаження. Найпростішою формою зв'язку є лінійна залежність між деформаціями й напруженнями. Для одновісного напруженого стану ізотропного матеріалу

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (1.44)$$

(E – модуль пружності, Па).

У загальному випадку об'ємного напруженого стану для ізотропного матеріалу ці залежності зручно записати у матричній формі, маючи на увазі векторні позначення для напружень і деформацій:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.46)$$

Матрицю \mathbf{C} називають матрицею пружних модулів і подають у вигляді

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Обернена до неї матриця має вигляд

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, $G = E/2(1 + \nu)$ – модуль зсуву,
 $\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu)$ – параметр Ляме.

Обидві матриці є симетричними відносно головної діагоналі, їх компоненти залежать від двох констант: модуля пружності E і коефіцієнта Пуассона ν , або величин, похідних від цих двох. Зауважимо, що для анізотропних матеріалів кількість констант збільшується і в загальному випадку може дорівнювати 21 [16].

1.5. Потенціальна енергія деформації

При спробах змінити об'єм чи форму тіла, виготовленого з пружного матеріалу, виникають напруження, які протидіють цим змінам. Таким чином, у деформованому пружному тілі завжди є внутрішні сили – напруження, які за відповідних умов виконують роботу. Можна сказати, що в деформованому тілі за рахунок пружних деформацій накопичується потенціальна енергія. Якщо вона зосереджується в одиничному кубі, на гранях якого діють головні напруження, цю енергію можна знайти як суму робіт усіх сил, що діють на його гранях:

$$a = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3,$$

або

$$a = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.49)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3)^T$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$.

Вираз (1.49) можна використати і в загальному випадку, коли розглядається довільна система координат. При цьому $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ будуть шестивимірними векторами. Потенціальну енергію для тіла в цілому, можна обчислити об'ємним інтегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.50)$$

1.6. Загальна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла

Задача механіки деформівного твердого тіла (МДТТ) полягає у визначенні напружень, деформацій і переміщень тіла, на яке діють зовнішні навантаження. Таким чином, у цій задачі 15 невідомих: по шість компонент векторів напружень і деформацій і три компоненти вектора переміщень. Для визначення цих невідомих маємо 15 рівнянь:

– рівноваги (рівняння Нав'є) (1.34)

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_V = 0;$$

– кінематичні (рівняння Коші) (1.40)

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon};$$

– фізичні (рівняння Гука) (1.45)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Знайдені з цих рівнянь 15 невідомих мають задовольняти граничні умови. Якщо на контурі діють поверхневі сили, граничні умови можна дістати з рівнянь (1.5), сумістивши з поверхнею похилу площадку. В цьому випадку вектор \mathbf{p} буде зовнішнім навантаженням \mathbf{p}_S . У матричній формі ці умови матимуть вигляд

$$\mathbf{A}_S^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}_S, \quad (1.51)$$

де

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & \cos \beta & 0 & \cos \gamma \\ 0 & \cos \beta & 0 & \cos \alpha & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & 0 & \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (1.52)$$

де α, β, γ – кути нормалі до поверхні у даній точці у системі координат, пов'язаних із тілом.

Крім силових граничних умов на частині поверхні можуть бути задані переміщення (кінематичні граничні умови $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S$).

Систему рівнянь (1.34), (1.40), (1.45), (1.51) можна записати в переміщеннях, напруженнях або у змішаному вигляді. У першому випадку

матимемо три диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}. \quad (1.53)$$

Граничні умови записуємо також у переміщеннях

$$\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{p}_S, \mathbf{u} = \mathbf{u}_S. \quad (1.54)$$

Рівняння в напруженнях складніші й тут не розглядаються. Зауважимо лише, що для їх одержання необхідно врахувати умови сумісності деформацій (1.41).

1.7. Варіаційна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла

Як видно з попередніх підрозділів, загальна задача визначення напружень, деформацій і переміщень ґрунтується на диференціальних рівняннях рівноваги. Можлива й альтернативна постановка задачі, яка базується на енергетичних уявленнях. Класичним прикладом є використання принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа), який належить до так званих варіаційних принципів. Ці принципи дозволяють замінити проблему розв'язання диференціальних рівнянь рівноваги механічної системи проблемою визначення функцій, які забезпечують мінімум деякої функції від функції, так званого функціоналу. Задача зводиться до пошуку серед множини допустимих функцій такої, яка забезпечує заданому функціоналу стаціонарне значення [21, 24].

Сформулюємо принцип Лагранжа для деформівного тіла в загальному випадку напруженого стану. Для цього розглянемо об'єм V , обмежений поверхнею S (рис. 1.8), на який діють об'ємні сили $\mathbf{p}_V = (X_V \ Y_V \ Z_V)^T$ з компонентами X_V, Y_V, Z_V – проекціями вектора на координатні осі x, y, z . Поверхню S , яка обмежує об'єм V , розіб'ємо на дві частини S_1 і S_2 .

На S_1 діють поверхневі навантаження \mathbf{p}_S , а на S_2 – задані переміщення \mathbf{u}_S :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_S &= (X_S \ Y_S \ Z_S)^T, \\ \mathbf{u}_S &= (u_S \ v_S \ w_S)^T. \end{aligned} \quad (1.55)$$

У кожній точці об'єму напружений стан визначається векторами напружень $\boldsymbol{\sigma}$ і деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}$. Припустимо, що переміщення тіла набули малих приростів, сумісних із геометричними і кінематичними в'язями, накладеними на тіло. Тоді, згідно з принципом Лагранжа, для тіла, яке перебуває в рівновазі, сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх зусиль, що діють на нього, на довільній системі можливих переміщень дорівнює нулю

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_V dV = 0. \quad (1.56)$$

Перший інтеграл – це варіація роботи внутрішніх зусиль, другий і третій – варіації роботи поверхневих і об'ємних сил на відповідних переміщеннях.

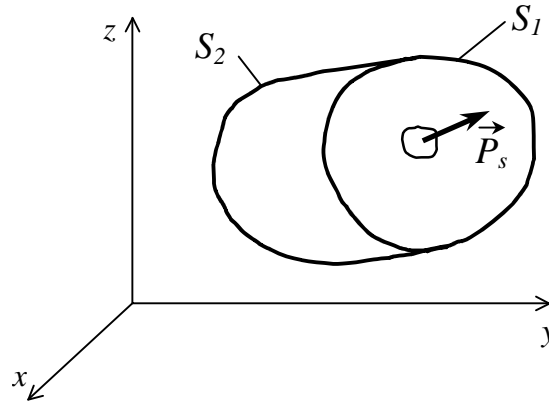


Рис. 1.8. Об'єм \$V\$

Можна показати, що рівняння (1.56) еквівалентне рівнянням рівноваги та граничним умовам на частині поверхні \$S_1\$. Якщо за допомогою рівнянь Коші і фізичних залежностей записати (1.56) через переміщення, то одержимо

$$-\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S dS_1 + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV = 0. \quad (1.57)$$

Рівняння (1.57) можна записати у дещо іншому вигляді, проінтегрувавши перший доданок

$$\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV = \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_S \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dS_1 - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV. \quad (1.58)$$

Підставляючи (1.58) у (1.57), одержимо

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV - \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dS_1 - \mathbf{p}_S) dS - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV = 0. \quad (1.59)$$

З урахуванням незалежності варіацій \$\delta \mathbf{u}\$ звідси можна одержати рівняння теорії пружності в переміщеннях і граничні умови на площі \$S_1\$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}, \quad (1.60)$$

$$\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{p}_S = \mathbf{0}. \quad (1.61)$$

Таким чином, можна стверджувати, що варіаційна і статична постановки задачі МДТТ еквівалентні. Разом із тим, у більшості випадків варіаційна постановка виявляється більш корисною, оскільки дає можливість наближеного розв'язку задач теорії пружності, зокрема, і механіки деформівного твердого тіла, взагалі. Суттєвою перевагою варіаційних рівнянь і, зокрема, рівняння Лагранжа (1.59) є більш низький

порядок похідних, які входять у рівняння, що дає можливість розшукувати розв'язок у класі функцій з меншими вимогами до їх гладкості, тобто диференційованості.

За допомогою рівнянь (1.57), (1.59) можна одержати наближені розв'язки без звернення до диференціальних рівнянь рівноваги (1.60). Методи, що ґрунтуються на прямому використанні рівняння (1.56), називають варіаційними.

Розглянуте вище формулювання принципу Лагранжа є справедливим для довільного закону зв'язку між компонентами напружень і деформацій при довільних залежностях між деформаціями і переміщеннями. Принцип Лагранжа в такій формі може використовуватись і у випадку дії неконсервативних зовнішніх сил, тобто сил, робота яких залежить від історії навантаження тіла. У цьому випадку рівняння (1.56) не відповідає класичній постановці задач варіаційного обчислення, для яких характерними є наявність функціоналу і питання про його екстремальність.

Такий функціонал можна побудувати на основі принципу можливих переміщень, якщо ввести припущення про консервативність зовнішніх сил, або про наявність потенціалу зовнішніх сил

$$\Pi = -\int_S \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS - \int_V \mathbf{P}_V^T \mathbf{u} dV. \quad (1.62)$$

Тоді повна енергія деформованого тіла і діючого навантаження складається з потенціальної енергії деформації тіла (потенціал внутрішніх сил) U і енергії зовнішніх сил (потенціал зовнішніх сил) Π .

$$E = U + \Pi. \quad (1.63)$$

Очевидно, величина E є функціоналом, величина якого визначається функціями переміщень – компонентами вектора \mathbf{u} . Умова стаціонарності функціоналу E –

$$\delta E = 0, \text{ тобто } \delta(U + \Pi) = 0. \quad (1.64)$$

Рівність (1.64) показує, що для консервативних систем з усіх можливих переміщень дійсними будуть ті з них, при яких функціонал повної енергії E набуває стаціонарного значення. При цьому можливі такі положення рівноваги:

$$\delta E = 0, \quad \delta^2 E > 0 \quad \rightarrow \quad E = E_{\min} \text{ (стійке положення рівноваги);}$$

$$\delta E = 0, \quad \delta^2 E < 0 \quad \rightarrow \quad E = E_{\max} \text{ (нестійке положення рівноваги);}$$

$$\delta E = 0, \quad \delta^2 E = 0 \quad \rightarrow \quad E = \text{const} \text{ (байдуже положення).}$$

1.8. Метод Рітца

Розглянемо тіло, завантажене об'ємними \mathbf{p}_V і поверхневими \mathbf{p}_S силами на частині поверхні тіла S_1 . На поверхні $S_2 = S - S_1$ прикладено геометричні в'язі

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S. \quad (1.65)$$

Згідно з методом Рітца, розв'язок рівняння (1.59) розшукується у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (1.66)$$

де $\mathbf{u} = (u \ v \ w)^T$ – вектор переміщень у рівнянні (1.59);

\mathbf{q} – вектор невідомих констант (узагальнених координат);

\mathbf{N} – матриця інтерполяційних функцій.

Кожна з функцій повинна задовольняти кінематичні умови (1.65). Усі функції \mathbf{N} повинні задовольняти умови лінійної незалежності і повноти. Лінійна незалежність передбачає, що сума

$$\alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_2 \mathbf{N}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{N}_n \quad (1.67)$$

дорівнює нулю, тільки якщо всі коефіцієнти α_i дорівнюють нулю. Умова повноти вимагає, щоб ряд $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots$ був повний, що забезпечувало б виконання умови збіжності розв'язку (1.66) до точного при збільшенні членів ряду, тобто

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i q_i \rightarrow \mathbf{u}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.68)$$

Крім того, функції \mathbf{N}_i повинні бути диференційованими до порядку $p-1$, якщо найбільший порядок похідної у рівнянні Лагранжа дорівнює p , і неперервними по об'єму тіла.

Після підстановки (1.66) у вираз для функціоналу (1.63) і інтегрування, одержимо функцію невідомих коефіцієнтів.

$$E = E(\mathbf{q}).$$

Умова мінімуму реалізується прирівнюванням до нуля похідних

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial q_n} = 0, \quad (1.69)$$

Рівняння (1.69) складають систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів q_i .

У більш загальному випадку, коли функціонал (1.63) не існує (зокрема, при наявності неконсервативних сил), необхідно використати варіаційне рівняння (1.59). Підставляючи (1.66) у рівняння (1.59), одержимо

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_V) = 0, \quad (1.70)$$

де

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{A}\mathbf{N})^T \mathbf{C} \mathbf{A}\mathbf{N} dV, \quad \mathbf{F}_S = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_S dS, \quad \mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}_V dV. \quad (1.71)$$

Матриця \mathbf{K} називається матрицею жорсткості системи, матриці \mathbf{p}_S і \mathbf{p}_V – векторами, відповідно, поверхневих і об'ємних сил.

Враховуючи довільність варіацій $\delta\mathbf{q}$, з (1.70) одержимо систему рівнянь відносно узагальнених переміщень

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V. \quad (1.72)$$

Розв'язок цієї системи алгебраїчних рівнянь відшукується за допомогою методів лінійної алгебри, зокрема методу Гауса [37].

Таким чином, алгоритм методу Рітца виявляється достатньо простим і складається з таких кроків:

- 1) вибір координатних функцій \mathbf{N} у розв'язку (1.66) для переміщень \mathbf{u} ;
- 2) підстановка вибраних функцій у вирази для матриць жорсткості і зовнішніх сил з урахуванням геометричних і фізичних залежностей для даної конструкції і обчислення компонент матриць;
- 3) розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (1.72) відносно узагальнених координат \mathbf{q} ;
- 4) визначення переміщень за формулою (1.66);
- 5) визначення необхідних компонент напружень і деформацій за відомими компонентами переміщень з використанням відповідних формул теорії пружності.

ПРИКЛАД 1.1. Визначити лінію прогину шарнірно закріпленої на кінцях балки, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $p(x) = \text{const}$.

Розшукуємо пружну лінію балки $w(x)$ у вигляді ряду

$$w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{q}.$$

Як вказувалося вище, функції $\mathbf{N}(x)$ повинні задовольняти умови повноти, бути лінійно незалежними, задовольняти кінематичні граничні умови і не накладати додаткових в'язей на балку. Крім того, необхідно, щоб вони мали похідні $p-1$ порядку, де p – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні Лагранжа. Зазначимо, що вибір координатних функцій є дуже відповідальним етапом у методі Рітца. Правильно підбрана система координатних функцій дозволяє обмежитися у розв'язку малим числом членів ряду і суттєво скоротити об'єм обчислень.

У даному випадку граничним умовам при $x=0$, $x=l$, $w=0$ відповідають гармонічні функції $\mathbf{N}_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}$, ($i=1, 2, \dots$).

Прогин $w(x)$ матиме вигляд

$$w(x) = \left[\sin \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}.$$

Матрицю жорсткості для стержня одержимо, підставляючи у (1.70) значення функції $\mathbf{N}(x)$

$$\mathbf{N}(x) = \left[\sin \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \right],$$

а також матриці диференціальних операторів \mathbf{A} і модулів пружності \mathbf{C} . Для плоского згину стержня

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}, \text{ тобто } \mathbf{A} = -z \frac{d^2}{dx^2},$$

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ тобто } \mathbf{C} = E.$$

У результаті підстановки одержимо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad K_{ii} = \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2EI},$$

$$K_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\mathbf{p}_S = \frac{2ql}{\pi} \left[1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad \dots \right].$$

Для коефіцієнтів q_i маємо

$$q_k = \begin{cases} \frac{4ql^4}{EI k^5 \pi^5}, & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Вираз для пружної лінії балки остаточно

$$w(x) = \frac{4ql^4}{\pi^2 EI} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Якщо в сумі залишити один член ряду, прогин балки посередині буде таким:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \approx 0.013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Точний розв'язок

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \approx 0.0130298 \frac{ql^4}{EI}.$$

Похибка складає усього 0.4%.

1.9. Варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського [10]

Розглянемо загальне рівняння динаміки

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.72)$$

де \vec{F}_i – узагальнені сили; \vec{r}_i – вектори узагальнених переміщень; \vec{v}_i – узагальнені швидкості мас m_i ; точка означає скалярний добуток.

Позначимо перший доданок у (1.72)

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (1.73)$$

і запишемо другий доданок у формі

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i. \quad (1.74)$$

Використовуючи далі умову комутативності операцій варіювання і диференціювання, одержимо

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{v}_i = \delta T, \quad (1.75)$$

де T – кінетична енергія.

З урахуванням (1.73)-(1.75) загальне рівняння динаміки набуває вигляду

$$\delta A + \delta T - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.76)$$

Помножимо цю рівність на диференціал часу dt і проінтегруємо від t_1 до t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.77)$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt - \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \delta \mathbf{q}_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.78)$$

Якщо границі інтегрування не варіюються, і $\delta \mathbf{q}_j$ на кінцях інтервалу $[t_1, t_2]$ нульові, – із залежності (1.78), яку називають принципом змінної дії [10] або інтегральним принципом Гамільтона-Остроградського, одержимо варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (1.79)$$

де $L = A + T$.

Варіаційне рівняння Гамільтона-Остроградського широко використовується для розв'язку задач динаміки деформівного твердого тіла. При цьому варіація δA складається з варіації робіт внутрішніх і зовнішніх сил $\delta A = \delta U + \delta W$, тоді інтегральний принцип набуває вигляду

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta T + \delta W) dt = \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.80)$$

1.10. Методи зважених нев'язок

Нехай диференціальне рівняння задачі має вигляд

$$L\mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (1.81)$$

де L – диференціальний оператор,

\mathbf{U} – вектор розшукуваних функцій.

Розшукуємо розв'язок у вигляді, аналогічному розв'язку в методі Рітца,

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (1.82)$$

Розв'язок (1.82) є наближенням, і після підстановки в рівняння (1.81) одержимо систему функцій, яку називають нев'язкою

$$\Delta = L\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{P} \neq \mathbf{0}. \quad (1.83)$$

Щоб зменшити нев'язку в цілому по об'єму, де розшукується розв'язок, поставимо умову, щоб вона була мінімальною “у середньому”, тобто щоб інтеграл від добутку нев'язки на варіацію деякої вагової функції $\delta\mathbf{W}$ дорівнювали нулю

$$\int_V \delta\mathbf{W}^T (L\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{P}) dV = \mathbf{0}. \quad (1.84)$$

Існує декілька варіантів методу зважених нев'язок, які відрізняються ваговими функціями. Якщо $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{U}}$, приходимо до найбільш популярного варіанту методу зважених нев'язок, який називають методом Бубнова-Гальоркіна [36, 41]

$$\int_V \delta\bar{\mathbf{U}}^T (L\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{P}) dV = \mathbf{0}. \quad (1.85)$$

Метод зважених нев'язок можна застосовувати до довільних операторів і граничних умов [8]. Як видно з перетворень (1.57)-(1.59), варіаційне рівняння Лагранжа можна також розглядати як варіант методу зважених нев'язок, причому з меншими порівняно з методом Бубнова-Гальоркіна вимогами щодо диференційованості пробних функцій.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1. Локальні функції і перехід від класичного методу Рітца до методу скінченних елементів

Основна складність при застосуванні методу Рітца і методів зважених нев'язок пов'язана з вибором базисних функцій, які повинні задовольняти граничні умови і бути означеними в усій області, де розшукується розв'язок. У зв'язку зі складністю геометрії конструкції підбір таких функцій виявляється дуже складним.

Прогресивною виявилася ідея локалізації базисних функцій, тобто використання кусково-неперервних функцій, які описуються різними виразами на окремих ділянках області. Такий підхід є характерним для методу скінченних елементів, який з математичної точки зору є методом Рітца (або варіантом методу зважених нев'язок) із кусково-неперервними базисними функціями. У цьому випадку інтеграли у варіаційному рівнянні обчислюються як сума інтегралів по окремих підобластях.

Особливість методу скінченних елементів полягає в тому, що підобласті мають порівняно просту форму, і базисні функції для них однотипні.

Розглянемо використання таких локально означених функцій при визначенні переміщень стержня, який розтягується силою F (рис. 2.1, *a*). Як відомо, переміщення в цьому випадку описується лінійною функцією (рис. 2.1, *б*). Виберемо базисні функції кусково-лінійними, не рівними нулю тільки біля відповідного вузла, в якому їх значення дорівнює одиниці. За межами двох ділянок біля вузла функція тотожно дорівнює нулю (рис. 2.1, *в*).

Переміщення у стержні апроксимуються таким виразом:

$$u = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i q_i,$$

або у матричній формі

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q}, \quad (2.1)$$

де

$$\bar{\mathbf{N}} = (\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 \quad \bar{N}_3 \quad \bar{N}_4), \quad \mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4)^T.$$

Базисні функції N_i неперервні на ділянці $[0, L]$ і мають розривні перші похідні (рис. 2.1).

Продовжуючи розв'язок методом Рітца, скористаємось варіаційним рівнянням Лагранжа

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx = 0, \quad (2.2)$$

де \mathbf{p} – навантаження, розподілене по довжині стержня (у даному випадку $\mathbf{p} = F\delta(x - L)$, де $\delta(x - L)$ – функція Дірака); $L = l_1 + l_2 + l_3$.

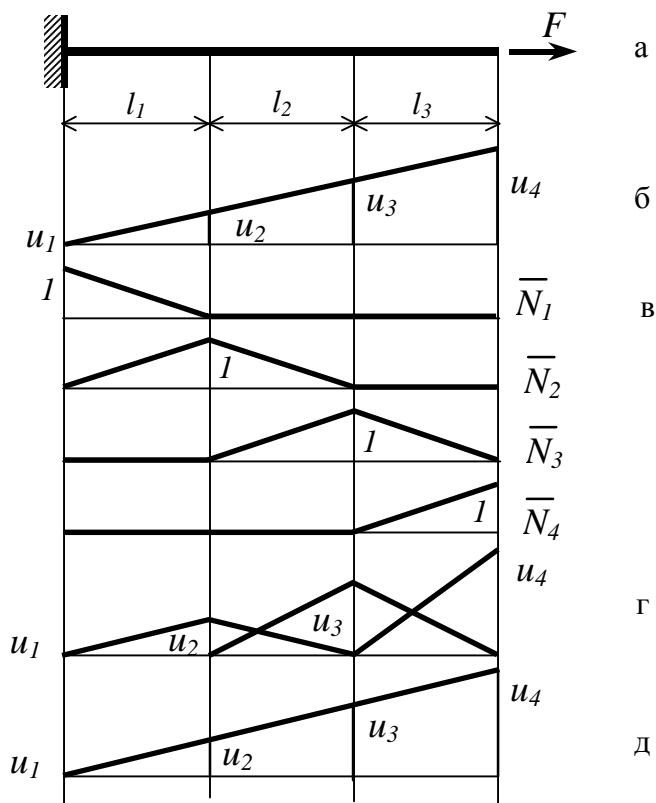


Рис. 2.1. Скінченно-елементне моделювання переміщень у стержні

Для стержня при розтягу-стиску маємо такі співвідношення для деформацій $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ і напружень $\sigma = E \frac{du}{dx}$ (E – модуль пружності матеріалу).

Після підстановки ε, σ у (2.2) і інтегрування по площі поперечного перерізу, одержимо

$$-EA \int_0^L \delta \left(\frac{du}{dx} \right)^T \frac{du}{dx} dx + \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx = 0. \quad (2.3)$$

Підставляючи далі переміщення \mathbf{u} (2.1), одержимо систему рівнянь відносно невідомих переміщень вузлів \mathbf{q}

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості;
 \mathbf{F} – вектор зовнішніх сил;

$$\mathbf{K} = EA \int_0^L \begin{bmatrix} \bar{N}'_1 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_1 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_1 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_1 \bar{N}'_4 \\ \bar{N}'_2 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_2 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_2 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_2 \bar{N}'_4 \\ \bar{N}'_3 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_3 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_3 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_3 \bar{N}'_4 \\ \bar{N}'_4 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_4 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_4 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_4 \bar{N}'_4 \end{bmatrix} dx, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F} = (0 \ 0 \ 0 \ F)^T,$$

(штрихом позначені похідні $\bar{N}'_i = \frac{d\bar{N}_i}{dx}$).

Врахуємо при обчисленні інтегралів у матриці жорсткості, що кожна з функцій \bar{N}_i є ненульовою тільки на двох суміжних ділянках, і позначимо функції зліва і справа, відповідно, \bar{N}_{i1} і \bar{N}_{i2} (i – номер функції \bar{N}_i). Тоді інтеграли у (2.5) можна записати на кожній ділянці окремо

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_1 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{12} dx, & \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_2 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{21} dx, \\ \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_3 dx &= 0, & \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_4 dx &= 0, \\ \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_1 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{12} dx, & \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_3 dx &= \int_0^{l_2} \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{31} dx, \\ \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_2 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{21} dx + \int_0^{l_2} \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{22} dx, & \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_4 dx &= 0, \text{ і т. д.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

З урахуванням такого розділення інтегралів на окремих ділянках, матрицю \mathbf{K} можна записати у вигляді суми матриць, визначених для кожної ділянки.

На ділянці $(0 - l_1)$

$$\mathbf{K}_1 = EA \int_0^{l_1} \begin{bmatrix} \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{12} & \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{21} \\ \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{12} & \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{21} \end{bmatrix} dx. \quad (2.7)$$

На ділянці $(l_1 - l_2)$

$$\mathbf{K}_2 = EA \int_{l_1}^{l_2} \begin{bmatrix} \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{22} & \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{31} \\ \bar{N}'_{31} \bar{N}'_{22} & \bar{N}'_{31} \bar{N}'_{31} \end{bmatrix} dx. \quad (2.8)$$

На ділянці $(l_2 - l_3)$

$$\mathbf{K}_3 = EA \int_{l_2}^{l_3} \begin{bmatrix} \bar{N}'_{32} \bar{N}'_{32} & \bar{N}'_{32} \bar{N}'_{41} \\ \bar{N}'_{41} \bar{N}'_{32} & \bar{N}'_{41} \bar{N}'_{41} \end{bmatrix} dx. \quad (2.9)$$

Функції \bar{N}_{i1} і \bar{N}_{i2} при відліку змінної x від початку стержня можна записати в такому вигляді:

$$\bar{N}_{i1} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \bar{N}_{i2} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}. \quad (2.10)$$

Таким чином, матрицю жорсткості можна синтезувати з матриць жорсткості окремих ділянок (2.7)-(2.9), які назвемо скінченними елементами. Матриці жорсткості для кожної ділянки (скінченного елемента) можна одержати незалежно в локальних осях, пов'язаних із цією ділянкою. Локальні функції для i -тої ділянки зображено на рис. 2.2.

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l_i}, \quad N_2(x) = \frac{x}{l_i}, \quad (2.11)$$

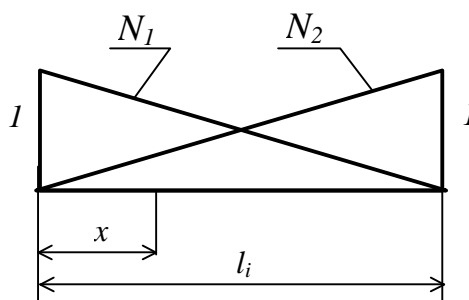


Рис. 2.2. Локальні функції для i -тої ділянки

Матриця жорсткості для i -го скінченного елемента стержня буде такою:

$$\mathbf{K}_i = \frac{EA_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Саме у можливості побудови повної матриці жорсткості конструкції з матриць жорсткості елементів, одержаних незалежно від конструкції в цілому, і полягає основна особливість методу скінченних елементів. Згідно з МСЕ спочатку розглядають кожний елемент і будують його матрицю жорсткості, після чого елементи об'єднують з урахуванням умов нерозривності і граничних умов. У більшості випадків використовують елементи однакової форми, що дозволяє будувати матрицю жорсткості тільки один раз.

Продовжимо розв'язок, використовуючи матриці жорсткості (2.7)-(2.9), одержані для кожної ділянки стержня.

Наступним етапом має бути одержання матриці жорсткості стержня. Матриці кожного скінченного елемента необхідно поєднати, щоб одержати матрицю для стержня. Для цього розглянемо скінченно-елементну модель стержня і окремий скінченний елемент і прирівняємо відповідні

переміщення (рис. 2.3). Це можна виконати у вигляді таблиці, яку називають матрицею індексів (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Матриця індексів

№ елемента	Переміщення елемента	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

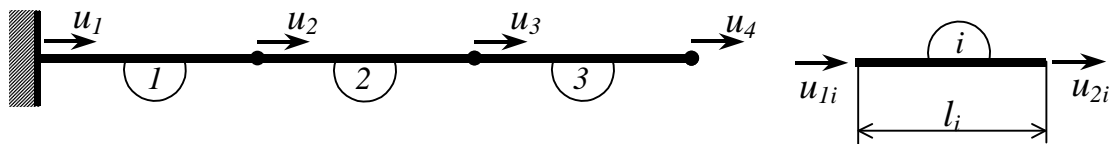


Рис. 2.3. Скінченно-елементна модель стержня і окремий скінченний елемент

У відповідності з цією таблицею індекси елементів матриці жорсткості необхідно змінити на глобальні. Наприклад, для першого елемента

$$K_{11}^{(1)} = K_{11}, \quad K_{12}^{(1)} = K_{12}, \quad K_{22}^{(1)} = K_{22}, \quad K_{21}^{(1)} = K_{21}.$$

Для другого елемента

$$K_{11}^{(2)} = K_{22}, \quad K_{12}^{(2)} = K_{23}, \quad K_{22}^{(2)} = K_{33}, \quad K_{21}^{(2)} = K_{32}.$$

Для третього елемента

$$K_{11}^{(3)} = K_{33}, \quad K_{12}^{(3)} = K_{34}, \quad K_{22}^{(3)} = K_{44}, \quad K_{21}^{(3)} = K_{43}.$$

Складаючи компоненти з однаковими індексами, одержимо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Після обчислення інтегралів матриця \mathbf{K} матиме такий вигляд:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Структуру матриці показано на рис. 2.4.

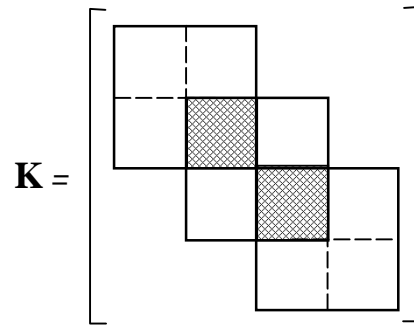


Рис. 2.4. Структура матриці жорсткості системи

Для того, щоб урахувати закріплення, треба реалізувати умову $u_1 = 0$. Це можна було зробити, викресливши у матриці жорсткості стержня (2.14) перші рядок і стовпець. Відповідно видалимо перші елементи матриць переміщень і зовнішніх навантажень. Зазначимо, що після такої операції необхідно виконати перенумерацію невідомих (у даному випадку друге переміщення стане першим і т.д.). У системі MathCAD і існуючих програмах МСЕ така перенумерація проводиться автоматично. Рівняння для визначення невідомих переміщень з урахуванням значень коефіцієнтів матриць жорсткості елементів (усі елементи прийняті однаковими) матиме вигляд

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.15)$$

де

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Розв'язок рівняння (2.15) буде точним, оскільки степінь апроксимуючих поліномів відповідає дійсному

$$q_1 = 0, \quad q_4 = \frac{Fl}{EA}, \quad q_3 = \frac{2}{3} q_4, \quad q_2 = \frac{1}{3} q_4. \quad (2.17)$$

Сили у вузлах можна знайти, помноживши матрицю (2.11) на вектор знайдених переміщень

$$\mathbf{R} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Таким чином, ми одержали розв'язок задачі розтягу стержня за допомогою методу скінченних елементів. Цей варіант МСЕ називають методом скінченних елементів у переміщеннях, у зв'язку з тим, що невідомими тут є переміщення. Далі буде розглядатися саме цей варіант МСЕ, як найбільш поширений у практиці розрахунків.

2.2. Алгоритм методу скінченних елементів

Узагальнюючи розглянуту методику, можна сформулювати таку послідовність використання МСЕ (алгоритм):

- 1) дискретизація конструкції, тобто подання її як сукупності скінченних елементів;
- 2) побудова матриць жорсткості елементів;
- 3) побудова загальної матриці жорсткості та вектора навантажень для усієї області;
- 4) накладення граничних умов і редукція (тобто відповідне зменшення розмірів) матриць жорсткості, векторів невідомих і навантаження;
- 5) розв'язок системи рівнянь відносно вузлових переміщень;
- 6) визначення інших необхідних величин, які залежать від вузлових невідомих.

Розглянемо ці етапи спочатку в загальних рисах. Конкретні реалізації подані в наступних розділах.

2.2.1. Дискретизація конструкції

Розділення конструкції на окремі скінченні елементи є дуже відповідальним етапом розрахунку. Від правильного розділення залежить як точність розрахунку, так і його трудомісткість. Оскільки ця операція не має теоретичного обґрунтування, ефективність її повністю залежить від інженерних навичок того, хто нею займається. Використання малих елементів хоча і підвищує точність розрахунку, але збільшує кількість невідомих і порядок рівнянь для їх визначення. У зв'язку з цим необхідно вибирати розміри елементів у відповідності з градієнтами тих величин, які визначаються. У місцях, де розшукувана величина змінюється швидко, розміри елементів зменшують.

У методі скінченних елементів використовуються елементи різних форм і розмірів. Вибір елемента залежить від характеру задачі, від точності розв'язку, яку треба забезпечити.

При заміні конструкції сукупністю дискретних елементів важливо забезпечити якомога більшу відповідність між моделлю і конструкцією.

Найпростішими є одновимірні (стержневі) елементи (рис. 2.5). Площа поперечного перерізу елемента може бути сталою по довжині. Найчастіше такий елемент зустрічається у розрахунках стержневих конструкцій. Елемент може мати два і більше вузлів.

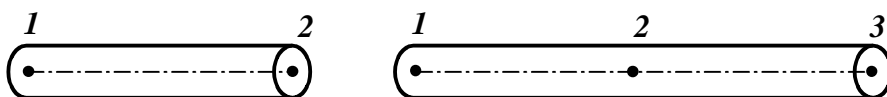


Рис. 2.5. Одновимірні скінченні елементи

Для побудови дискретної моделі двовимірної області використовуються двовимірні скінченні елементи (рис. 2.6). Найчастіше використовуються трикутники і чотирикутники з різною кількістю вузлів.

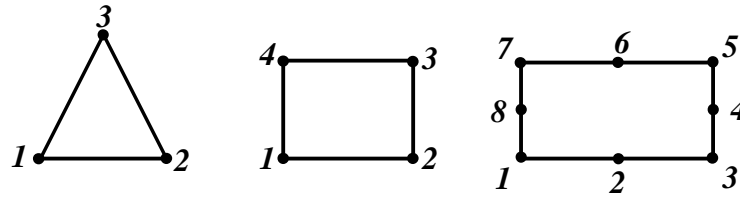


Рис. 2.6. Двовимірні скінченні елементи

Тривимірні тіла моделюють такими елементами, як тетраедр і паралелепіпед (рис. 2.7).

Для дискретизації осесиметричних тіл широко використовують осесиметричні скінченні елементи, створені обертанням плоскої фігури відносно осі.

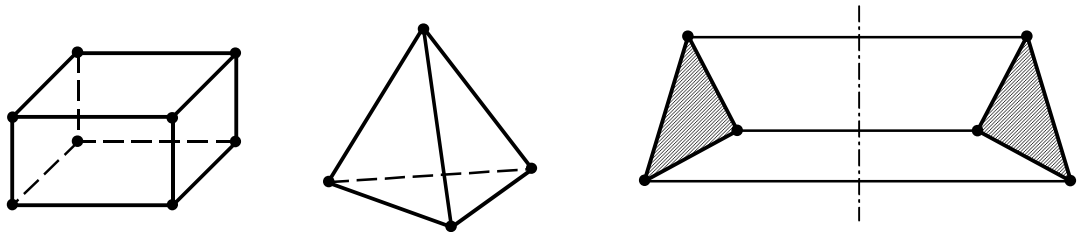


Рис. 2.7. Об'ємні скінченні елементи

Процес дискретизації може бути розділений на два етапи: розділення тіла на елементи і нумерація елементів і вузлів. Найбільш простим є розділення стержневих конструкцій на одновимірні елементи. Наприклад, конструкцію ферми (рис. 2.8) можна розділити на скінченні елементи – стержні ферми з вузлами у вузлах ферми.

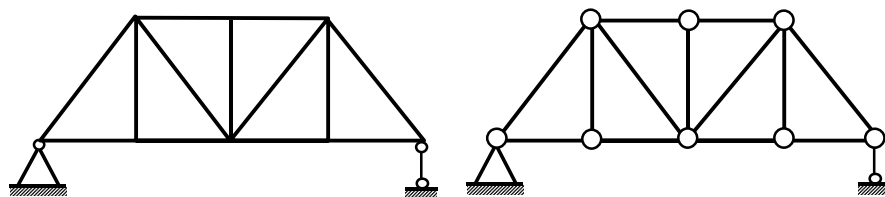


Рис. 2.8. Скінченно-елементна модель ферми

Для двовимірних конструкцій найбільш раціональним є розділення на трикутні й прямокутні елементи.

Загальні рекомендації щодо етапу дискретизації зводяться до таких:

1) розміри елементів повинні забезпечувати необхідну точність описання переміщень і напружень, для чого вони повинні змінюватись у відповідності з величиною градієнтів переміщень і напружень;

2) тип елементів, що використовується, повинен забезпечити адекватність роботи конструкції та її скінченно-елементної моделі, а також достатню точність апроксимації форми й умов закріплення конструкції;

3) нумерація повинна забезпечувати мінімальну частину стрічки глобальної матриці жорсткості. Чим менше ширина стрічки, тим зручніше для розв'язку одержана система рівнянь МСЕ. Для цього нумерація повинна проводитись уздовж поперечного перерізу конструкції (рис. 2.9, *a*). Для замкнених контурів нумерація проводиться симетрично відносно початкового вузла (рис. 2.9, *б*).

В усіх випадках необхідно намагатись зменшити різницю між номерами сусідніх вузлів.

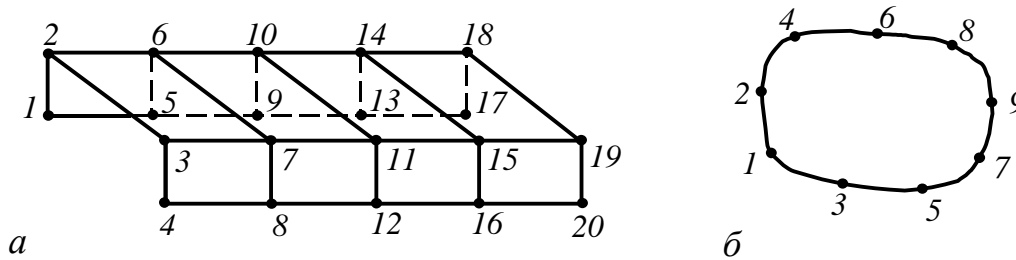


Рис. 2.9. Послідовність нумерації вузлів: уздовж поперечного перерізу (*a*); симетрично відносно початкового вузла (*б*)

В існуючих програмних комплексах, які використовують МСЕ, операція розділення на елементи, як правило, автоматизована. Для цього використовуються різні методи побудови сітки на поверхні або в об'ємі конструкції [15]. Детальніше методика дискретизації розглядається у розділах 4 і 7.

2.2.2. Побудова матриць жорсткості елементів

У більшості випадків при розрахунках конкретних конструкцій користуються готовими матрицями жорсткості, які наводяться у довідниках [31, 36] або у бібліотеках відповідних програмних комплексів. Однак, іноді необхідно самостійно обчислювати матриці жорсткості, зокрема у випадках, коли компоненти матриць визначаються чисельним способом.

Для побудови матриць жорсткості елементів використовують варіаційне рівняння Лагранжа або рівняння методу зважених нев'язок, записані для одного елемента. Основним етапом тут є вибір апроксимуючих функцій, що описують дійсне поле переміщень в елементі. Ці функції повинні, як і координатні функції у методі Рітца, задовольняти умови допустимості і повноти для даної задачі. Допустимість передбачає неперервність функцій та їх похідних до $p-1$ порядку (p – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні) і коректність визначення параметрів в умовах варіаційного формулювання. Для виконання умов повноти апроксимуючі функції повинні задовольняти умову незмінності похідних, згідно з якою похідні у варіаційному рівнянні повинні ставати незмінними зі зменшенням розмірів елемента. Похідні p -го порядку

можуть мати розриви першого роду, але при зменшенні розмірів елемента повинні залишатись сталими. Якщо виконуються умови допустимості й повноти, розв'язок за методом скінченних елементів буде наближатись до точного при зменшенні розмірів елемента.

2.2.3. Синтез скінченно-елементної моделі конструкції

Синтезом називають процес складання елементів у зв'язану скінченно-елементну модель конструкції. Оскільки сили, що діють у вузлах, є коефіцієнтами матриці жорсткості елементів, а у вузлі сходиться декілька елементів, синтез зводиться до складання відповідних коефіцієнтів матриць жорсткості декількох елементів по кожному з напрямків вузлових переміщень і розміщення цієї суми у відповідній клітинці глобальної матриці жорсткості. Формально операцію синтезу можна провести за допомогою розглянутої вище матриці індексів. Розглянемо цю процедуру докладніше.

Під набором індексів для кожного елемента розуміють значення локальних узагальнених переміщень, яких ті набувають при глобальній нумерації переміщень для конструкції в цілому. Глобальна нумерація визначається при дискретизації системи на скінченні елементи. Локальна нумерація пов'язана з вибором функцій апроксимації і є однаковою для однотипних елементів.

Для побудови матриці індексів спочатку складається топологічна матриця, яка встановлює відповідність між локальною і глобальною нумерацією вузлів кожного елемента (рис. 2.10)

$$\mathbf{Top} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 & 10 & 11 & 7 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 12 & 13 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

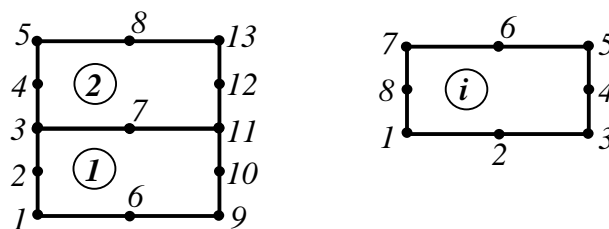


Рис. 2.10. Глобальна і локальна нумерації вузлів

Оскільки для складання глобальної матриці необхідні номери узагальнених координат, а не вузлів, необхідно домовитись про відповідність нумерації вузлів і узагальнених переміщень. Топологічна матриця використовується для одержання матриці індексів, яка встановлює відповідність між локальною і глобальною нумераціями переміщень вузлів елемента. При невеликій кількості вузлів можна

записати безпосередньо матрицю індексів, що задає відповідність між номерами глобальних і локальних узагальнених координат елемента (рис. 2.11, табл. 2.2).

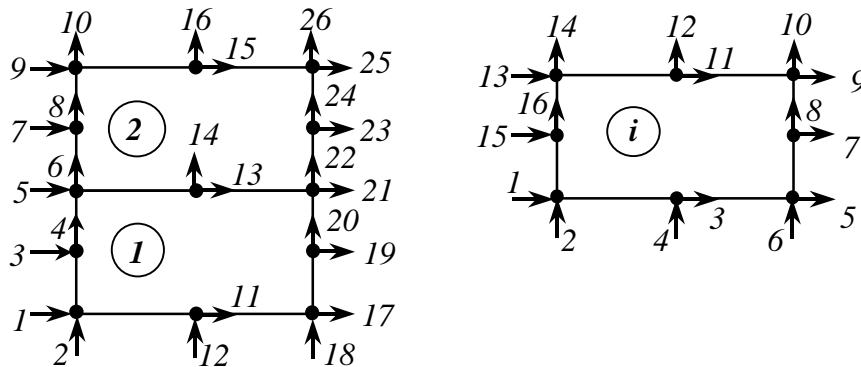


Рис. 2.11. Глобальна і локальна нумерації вузлових переміщень

Таблиця 2.2

Матриця індексів до рис. 2.11

№ елемента	Індекси вузлових переміщень															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	11	12	17	18	19	20	21	22	13	14	5	6	3	4
2	5	6	13	14	21	22	23	24	25	26	15	16	9	10	7	8

Після того, як повністю описано геометрію конструкції, необхідно задати граничні умови. Для МСЕ у формі методу переміщень, який розглядається у даному посібнику, найпростіше задати граничні умови відносно переміщень, і це вигідно відрізняє цей варіант МСЕ від інших. При формулюванні граничних умов у переміщеннях найчастіше зустрічаються випадки жорсткого закріплення у відповідних напрямках. Врахування нульового значення проводиться заміною нулем відповідного переміщення у матриці індексів і перенумерацією всіх залишених глобальних переміщень. Це рівнозначно викреслюванню з глобальної матриці жорсткості стовпця і рядка з номером координати, яка прирівнюється до нуля, що приводить до зменшення розміру глобальної матриці жорсткості. Оскільки цей спосіб приводить до незручностей, пов'язаних із необхідністю перенумерації переміщень, раціональнішим виявляється інший. На перетині головної діагоналі і рядка або стовпця з номером заданої координати ставиться одиниця, а у векторі навантажень системи рівнянь у відповідному рядку записується нуль або задане ненульове переміщення, інші коефіцієнти у відповідних рядку і стовпці прирівнюються до нуля.

Недолік цього варіанту полягає в тому, що одержана після такої операції матриця жорсткості стає несиметричною. Симетрію можна зберегти, використавши спосіб Пейна-Айронса [25]: якщо задається умова

$q_i = \bar{q}_i$, то діагональний елемент у i -му рядку матриці множиться на дуже велике число, а i -й елемент у векторі навантажень замінюється добутком того ж самого числа, значень \bar{q}_i і діагонального елемента.

2.2.4. Розв'язок систем рівнянь МСЕ

Оскільки розв'язок системи рівнянь МСЕ займає основну частину часу розрахунку задачі, вибір методу розв'язання є дуже важливим кроком. Проблемі розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь присвячена величезна кількість робіт, існує багато готових програм. При виборі методу необхідно враховувати особливості МСЕ. Матриці жорсткості у МСЕ є рідко заповненими, що дозволяє при раціональній нумерації привести всі ненульові коефіцієнти ближче до головної діагоналі (стрічкова структура матриці). Існують програми, які враховують стрічкову структуру і суттєво зменшують час розв'язання системи рівнянь із такою матрицею [5].

Способи розв'язку систем лінійних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні. Найбільш поширеними є прямі методи, серед яких найчастіше використовуються варіанти методу Гауса. Характерним представником ітераційних методів є метод Гауса-Зайделя (метод послідовної релаксації) [37, 38]. У системі Mathcad для розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь використовується блок Given...Find.

Розв'язок задач динаміки залежить від виду правої частини диференціального рівняння коливань. При нульовій частині розв'язок зводиться до визначення власних частот і форм коливань і називається задачею на власні значення матриці динамічної жорсткості. При ненульовій правій частині приходимо до задач вимушених коливань. Докладно методи розв'язання задач динаміки розглядаються у [11, 35].

2.2.5. Обробка результатів

У МСЕ у варіанті методу переміщень безпосередньо одержують переміщення вузлів. Маючи переміщення, можна одержати всі інші параметри розв'язку, зокрема, сили у вузлах, напруження в точках об'єму.

Для визначення вузлових сил необхідно розв'язати рівняння рівноваги типу (2.15), записане для кожного скінченного елемента, відносно правої частини.

При визначенні напружень використовують формули зв'язку між напруженнями, деформаціями і переміщеннями.

Зазначимо, що оскільки деформації й напруження визначають за відомими переміщеннями з використанням операції диференціювання (згадайте формули Коші), точність їх визначення порівняно з переміщеннями погіршується. Рекомендується визначати напруження у вузлових точках як середнє від значень для кожного елемента.

РОЗДІЛ 3

ВИКОРИСТАННЯ МСЕ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНІВ І СТЕРЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Прийmemo таку послiдовнiсть розгляду: спочатку одержимо матрицю жорсткостi для характерних стержневих елементiв, пiсля чого обговоримо методикy складання (синтезу) конструкцiй з елементiв i реалiзацiю одержаних рiвнянь для визначення необхідних параметрiв. На закiнчення розглянемо декiлька прикладiв розрахунку стержнiв i стержневих конструкцiй.

3.1. Побудова матриць жорсткостi i зовнiшнiх сил для стержневих елементiв

3.1.1. Елементи, якi працюють на розтяг-стиск

Розглянемо елемент стержня, завантажений поздовжнiми силами, розподiленими по довжинi за довiльним законом $p(x)$. Площу поперечного перерiзу A вважатимемо сталою. Побудуємо iнтерполяцiйний полiном для цього елемента. Найвищий степiнь полiнома визначається як $n = 2m - 1$, де $2m$ – степiнь диференцiйного рiвняння, яке описує дану задачу, або число ступенiв вiльностi елемента. Для розтягу-стиску диференцiальне рiвняння має вигляд

$$\frac{d^2u}{dx^2} = p(x), \quad (3.1)$$

тобто $2m = 2$, i тому степiнь полiнома $m = 1$, отже вiн буде таким:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (3.2)$$

Умова повноти передбачає наявнiсть усiх ступенiв змiнної x i в даному випадку виконується. Невiдомi коефiцiєнти α_1, α_2 визначаються з умов на торцях елемента (рис. 3.1)

$$u(0) = u_1, \quad u(a) = u_2, \quad \text{або } (\alpha_1 = u_1, \alpha_1 + \alpha_2 a = u_2).$$

З цiєї системи рiвнянь маємо

$$\alpha_1 = u_1, \quad \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{a}.$$

Пiдставляючи α_1, α_2 у вираз для u (3.2), одержимо

$$u = u_1 \frac{a-x}{a} + u_2 \frac{x}{a}. \quad (3.3)$$

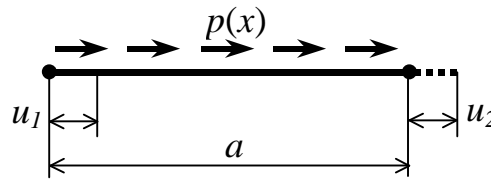


Рис. 3.1. Двовузловий стержневий елемент

Вираз (3.3) можна розглядати як суму Рітца, де u_1, u_2 – невідомі коефіцієнти, а

$$N_1 = 1 - \frac{x}{a}, \quad N_2 = \frac{x}{a} \quad (3.4)$$

– координатні функції, або функції форми.

Можна відмітити характерні для локальних координатних функцій особливості:

1) кожна координатна функція є поліном того ж степеня, який прийнятий для апроксимації переміщень у скінченному елементі;

2) координатні функції набувають значень $N_i = 1$ у відповідних вузлових точках, в інших вузлах – $N_i = 0$.

Запишемо інтеграли потенціальної енергії деформації і роботи зовнішніх сил

$$U = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad W = \int_0^a \delta \mathbf{u}^T p dx \quad (3.5)$$

і підставимо сюди вираз для переміщень, використавши формули для напружень і деформацій при розтягу-стиску стержнів

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{du}{dx}, \quad \boldsymbol{\sigma} = E \frac{du}{dx}, \quad (3.6)$$

$$U = \int_V E \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) dV = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},$$

$$W = \int_0^a \delta \mathbf{u}^T p dx = \mathbf{q}^T \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

де \mathbf{q} – вектор вузлових переміщень

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad u_2]^T;$$

\mathbf{K} – матриця жорсткості елемента

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.8)$$

\mathbf{F} – матриця зовнішніх сил, вигляд якої залежить від навантаження $p(x)$. Для трьох частинних випадків навантаження (рис. 3.2, а-в), відповідно, матимемо

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \mathbf{F} &= \frac{pa}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{б) } \mathbf{F} &= pa \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, & \text{в) } \mathbf{F} &= P \begin{pmatrix} \frac{a-a_1}{a} \\ \frac{a_1}{a} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

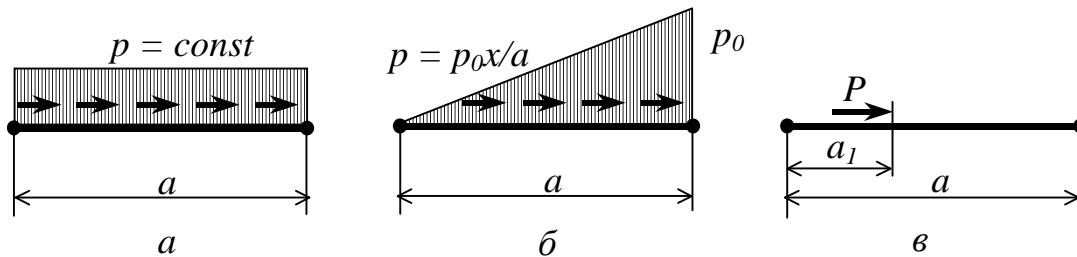


Рис. 3.2. Схеми навантажень

Якщо підставити варіації потенціальної енергії і роботи зовнішніх сил у рівняння Лагранжа

$$-\delta U + W = 0,$$

одержимо знайоме матричне рівняння

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F},$$

яке можна розглядати як залежність між силами, діючими у вузлах елемента, і переміщеннями цих вузлів.

Таким чином, для одержання матриць жорсткості і зовнішніх сил необхідно записати інтеграли потенціальної енергії і роботи зовнішніх сил, підставити вирази для переміщень і одержати такі форми:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad W = \mathbf{q}^T \mathbf{F}. \quad (3.10)$$

Коефіцієнти при координатах \mathbf{q} , а саме \mathbf{K} і \mathbf{F} , і є відповідно матрицями жорсткості і зовнішніх сил.

Зазначимо, що прийнята апроксимація з двома вузовими переміщеннями і перший порядок інтерполяційного полінома є мінімально необхідними, і порядок поліномів може бути прийнятий вищим. У цьому випадку скінченні елементи будуть мати більше, ніж два вузли.

Визначимо матриці жорсткості і зовнішніх сил для елемента з трьома вузлами (рис. 3.3).

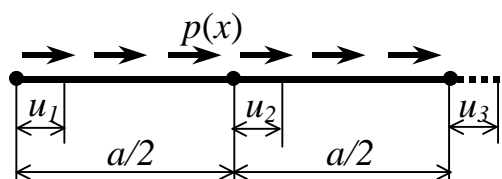


Рис. 3.3. Стержневий елемент із трьома вузлами

Функцію переміщень запишемо у вигляді квадратичного полінома

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2. \quad (3.11)$$

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ визначаються з таких умов:

$$x = 0, u = u_1; \quad x = \frac{a}{2}, u = u_2; \quad x = a, u = u_3. \quad (3.12)$$

Після підстановки (3.11) в умови (3.12), одержимо

$$u = u_1 \left(1 - 3 \frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2} \right) + u_2 \left(4 \frac{x}{a} - 4 \frac{x^2}{a^2} \right) + u_3 \left(-\frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (3.13)$$

тобто функції форми мають такий вигляд:

$$N_1 = 1 - 3 \frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2}, \quad N_2 = 4 \frac{x}{a} - 4 \frac{x^2}{a^2}, \quad N_3 = \left(-\frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (3.14)$$

Згідно з (3.5), (3.7), матриця жорсткості елемента буде такою:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

а матриця зовнішніх сил при рівномірно розподіленому навантаженні –

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} pa \\ \frac{2}{3} pa \\ \frac{1}{6} pa \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Для елемента з чотирма ступенями вільності (рис. 3.4) з апроксимаційним поліномом

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

приходимо до такого виразу для переміщення:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4, \quad (3.17)$$

де

$$N_1 = 1 - \frac{11x}{2a} + 9 \frac{x^2}{a^2} - \frac{9x^3}{2a^3}, \quad N_2 = 9 \frac{x}{a} - \frac{45x^2}{2a^2} + \frac{27x^3}{2a^3},$$

$$N_3 = -\frac{9x}{2a} + 18 \frac{x^2}{a^2} - \frac{27x^3}{2a^3}, \quad N_4 = \frac{x}{a} - \frac{9x^2}{2a^2} + \frac{9x^3}{2a^3}.$$

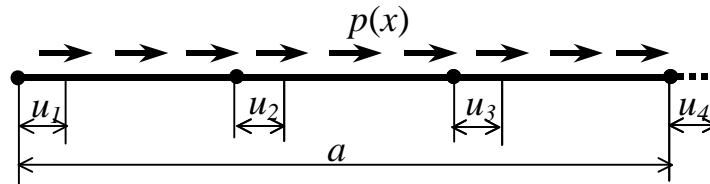


Рис. 3.4. Стержневий елемент з чотирма вузлами

Матриця жорсткості у цьому випадку матиме вигляд

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{37}{189} & -\frac{189}{54} & \frac{27}{297} & -\frac{13}{27} \\ \frac{10}{40} & \frac{40}{5} & \frac{20}{40} & \frac{40}{20} \\ \frac{189}{27} & -\frac{297}{54} & \frac{27}{54} & -\frac{13}{189} \\ \frac{40}{20} & \frac{5}{40} & \frac{40}{5} & \frac{20}{40} \\ \frac{27}{40} & -\frac{297}{20} & \frac{54}{40} & -\frac{189}{10} \\ \frac{20}{13} & \frac{40}{27} & \frac{5}{189} & \frac{40}{37} \\ -\frac{13}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{189}{40} & \frac{37}{10} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Матриця сил при сталому навантаженні $p(x) = const$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{8} pa \quad \frac{3}{8} pa \quad \frac{3}{8} pa \quad \frac{1}{8} pa \right)^T. \quad (3.19)$$

Прийняті у попередніх прикладах функції апроксимації передбачали невідомими коефіцієнтами значення функцій у вузлах. Такі елементи називають лагранжевими.

3.1.2. Елемент, що працює на кручення

Запишемо матриці жорсткості й вузлових сил для елемента стержня, що працює на кручення (рис. 3.5).

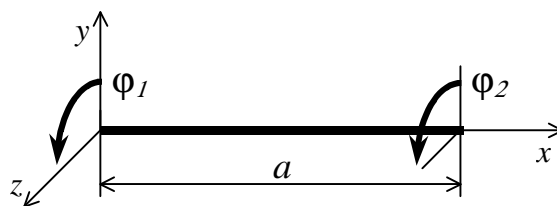


Рис. 3.5. Елемент стержня при крученні

Потенціальна енергія деформації для стержня при крученні

$$U = \frac{1}{2} \int_V \gamma \tau dV, \quad (3.20)$$

де

$$\gamma = \frac{\phi}{a} \rho, \quad \tau = G \frac{\phi}{a} \rho$$

(ϕ – кут закручування, G – модуль зсуву).

Для двовузлового елемента кут закручування визначаємо через вузлові переміщення φ_1 і φ_2

$$\varphi = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2, \quad (3.21)$$

де N_1, N_2 – лінійні функції апроксимації (3.4).

Після підстановки (3.21) у (3.20) і інтегрування одержимо

$$\mathbf{K} = \frac{GI_k}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_k = \int_A \rho^2 dA, \quad (3.22)$$

(GI_k – жорсткість стержня при крученні).

Вектор вузлових навантажень одержимо з виразу для роботи зовнішніх сил – моментного навантаження m_x

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \varphi m_x dx. \quad (3.23)$$

$$\text{Якщо } m_x = \text{const}, \quad \mathbf{F} = \frac{m_x a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Якщо } m_x = m_0 \frac{x}{a}, \quad \mathbf{F} = \frac{m_0 a}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

3.1.3. Елемент балки при плоскому згині

Елемент завантажено вузловими силами $\mathbf{R} = (R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4)^T$.

Вектор переміщень – $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4)^T$. Додатні напрямки компонент векторів \mathbf{R} і \mathbf{q} позначені на рис. 3.6.

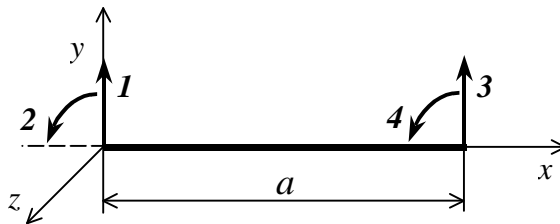


Рис. 3.6. Елемент стержня при плоскому згині

Потенціальна енергія деформації стержня при згині

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV, \quad (3.25)$$

де $\varepsilon = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$, $\sigma = E\varepsilon$ (v – прогин балки).

Знайдемо розв'язок для прогину у вигляді

$$v = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (3.26)$$

де \mathbf{N} – матриця інтерполяційних функцій. У даному випадку доцільно прийняти за невідомі параметри не тільки значення функцій, але і їх похідних у вузлах. Для визначення інтерполяційних функцій запишемо апроксимаційний поліном

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3. \quad (3.27)$$

Порядок полінома забезпечує неперервність похідних другого порядку, які входять в підінтегральні функції (3.25). Поліном має чотири коефіцієнти, для визначення яких використаємо умови щодо переміщень і їх перших похідних (кутів повороту) у крайніх (вузлових) перерізах

$$v(0) = q_1, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = q_2, \quad v(a) = q_3, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=a} = q_4. \quad (3.28)$$

Функція переміщень матиме вигляд

$$v = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 + N_4 q_4, \quad (3.29)$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, & N_2 &= x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}, \\ N_3 &= 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, & N_4 &= -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Це так звані функції Ерміта, які задовольняють умови

$$\begin{aligned} N_1(0) &= 1, & N_1'(0) &= 0, & N_1(a) &= 0, & N_1'(a) &= 0, \\ N_2(0) &= 0, & N_2'(0) &= 1, & N_2(a) &= 0, & N_2'(a) &= 0, \\ N_3(0) &= 0, & N_3'(0) &= 0, & N_3(a) &= 1, & N_3'(a) &= 0, \\ N_4(0) &= 0, & N_4'(0) &= 0, & N_4(a) &= 0, & N_4'(a) &= 1. \end{aligned}$$

Графіки цих функцій зображені на рис. 3.7.

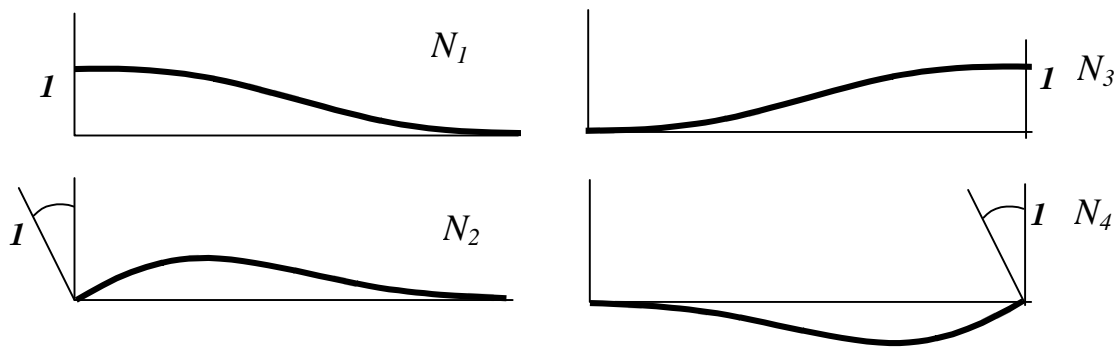


Рис. 3.7. Функції Ерміта

Після підстановки переміщення v (3.29) у формулу (3.25) одержимо

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (3.31)$$

де

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{a} \begin{bmatrix} \frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} \\ & 2 & -\frac{3}{a} & 1 \\ & & \frac{6}{a^2} & -\frac{3}{a} \\ \text{сим.} & & & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Для визначення вектора вузлових навантажень скористаємося формулою для роботи зовнішніх сил

$$W = \int_0^a v p dx, \quad (3.33)$$

звідки для $p = p_0 = \text{const}$

$$\mathbf{F} = \frac{p_0 a}{2} \left\{ 1 \quad \frac{a}{6} \quad 1 \quad -\frac{a}{6} \right\}^T, \quad (3.34)$$

для $p = p_0 \frac{x}{a}$

$$\mathbf{F} = \frac{p_0 a}{2} \left\{ 3 \quad \frac{2a}{3} \quad 7 \quad -a \right\}^T. \quad (3.35)$$

3.1.4. Елемент стержня, який працює на згин із розтягом-стиском

На елемент стержня довжиною a і жорсткістю на згин EI_z і на розтяг EA діє поперечне $p_y(x)$ і поздовжнє $p_x(x)$ навантаження (рис. 3.8). Осі y і z – головні осі поперечного перерізу стержня. Елемент має 6 ступенів вільності. Потенціальна енергія деформації

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV, \quad (3.36)$$

де

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad (3.37)$$

(u – переміщення вздовж осі x , v – переміщення в напрямку осі y).

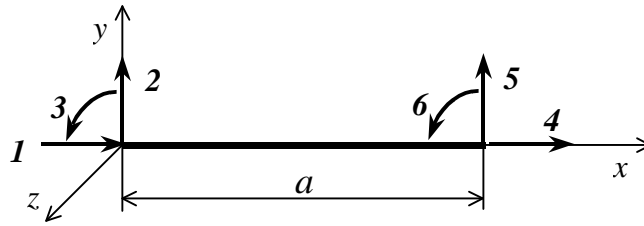


Рис. 3.8. Елемент стержня при згині з розтягом-стиском

Апроксимації осьового переміщення і прогину

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_4 = \mathbf{N}_p \mathbf{q}_p, \quad (3.38)$$

$$v = N_3 q_2 + N_4 q_3 + N_5 q_5 + N_6 q_6 = \mathbf{N}_z \mathbf{q}_z, \quad (3.39)$$

$N_1 = 1 - \frac{x}{a}$, $N_2 = \frac{x}{a}$, N_3, \dots, N_6 – функції Ерміта (3.30).

Підставляємо u , v у (3.37), (3.36) і з урахуванням вибору осей y , z , знаходимо

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}_p^T \left(EA \int_0^a \left(\frac{d}{dx} \mathbf{N}_p \right)^T \left(\frac{d}{dx} \mathbf{N}_p \right) dx \right) \mathbf{q}_p +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathbf{q}_z^T \left(EI_z \int_0^a \left(\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}_z \right)^T \left(\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}_z \right) dx \right) \mathbf{q}_z,$$

або

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},$$

де

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_p \quad \mathbf{q}_z)^T,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ -\frac{EA}{a} & 0 & 0 & \frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Вектор вузлових навантажень одержимо по аналогії з попередніми. Для сталей $p_x = const$, $p_y = const$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{p_x a}{2} & \frac{p_y a}{2} & -\frac{p_y a^2}{12} & \frac{p_x a}{2} & \frac{p_y a}{2} & \frac{p_y a^2}{12} \end{pmatrix}^T. \quad (3.41)$$

3.1.5. Матриці жорсткості елементів у глобальних координатах

У розрахунку стержневих конструкцій необхідно будувати матриці жорсткості елементів із довільною орієнтацією по відношенню до глобальної системи координат. Глобальною будемо називати систему, загальну для всієї конструкції. На відміну від глобальної, локальні системи координат будуть пов'язані з кожним елементом. Одержані вище матриці жорсткості стержневих елементів записано у локальних координатах.

Розглянемо елемент стержня, який працює на розтяг-стиск, у глобальних координатах \bar{x} , \bar{y} (рис. 3.9).

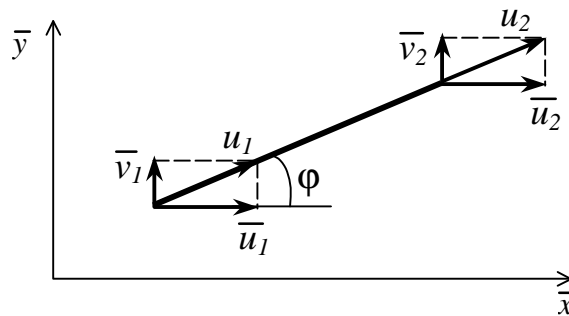


Рис. 3.9. Елемент стержня у глобальних координатах

Вектор вузлових переміщень у локальних координатах –

$$\mathbf{q} = (u_1 \ u_2)^T, \quad (3.42)$$

у глобальних –

$$\bar{\mathbf{q}} = (\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2)^T. \quad (3.43)$$

Очевидно, зв'язок між компонентами переміщень \mathbf{q} і $\bar{\mathbf{q}}$ є таким:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & 0 \\ t_{x\bar{y}} & 0 \\ 0 & t_{x\bar{x}} \\ 0 & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}}, \quad (3.44)$$

де

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{y\bar{x}} & t_{y\bar{y}} \end{bmatrix}, \quad t_{x\bar{x}} = \cos(x\bar{x}), \quad t_{x\bar{y}} = \cos(x\bar{y}). \quad (3.45)$$

Вузлові сили пов'язані аналогічними співвідношеннями

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{F}}. \quad (3.46)$$

Запишемо залежності між вузловими силами і переміщеннями у двох системах координат

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}}. \quad (3.47)$$

З урахуванням (3.44), (3.47) матрицю жорсткості можна записати так:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}. \quad (3.48)$$

Розглянемо елемент стержня з шістьма ступенями вільності при деформуванні його у площині $\bar{x}O\bar{y}$ (рис. (3.10)).

Вектор вузлових переміщень у локальних координатах

$$\mathbf{q} = (u_1 \ v_1 \ \vartheta_1 \ u_2 \ v_2 \ \vartheta_2)^T. \quad (3.49)$$

Вектор вузлових переміщень у глобальних координатах

$$\bar{\mathbf{q}} = (\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{\vartheta}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{\vartheta}_2)^T. \quad (3.50)$$

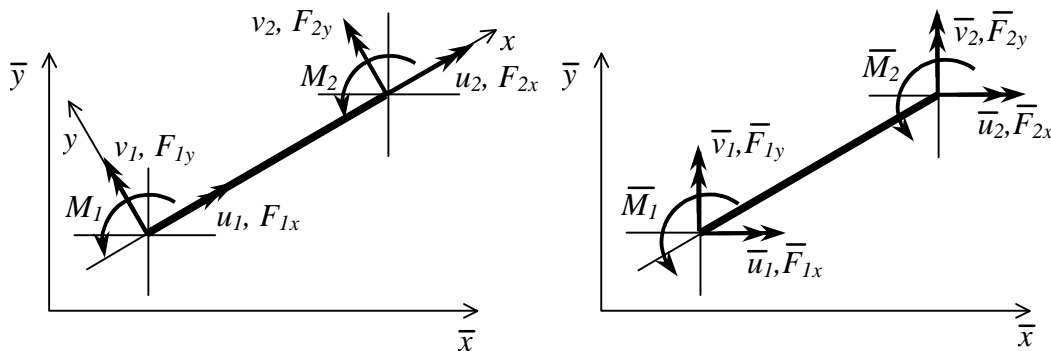


Рис. 3.10. Вузлові переміщення

Встановимо зв'язок між цими векторами.

Складові переміщень пов'язані залежностями (рис. 3.11)

$$\bar{u} = u \cos(x\bar{x}) + v \cos(y\bar{x}), \quad \bar{v} = u \cos(x\bar{y}) + v \cos(y\bar{y}). \quad (3.51)$$

З урахуванням уведених вище позначень одержимо

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Для вузлових переміщень

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \mathbf{q}. \quad (3.53)$$

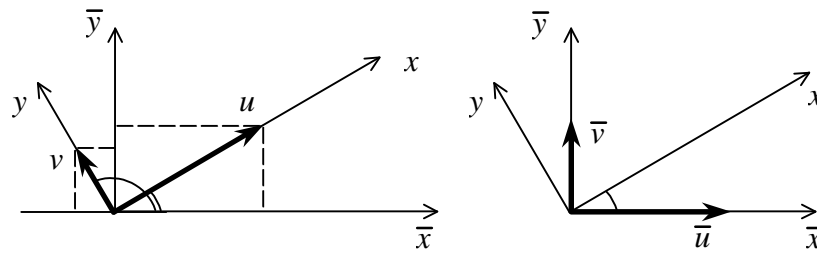


Рис. 3.11. Складові переміщень у глобальній і локальній системах координат

Матрицю, яка пов'язує вектори \mathbf{q} і $\bar{\mathbf{q}}$, можна записати у вигляді

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Якщо врахувати, що вузлові сили пов'язані такою ж залежністю, як і переміщення

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}\mathbf{F}, \quad (3.55)$$

для матриці жорсткості у глобальній системі матимемо такий вираз:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^T. \quad (3.56)$$

Цю залежність можна одержати, записуючи вираз для потенціальної енергії як квадратичної форми (3.10). Оскільки значення енергії не залежить від системи координат, маємо рівність

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}}.$$

Зробивши заміну $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\mathbf{q}$, одержимо

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{q}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}.$$

Якщо врахувати, що обернену залежність між $\bar{\mathbf{q}}$ і \mathbf{q} можна записати у вигляді

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{q}},$$

то залежність між матрицями $\bar{\mathbf{K}}$ і \mathbf{K} буде такою

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^T.$$

3.1.6. Елемент стержня, який працює на згин, розтяг-стиск і кручення

Елемент використовується при моделюванні просторових рам. Жорсткість на згин у площинах XOY і XOZ , відповідно, – EI_z, EI_y ; жорсткість на кручення – GI_k ; на розтяг – EA . На елемент діє навантаження $p_x(x), p_y(x), p_z(x)$ і $m_x(x)$.

Якщо задані зовнішні сили приведено до вузлів, то положення елемента визначається дванадцятьма вузловими переміщеннями: трьома поступальними у напрямках осей x, y, z і трьома кутовими навколо цих же осей (рис. 3.12, а, б).

Матрицю жорсткості елемента можна одержати, використовуючи одержані вище матриці для плоского згину, розтягу-стиску і кручення, розмістивши компоненти матриць у відповідності з прийнятою нумерацією компонент вектора переміщень.

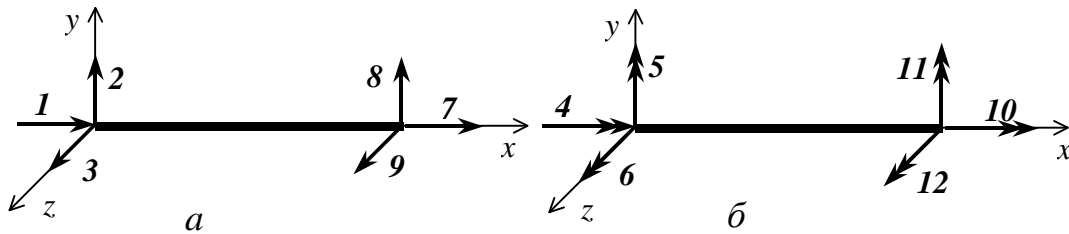


Рис. 3.12. Елемент стержня у загальному випадку дії сил

Ненульові компоненти матриці жорсткості, розмір якої у даному випадку 12×12 , будуть такими:

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} &= \frac{EA}{a}, & K_{1,7} &= -K_{1,1}, & K_{2,2} &= \frac{12EI_z}{l^3}, & K_{7,1} &= K_{1,7}, \\
 K_{2,6} &= \frac{6EI_z}{l^2}, & K_{2,8} &= -\frac{12EI_z}{l^3}, & K_{2,12} &= \frac{6EI_z}{l^2}, \\
 K_{6,2} &= K_{2,6}, & K_{8,2} &= K_{2,8}, & K_{12,2} &= K_{2,12}, \\
 K_{3,3} &= \frac{12EI_y}{l^3}, & K_{3,5} &= -\frac{6EI_y}{l^2}, & K_{5,3} &= K_{3,5}, \\
 K_{3,9} &= -\frac{12EI_y}{l^3}, & K_{9,3} &= K_{3,9}, & K_{3,11} &= -\frac{6EI_y}{l^2}, & K_{11,3} &= K_{3,11}, \\
 K_{4,4} &= \frac{GI_k}{l}, & K_{4,10} &= -\frac{GI_k}{l}, & K_{10,4} &= K_{4,10}, \\
 K_{5,5} &= \frac{4EI_y}{l}, & K_{5,9} &= \frac{6EI_y}{l^2}, & K_{9,5} &= K_{5,9}, & K_{5,11} &= \frac{2EI_y}{l^2}, \\
 K_{11,5} &= K_{5,11}, & K_{6,6} &= \frac{4EI_z}{l}, & K_{6,8} &= -\frac{6EI_z}{l^2}, & K_{8,6} &= K_{6,8},
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$K_{6,12} = \frac{2EI_z}{l^2}, \quad K_{12,6} = K_{6,12}, \quad K_{8,8} = K_{2,2},$$

$$K_{8,12} = K_{6,8}, \quad K_{9,9} = K_{3,3}, \quad K_{9,11} = K_{2,6}, \quad K_{11,9} = K_{9,11},$$

$$K_{12,8} = K_{8,12}, \quad K_{10,10} = K_{4,4}, \quad K_{11,11} = K_{5,5}, \quad K_{12,12} = K_{6,6}.$$

Якщо інтенсивності зовнішніх сил сталі

$$q_y = q_y^0, \quad q_z = q_z^0, \quad p(x) = p_0, \quad m_x(x) = m_0,$$

вектор еквівалентних вузлових сил матиме вигляд

$$\mathbf{p} = \left(\frac{p_0 a}{2} \quad \frac{q_y^0 a}{2} \quad \frac{q_z^0 a}{2} \quad \frac{m_0 a}{2} \quad -\frac{q_z^0 a^2}{12} \quad \frac{q_y^0 a^2}{12} \quad \frac{p_0 a}{2} \quad \frac{q_y^0 a}{2} \quad \frac{q_z^0 a}{2} \quad \frac{m_0 a}{2} \quad \frac{q_z^0 a^2}{12} \quad \frac{q_y^0 a^2}{12} \right)^T. \quad (3.58)$$

Якщо інтенсивності зовнішніх навантажень змінюються за лінійним законом

$$q_y = q_y^0 \frac{x}{a}, \quad q_z = q_z^0 \frac{x}{a}, \quad p(x) = p_0 \frac{x}{a}, \quad m_x(x) = m_0 \frac{x}{a},$$

вектор еквівалентних навантажень буде таким [35]:

$$\mathbf{p} = \left(\frac{p_0 a}{6} \quad \frac{3q_y^0 a}{20} \quad \frac{3q_z^0 a}{20} \quad \frac{m_0 a}{6} \quad -\frac{q_z^0 a^2}{30} \quad \frac{q_y^0 a^2}{30} \quad \frac{p_0 a}{3} \quad \frac{7q_y^0 a}{20} \quad \frac{7q_z^0 a}{20} \quad \frac{m_0 a}{3} \quad \frac{q_z^0 a^2}{20} \quad \frac{q_y^0 a^2}{20} \right)$$

Залежність (3.56) можна записати і для випадку, коли стержень працює на згин у двох площинах, розтяг і кручення. У цьому випадку в кожній вузловій точці буде шість ступенів вільності, і матриця жорсткості матиме розмір 12×12 . Матрицю повороту складають з блоків

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & t_{z\bar{x}} \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & t_{z\bar{y}} \\ t_{x\bar{z}} & t_{y\bar{z}} & t_{z\bar{z}} \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

де направляючі косинуси t визначають положення осей локальної системи координат x, y, z відносно глобальної $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

$$t_{x\bar{x}} = \cos(x, \bar{x}), \quad t_{x\bar{y}} = \cos(x, \bar{y}), \quad t_{x\bar{z}} = \cos(x, \bar{z}) \text{ і т. д.} \quad (3.61)$$

Вектори переміщень у локальній і глобальній системах координат (рис. 3.13)

$$\mathbf{q} = \left(u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \vartheta_{1x} \quad \vartheta_{1y} \quad \vartheta_{1z} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \vartheta_{2x} \quad \vartheta_{2y} \quad \vartheta_{2z} \right)^T, \quad (3.62)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \left(\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\vartheta}_{1x} \quad \bar{\vartheta}_{1y} \quad \bar{\vartheta}_{1z} \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\vartheta}_{2x} \quad \bar{\vartheta}_{2y} \quad \bar{\vartheta}_{2z} \right)^T.$$

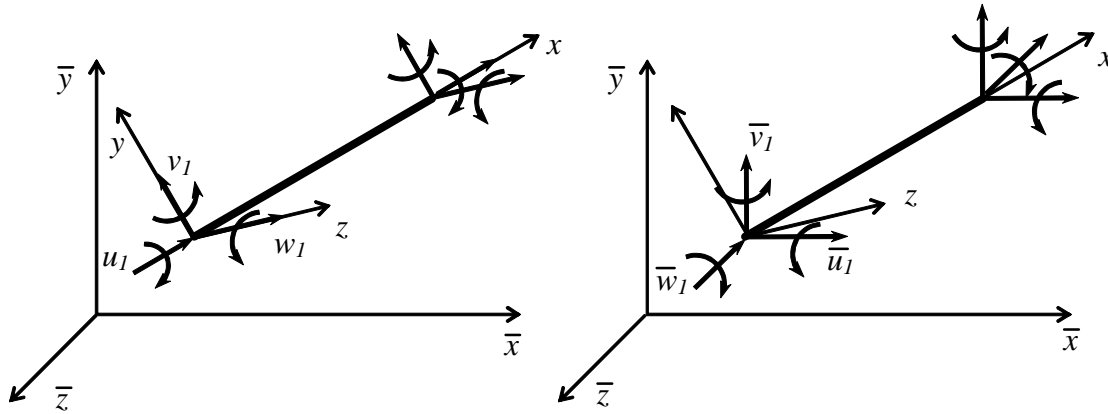


Рис. 3.13. Елемент стержня у глобальних координатах

Вони пов'язані залежністю (3.44), де матриця повороту

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Матриця жорсткості у глобальній системі координат визначається згідно з (3.56).

Значення направляючих косинусів для елемента стержня можна знайти через координати кінців елемента у глобальній системі координат

$$t_{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{a}, \quad t_{x\bar{y}} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{a}, \quad t_{x\bar{z}} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{a},$$

$$a = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}. \quad (3.64)$$

Інші шість направляючих косинусів у матриці визначаються із співвідношень [35]

$$\begin{aligned} t_{y\bar{x}}^2 + t_{y\bar{y}}^2 + t_{y\bar{z}}^2 &= 1, \\ t_{z\bar{x}}^2 + t_{z\bar{y}}^2 + t_{z\bar{z}}^2 &= 1, \\ t_{x\bar{x}}t_{y\bar{x}} + t_{x\bar{y}}t_{y\bar{y}} + t_{x\bar{z}}t_{y\bar{z}} &= 0, \\ t_{x\bar{x}}t_{z\bar{x}} + t_{x\bar{y}}t_{z\bar{y}} + t_{x\bar{z}}t_{z\bar{z}} &= 0, \\ t_{z\bar{y}} &= \cos\beta, \quad t_{y\bar{y}} = \cos\gamma. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Кути β, γ позначають положення головних осей площі поперечного перерізу (рис. 3.14). Іноді зручніше визначити направляючі косинуси за координатами трьох характерних точок – початку стержня $O_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, кінця $O_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ і точки $O_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$, яка лежить в одній із головних площин перерізу [30].

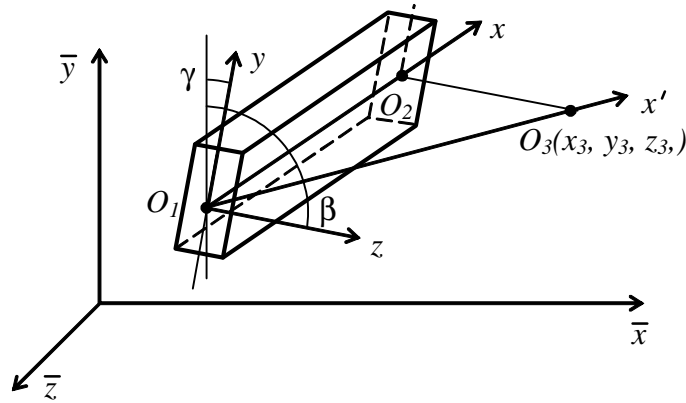


Рис. 3.14. Положення елемента стержня у глобальній системі координат

Направляючі косинуси відрізка O_1O_2

$$t_{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{a}, \quad t_{y\bar{x}} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{a}, \quad t_{z\bar{x}} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{a},$$

$$a = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}.$$

Направляючі косинуси відрізка O_1O_3

$$t'_{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_1}{a}, \quad t'_{y\bar{x}} = \frac{\bar{y}_3 - \bar{y}_1}{a}, \quad t'_{z\bar{x}} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{a},$$

$$a_1 = \sqrt{(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_3 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)^2}.$$

Направляючі косинуси осі $O_1\bar{y}$, перпендикулярної до головної площини $O_1O_2O_3$, визначаємо з умови

$$t_{x\bar{y}} = \frac{ax}{b}, \quad t_{y\bar{y}} = \frac{ay_1}{b}, \quad t_{z\bar{y}} = \frac{az}{b},$$

$$b = \sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2},$$

$$ax = t'_{y\bar{x}}t_{z\bar{x}} - t'_{z\bar{x}}t_{y\bar{x}}, \quad ay = t'_{z\bar{x}}t_{x\bar{x}} - t'_{x\bar{x}}t_{z\bar{x}}, \quad az = t'_{x\bar{x}}t_{y\bar{x}} - t'_{y\bar{x}}t_{x\bar{x}},$$

$$t_{x\bar{z}} = t_{y\bar{x}}t_{z\bar{y}} - t_{z\bar{x}}t_{y\bar{y}}, \quad t_{y\bar{z}} = t_{z\bar{x}}t_{x\bar{y}} - t_{x\bar{x}}t_{z\bar{y}}, \quad t_{z\bar{z}} = t_{x\bar{x}}t_{y\bar{y}} - t_{y\bar{x}}t_{x\bar{y}},$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & t_{x\bar{z}} \\ t_{y\bar{x}} & t_{y\bar{y}} & t_{y\bar{z}} \\ t_{z\bar{x}} & t_{z\bar{y}} & t_{z\bar{z}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t & & \\ & t & \\ & & t \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{TKT}^T. \quad (3.66)$$

3.2. Синтез скінченно-елементних моделей стержневих конструкцій

Після того, як конструкцію розділено на окремі скінченні елементи, і для кожного з них знайдено матриці жорсткості та вектори вузлових навантажень, тобто одержано залежності

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{F}_e, \quad (3.67)$$

усі елементи необхідно пов'язати в єдину конструкцію. Оскільки кожен вузол перебуває у рівновазі під дією сил, що сходяться у цьому вузлі (враховуючи і зовнішнє навантаження), то необхідні рівняння зв'язку можна було б одержати, записавши умови рівноваги кожного вузла. Очевидно, до цих рівнянь, як невідомі, входять переміщення вузлів.

На практиці застосування рівнянь рівноваги вузлів для визначення залежностей між переміщеннями і зовнішніми навантаженнями (внутрішні сили за допомогою матриць жорсткості кожного елемента виключаються з рівнянь) приводить до громіздких перетворень і ускладнює процес програмування. Рациональнішою є методика, основана на прирівнюванні у кожному вузлі переміщень елементів, які в цьому вузлі з'єднуються. Для цього в кожному вузлі позначають і нумерують ненульові переміщення у додатних напрямках глобальних осей координат. Після цього записують умови рівності глобальних переміщень, що пронумеровані, і локальних для кожного елемента.

Розглянемо побудову глобальної матриці жорсткості на прикладі скінченно-елементної моделі стержня (рис. 3.15, а-в).

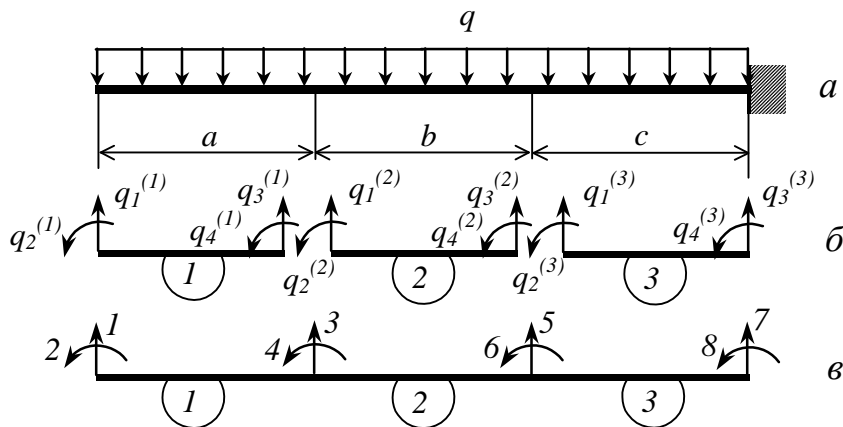


Рис. 3.15. Скінченно-елементна модель стержня

Нумерацію для окремих елементів (локальну) показано на рис. 3.15, б, а глобальну – на рис. 3.15, в. Порівнюючи локальні і глобальні номери, одержимо

$$\begin{aligned}
 q_1^{(1)} &= q_1, & q_2^{(1)} &= q_2, & q_3^{(1)} &= q_3, & q_4^{(1)} &= q_4, \\
 q_1^{(2)} &= q_3, & q_2^{(2)} &= q_4, & q_3^{(2)} &= q_5, & q_4^{(2)} &= q_5, \\
 q_1^{(3)} &= q_5, & q_2^{(3)} &= q_6, & q_3^{(3)} &= 0, & q_4^{(3)} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.68}$$

Ці залежності можна записати для кожного елемента у вигляді

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{q}, \tag{3.69}$$

де \mathbf{q} – вектор глобальних переміщень системи;

\mathbf{q}_i – вектор локальних переміщень;

\mathbf{T}_i – матриця переходу для i -го елемента.

У даному випадку

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ q_3^{(1)} \\ q_4^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{q}, \\
 \begin{pmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ q_3^{(2)} \\ q_4^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \mathbf{q}, \\
 \begin{pmatrix} q_1^{(3)} \\ q_2^{(3)} \\ q_3^{(3)} \\ q_4^{(3)} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3 \mathbf{q}.
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Матрицю жорсткості і вектор вузлових навантажень балки одержимо у вигляді

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^T \mathbf{F}_i. \tag{3.71}$$

Схематично цю операцію показано на рис. 3.16.

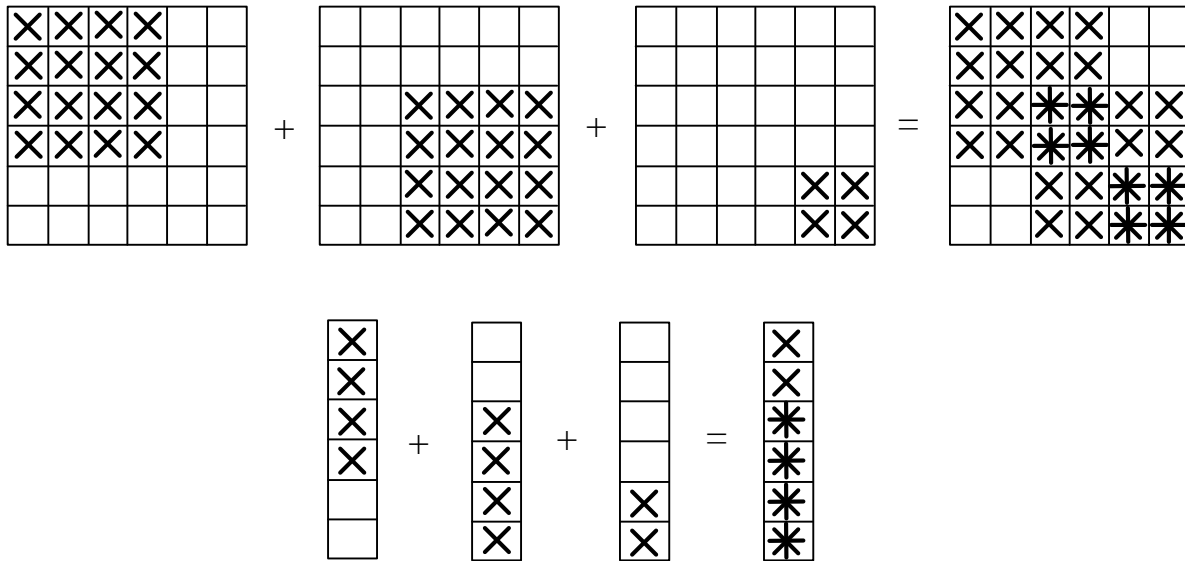


Рис. 3.16. Схема синтезу матриці жорсткості

Недоліком такого варіанту синтезу, є необхідність перемноження і додавання нульових елементів у (3.71). Більш раціональним є метод, який використовує матрицю індексів [28]. У даному випадку вона має вигляд

Таблиця 3.1

Матриця індексів

№ елементів	Локальні переміщення елемента			
	1	2	3	4
	Глобальні переміщення			
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	0	0

Згідно з цією таблицею індекси визначаються через локальні індекси даного елемента такими залежностями:

$$IG = mi(IL, NE), \quad JG = mi(JL, NE), \quad (3.72)$$

де IG – глобальний номер рядка матриці mi ;

JG – глобальний номер стовпця матриці mi ;

IL – локальний номер рядка матриці жорсткості елемента;

JL – локальний номер стовпця матриці жорсткості елемента

NE – номер елемента.

Компоненти матриць з однаковими глобальними індексами додаються. У даному випадку маємо

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{11}^{(1)}, & K_{12} &= K_{12}^{(1)}, & K_{22} &= K_{22}^{(1)}, & K_{21} &= K_{21}^{(1)}, \\
 K_{13} &= K_{13}^{(1)}, & K_{14} &= K_{14}^{(1)}, & K_{23} &= K_{23}^{(1)}, & K_{24} &= K_{24}^{(1)}, \\
 K_{33} &= K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)}, & K_{34} &= K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)}, & K_{44} &= K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)}, & & (3.73) \\
 K_{43} &= K_{34}, & K_{35} &= K_{13}^{(2)}, & K_{36} &= K_{14}^{(2)}, & K_{45} &= K_{23}^{(2)}, \\
 K_{46} &= K_{24}^{(2)}, & K_{56} &= K_{34}^{(2)} + K_{12}^{(3)}, & K_{65} &= K_{56}, & K_{66} &= K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)}, \\
 F_1 &= F_1^{(1)}, & F_2 &= K_2^{(1)}, & F_3 &= F_3^{(1)} + F_1^{(2)}, & F_4 &= F_4^{(1)} + F_2^{(2)}, \\
 F_5 &= F_3^{(2)} + F_1^{(3)}, & F_6 &= F_4^{(2)} + F_2^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Операція перейменування індексів і синтезу глобальної матриці жорсткості дуже легко програмується. У системі MathCAD це можна зробити одним рядком

$$\mathbf{K}_{\mathbf{mi}_{i,j}, \mathbf{mi}_{i,k}} := \mathbf{K}_{\mathbf{mi}_{i,j}, \mathbf{mi}_{i,k}} + \mathbf{Ke}(i)_{j,k}, \quad (3.74)$$

де \mathbf{mi} – матриця індексів

$$\mathbf{mi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

i – кількість елементів;

j, k – кількість локальних переміщень в одному елементі;

$\mathbf{Ke}(i)$ – матриця жорсткості i -го елемента.

Для вектора сил

$$\mathbf{F}_{\mathbf{mi}_{i,j}} = \mathbf{F}_{\mathbf{mi}_{i,j}} + \mathbf{Fe}(i)_j. \quad (3.75)$$

Система алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих переміщень буде такою

$$\mathbf{K}_{8 \times 8} \mathbf{q} = \mathbf{F}_{8 \times 1}. \quad (3.76)$$

Матриці \mathbf{K} , \mathbf{F} , \mathbf{q} у (3.76) вміщують компоненти, пов'язані з нульовими переміщеннями q_7 і q_8 . Для того, щоб урахувати граничні умови $q_7 = 0$ і $q_8 = 0$, достатньо викреслити в цих матрицях відповідні стовпці й рядки, після чого матимемо

$$\mathbf{K}_r \mathbf{q}_r = \mathbf{F}_r. \quad (3.77)$$

$6 \times 6 \qquad 6 \times 1$

Розв'язок цього рівняння дасть переміщення вузлів балки

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (3.78)$$

3.3. Алгоритм використання методу скінченних елементів для аналізу стержневих систем

Послідовність визначення переміщень і напружень у стержневих системах за допомогою МСЕ (алгоритм МСЕ) буде такою:

1) Систему розбивають на скінченні елементи, для яких можна знайти залежності між зусиллями у вузлах \mathbf{F}_i і вузловими переміщеннями \mathbf{q}_i у формі

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{q}_i,$$

де \mathbf{K}_i – матриця жорсткості i -го скінченного елемента. Щоб побудувати це співвідношення, можна скористатись бібліотекою скінченних елементів, де наводяться відповідні матриці жорсткості. Для елементів, відсутніх у довідниках, матриці жорсткості будують згідно з наведеною вище методикою, записуючи квадратичну форму потенціальної енергії деформації для елемента.

2) Нумерують вузли системи і переміщення у вузлах. Послідовність нумерації значною мірою впливає на структуру матриці жорсткості системи, що, в свою чергу, впливає на трудомісткість розв'язку системи рівнянь МСЕ. Найпростіша рекомендація тут така: нумерація має бути такою, щоб найбільша різниця між номерами переміщень у сусідніх вузлах була мінімальною.

3) Складають матриці топології та індексів. Перша вказує на положення кожного елемента у скінченно-елементній моделі конструкції, друга дає співвідношення між локальними номерами переміщень вузлів кожного елемента і глобальними номерами скінченно-елементної моделі. У багатьох випадках топологічної матриці виявляється достатньо для побудови і матриці індексів.

4) Складають матрицю жорсткості системи та матрицю зовнішніх навантажень. Для стержневих систем у багатьох випадках виявляються відомими зовнішні сили, діючі у вузлах, що полегшує складання вектора зовнішніх сил. Якщо сили діють не у вузлах, то можна виконати звичайну операцію приведення їх до вузлів. При побудові матриці жорсткості одночасно вирішується проблема врахування умов закріплення за однією з методик, наведених вище.

5) Знаходять розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}.$$

У програмах МСЕ, як правило, не використовують операцію визначення оберненої матриці \mathbf{K}^{-1} , а шукають розв'язок, використовуючи метод Гауса та аналогічні йому методи.

б) Одержаний вектор переміщень вузлів використовують, при необхідності, для визначення інших параметрів і зусиль у вузлах, напружень тощо.

Далі наводяться приклади розрахунку стержневих систем конструкцій за допомогою математичного пакета MathCAD. Особливістю цього пакета є те, що усі операції проводяться в явній формі, практично без кодування, за винятком окремих випадків, де використовуються вбудовані функції пакета.

3.4. Приклади розрахунку стержневих систем

Приклад 3.1. Визначити внутрішні сили й переміщення у статично-невизначуваному стержні (рис. 3.17).

Площі поперечного перерізу на ділянках: $A_1 = 0.01 \text{ м}^2$, $A_2 = 0.02 \text{ м}^2$, $A_3 = 0.03 \text{ м}^2$, $A_4 = 0.04 \text{ м}^2$; діючі сили $F_1 = 20 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$, $F_3 = 20 \text{ кН}$; модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$, довжини ділянок: $l_i = 1 \text{ м}$, ($i = 1, 2, 3, 4$).

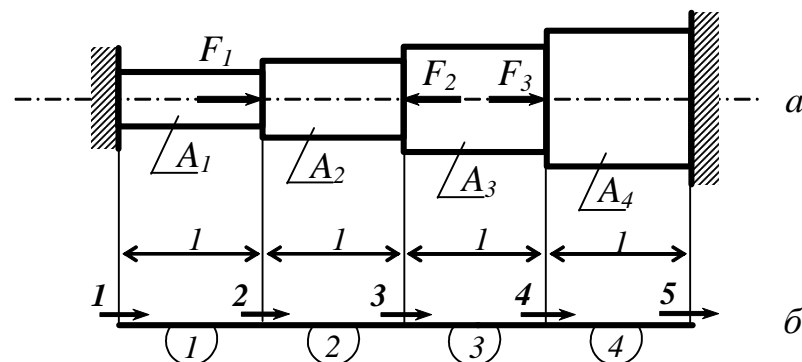


Рис. 3.17. Статично-невизначуваний стержень; схема стержня (а), скінченно-елементна модель (б)

Внесення вхідних даних

Кількість скінченних елементів: $ne := 4$ $i := 1..4$

$E := 2 \cdot 10^8$ $A1 := 0.01$ $A2 := 0.02$ $A3 := 0.03$ $A4 := 0.04$ $L := 1$

$E_i :=$ $A_i :=$ $L_i :=$

E	A1	L
E	A2	L
E	A3	L
E	A4	L

Матриця жорсткості елемента, який працює на розтяг-стиск

$$Kel(i) := E_i \cdot \frac{A_i}{L_i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості скінченно-елементної моделі стержня

$j := 1..2$ - кількість ступенів вільності в елементі

$k := 1..2$

$$KK_{5,5} := 0$$

$$KK_{mi_i,j,mi_i,k} := KK_{mi_i,j,mi_i,k} + Kel(i)_{j,k}$$

$$KK = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 & -2 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \times 10^6 & 6 \times 10^6 & -4 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 \times 10^6 & 1 \times 10^7 & -6 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \times 10^6 & 1.4 \times 10^7 & -8 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \times 10^6 & 8 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Для врахування умов закріплення стержня необхідно вилучити з матриці жорсткості стержня перші і п'яті рядки і стовпці.

$$mr := 2 \ 3 \ 4^T \quad m := 1..3 \quad n := 1..3 \quad KK0_{m,n} := KK_{mr_m,mr_n}$$

$$KK0 = \begin{pmatrix} 6 \times 10^6 & -4 \times 10^6 & 0 \\ -4 \times 10^6 & 1 \times 10^7 & -6 \times 10^6 \\ 0 & -6 \times 10^6 & 1.4 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Вектор зовнішніх навантажень

$$F := \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Розв'язок рівняння рівноваги відносно невідомих переміщень вузлів

$$U := \text{if}(|KK0|, KK0^{-1} \cdot F, 0)$$

$$U = \begin{pmatrix} 3.6 \times 10^{-6} \\ 4 \times 10^{-7} \\ 1.6 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad \text{Повна матриця переміщень: } UA := \begin{pmatrix} 0 \\ 3.6 \cdot 10^{-6} \\ 4 \cdot 10^{-7} \\ 1.6 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Визначення усіх вузлових сил, у тому числі і реакцій

$$R := KK \cdot UA$$

$$R = \begin{pmatrix} -7.2 \\ 20 \\ -20 \\ 20 \\ -12.8 \end{pmatrix}$$

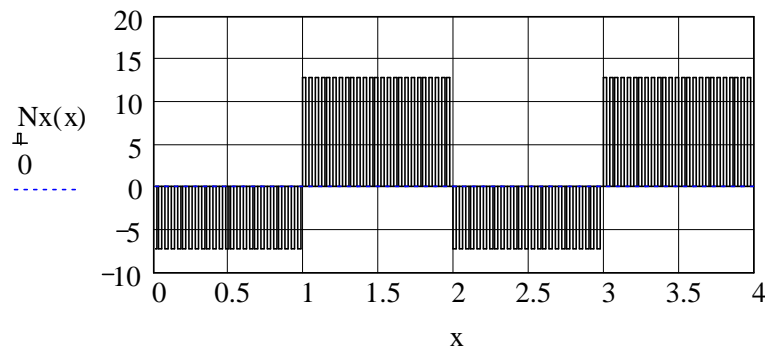
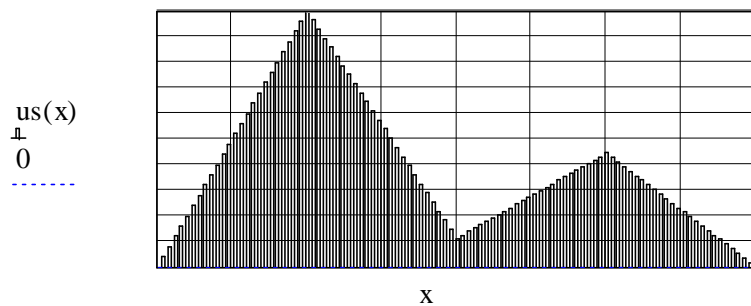
Побудова графіків сил і переміщень у перерізах стержня

$$l := 1..5 \quad a_1 := 0 \quad a_2 := L_1 \quad a_3 := L_1 + L_2$$

$$a_4 := a_3 + L_3 \quad a_5 := a_4 + L_4 \quad Ls := \sum_i L_i$$

$$x := 0, 0.01 \cdot Ls .. Ls \quad N_x(x) := \sum_1 R_i \cdot \Phi(x - a_i)$$

$$vx := (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5)^T \quad us(x) := \text{linterp}(vx, UA, x)$$



Епюри переміщень і внутрішніх сил

Визначимо сили, діючі у кожному елементі

$$u^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \end{pmatrix} \quad u^{(2)} := \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad u^{(3)} := \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad u^{(4)} := \begin{pmatrix} U_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p(i) := Kel(i) \cdot u^{(i)}$$

$$p(1) = \begin{pmatrix} -7.2 \\ 7.2 \end{pmatrix} \quad p(2) = \begin{pmatrix} 12.8 \\ -12.8 \end{pmatrix} \quad p(3) = \begin{pmatrix} -7.2 \\ 7.2 \end{pmatrix} \quad p(4) = \begin{pmatrix} 12.8 \\ -12.8 \end{pmatrix}$$

Приклад 3.2. Визначити сили і переміщення поперечних перерізів для стержня (рис. 3.18).

Площа поперечного перерізу $A = 0.01 \text{ м}^2$; діючі сили (кН): $P_1 = 20$, $P_2 = 30$, $P_3 = 40$, $P_4 = 50$, $q = 20 \text{ кН/м}^2$; модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$; довжини ділянок: $l = 1 \text{ м}$.

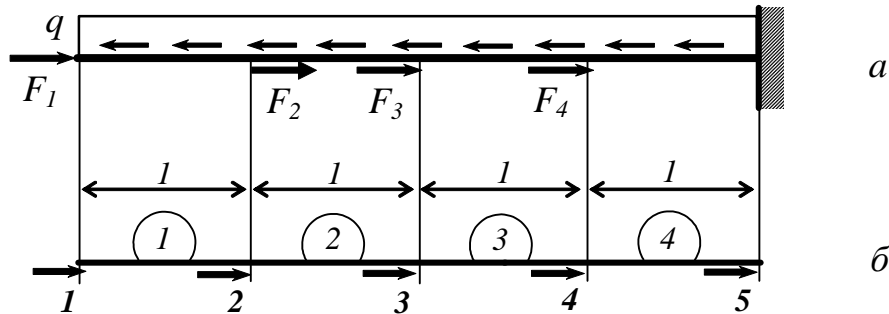


Рис. 3.18. Статично-визначуваний стержень, навантажений поздовжніми силами: схема стержня (а), скінченно-елементна модель (б)

Вхідні дані: $l := 1$ $E := 2 \cdot 10^8$ $A := 0.01$ $q := 20$
 $P_1 := 20$ $P_2 := 30$ $P_4 := 40$ $P_3 := 50$

Кількість скінченних елементів: $ii := 1..4$

Матриця жорсткості елемента, який працює на розтяг-стиск

$$Kel(ii) := E \cdot \frac{A}{l} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця індексів $mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$

$i := 1..4$ $k := 1..2$ $j := 1..2$ $KK_{5,5} := 0$

$$KK_{mi_i,j,mi_i,k} := KK_{mi_i,j,mi_i,k} + Kel(i)_{j,k}$$

Для врахування умов закріплення стержня необхідно вилучити з матриці жорсткості стержня п'яті рядок і стовпець. Це можна зробити за допомогою функції **submatrix**.

$$KR := \text{submatrix}(K, 1, 4, 1, 4)$$

$$KR = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 & -2 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 & -2 \times 10^6 & 0 \\ 0 & -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 & -2 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Вектор зовнішніх сил з урахуванням приведеного навантаження

$$F := \left[\left(20 - q \cdot \frac{1}{2} \right) \quad (30 - q \cdot 1) \quad (-40 - q \cdot 1) \quad (50 - q \cdot 1) \right]^T$$

Розв'язок рівняння рівноваги відносно невідомих переміщень вузлів

$$U := \text{if}(|KR|, KR^{-1} \cdot F, 0)$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-5} \\ -1.5 \times 10^{-5} \\ -2.5 \times 10^{-5} \\ -5 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Повна матриця переміщень:

$$UA := \text{stack}(U, 0) \quad UA = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-5} \\ -1.5 \times 10^{-5} \\ -2.5 \times 10^{-5} \\ -5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

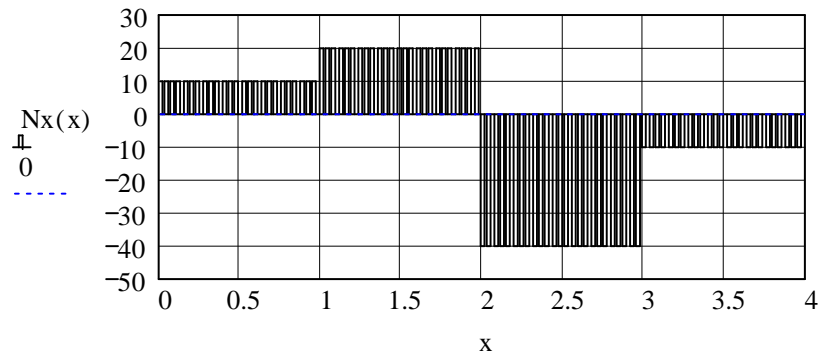
Визначення усіх вузлових сил, у тому числі і реакції

$$R := K \cdot UA \quad R = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

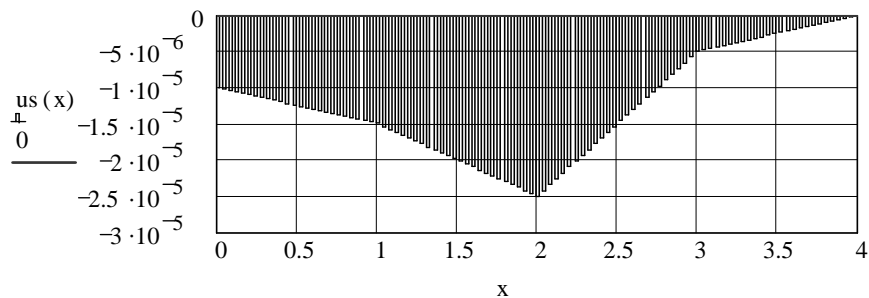
Побудова графіків сил і переміщень у перерізах стержня $j := 1..5$

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x := 0, 0.01 \cdot 4 \cdot 1..4 \cdot 1$$

$$N_x(x) := \sum_j R_j \cdot \Phi(x - a_j)$$



$$v_x := (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5)^T \quad u_s(x) := \text{linterp}(v_x, UA, x)$$



Епюри поздовжніх сил і переміщень

Одержані результати є наближеними. Їх можна уточнити, розділивши стержень на більшу кількість елементів. Візьмемо кількість елементів замість 4-х рівною 16.

Виконаємо ті ж самі операції, але за допомогою програмного модуля.

$$m_i := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}^T$$

Компоненти матриці навантажень

$$\begin{aligned} F_1 &:= P1 - q \cdot \frac{1}{8} & F_{13} &:= P4 - q \cdot \frac{1}{4} & F_2 &:= -q \cdot \frac{1}{4} & F_3 &:= -q \cdot \frac{1}{4} & F_4 &:= -q \cdot \frac{1}{4} \\ F_5 &:= P2 - q \cdot \frac{1}{4} & F_6 &:= -q \cdot \frac{1}{4} & F_7 &:= -q \cdot \frac{1}{4} & F_8 &:= -q \cdot \frac{1}{4} & F_9 &:= -P3 - q \cdot \frac{1}{4} \\ F_{10} &:= -q \cdot \frac{1}{4} & F_{12} &:= F_{10} & F_{14} &:= F_{10} & F_{15} &:= F_{10} & F_{16} &:= F_{10} & F_{11} &:= F_{10} \end{aligned}$$

Підпрограма-функція для визначення компонент матриць жорсткості і навантажень

```
UR := | ne ← 16
      | K17,17 ← 0
      | ii ← 1
      | while ii < ne + 1
      |   | Ke ←  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} E \cdot \frac{A \cdot 4}{1}$ 
      |   | for il ∈ 1..2
      |   |   | ig ← mi,il
      |   |   | for jl ∈ 1..2
      |   |   |   | jg ← mi,jl
      |   |   |   | Kig,jg ← Kig,jg + Keil,jl
      |   |   | ii ← ii + 1
      |   | K
      |   | KR ← submatrix(K, 1, 16, 1, 16)
      |   | U ← KR-1 · F
      |   | UA ← stack(U, 0)
      |   | R ← K · UA
      |   | (UA R)
```

Переміщення вузлів uu := UR_{1,1}

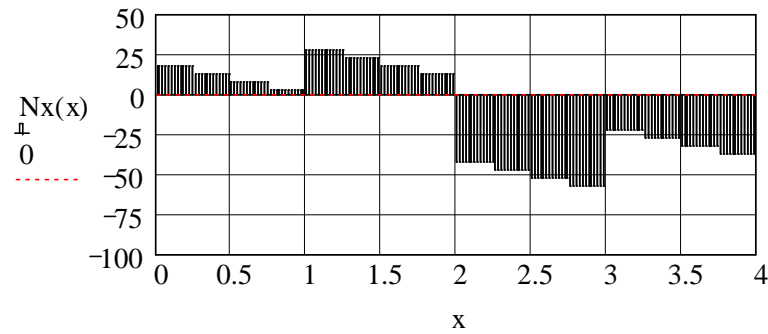
Сили у вузлах rr := UR_{1,2}

$$ld := \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16)^T$$

Побудова графіків внутрішніх сил і переміщень поперечних перерізів

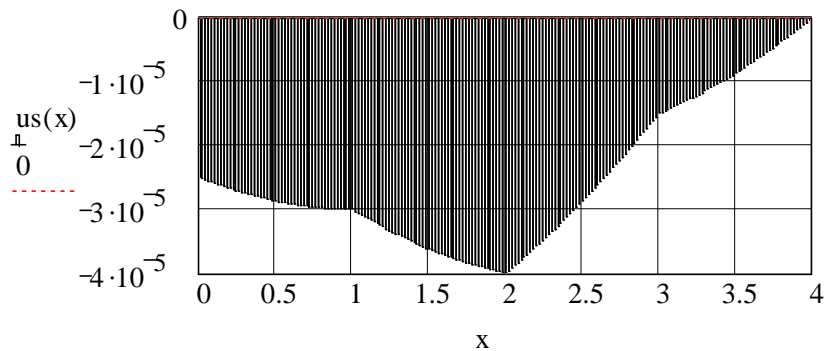
$$x := 0, 0.005 \cdot 4 \cdot 1 .. 4 \cdot 1 \quad k := 1 .. 17$$

$$N_x(x) := \sum_k \pi_k \cdot \Phi(x - ld_k)$$



Епюра внутрішніх сил

$$vx := ld \quad us(x) := \text{linterp}(vx, uu, x)$$



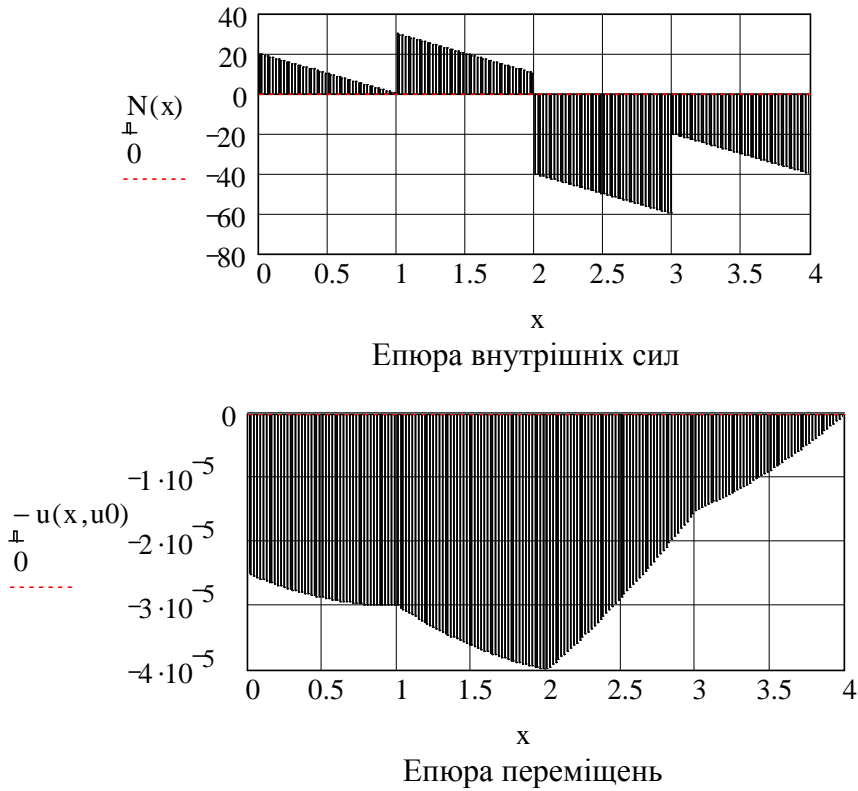
Епюра переміщень

Як видно з порівняння епюр, збільшення кількості елементів наближає результати до дійсних. Дійсні епюри мають такий вигляд:

$$N(x) := P1 \cdot \Phi(x) - q \cdot x \cdot \Phi(x) + q \cdot (x - 4 \cdot 1) \cdot \Phi(x - 4 \cdot 1) + P2 \cdot \Phi(x - 1) \dots + -P3 \cdot \Phi(x - 2) + P4 \cdot \Phi(x - 3)$$

$$u(x, u0) := \left[\begin{array}{l} P1 \cdot x \cdot \Phi(x) - \left(\frac{qx^2}{2}\right) \cdot \Phi(x) + \left[q \cdot \frac{(x - 4 \cdot 1)^2}{2} \right] \cdot \Phi(x - 4 \cdot 1) \dots \\ + P2 \cdot (x - 1) \cdot \Phi(x - 1) - P3 \cdot (x - 2) \cdot \Phi(x - 2) \dots \\ + P4 \cdot (x - 3) \cdot \Phi(x - 3) + u0 \cdot E \cdot A \dots \\ + u0 \cdot E \cdot A \end{array} \right] \cdot \frac{1}{E \cdot A}$$

$$u0 := 0 \quad \text{Given} \quad u(4 \cdot 1, u0) = 0 \quad u0 := \text{Find}(u0) \quad u0 = 1.25 \times 10^{-5}$$



Як видно, при 16-ти елементах метод скінченних елементів дає близький до дійсного розв'язок для переміщень, але розв'язок для сил потребує більшої кількості скінченних елементів.

Приклад 3.3. Визначити прогини і внутрішні сили у статично-невизначуваній балці (рис. 3.19).

Модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; довжини ділянок $l = 2 \text{ м}$; момент інерції площі поперечного перерізу $I = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; навантаження: $M = 20 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $F = 20 \cdot 10^3 \text{ Н}$, $q = 20 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$.

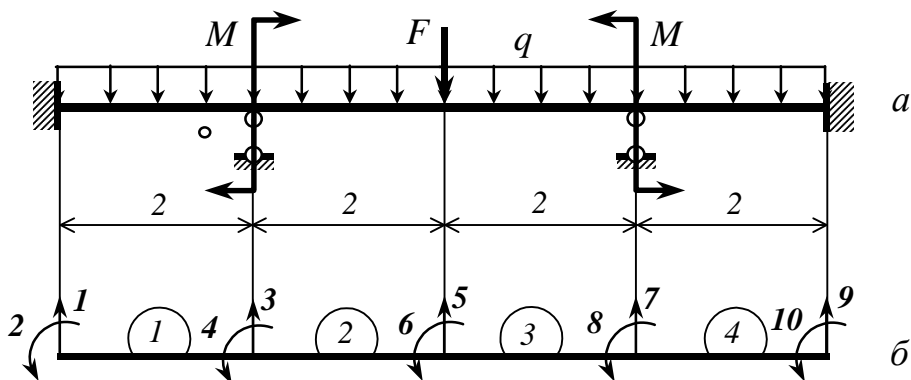


Рис. 3.19. Статично-невизначувана балка: схема стержня (а), скінченно-елементна модель (б)

Вхідні дані:

$$I := 2 \cdot 10^{-4} \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad M := 20 \cdot 10^3 \text{ (Нм)}$$

$$F := 20 \cdot 10^3 \text{ (Н)} \quad q := 20 \cdot 10^3 \text{ (Н/м)}$$

Розбиваємо балку на чотири скінченних елементи.

$$ke := 4 \quad i := 1..4 \quad l_i :=$$

Довжина балки 8 метрів, довжина кожного елемента 2 метри.

2
2
2
2

Матриця жорсткості елемента балки, який працює на згин.

$$Kel(i) := \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{l_i}$$

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості балки.

$$K := \left(\begin{array}{l} K_{10,10} \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i < 5 \\ \quad Ke \leftarrow Kel(i) \\ \quad \text{for } il \in 1..4 \\ \quad \quad ig \leftarrow mi_{i,il} \\ \quad \quad \text{for } jl \in 1..4 \\ \quad \quad \quad jg \leftarrow mi_{i,jl} \\ \quad \quad \quad K_{ig,jg} \leftarrow K_{ig,jg} + Kel(i)_{il,jl} \\ \quad i \leftarrow i + 1 \\ K \end{array} \right)$$

Умови закріплення: $u_1 := 0 \quad u_2 := 0 \quad u_3 := 0 \quad u_7 := 0 \quad u_9 := 0 \quad u_{10} := 0$

У відповідності з умовами закріплення, з матриці K треба вилучити такі рядки і стовпці: 1, 2, 3, 7, 9, 10.

$$m := 1..4 \quad n := 1..4 \quad mr := (4 \ 5 \ 6 \ 8)$$

Редуційована матриця жорсткості:

$$KR_{m,n} := K_{(mr_1,m, mr_1,n)}$$

$$KR = \begin{pmatrix} 1.6 \times 10^8 & -6 \times 10^7 & 4 \times 10^7 & 0 \\ -6 \times 10^7 & 1.2 \times 10^8 & 0 & 6 \times 10^7 \\ 4 \times 10^7 & 0 & 1.6 \times 10^8 & 4 \times 10^7 \\ 0 & 6 \times 10^7 & 4 \times 10^7 & 1.6 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

При визначенні компонент матриці вузлових сил використовується операція приведення розподілених сил до вузлів у відповідності з відомою методикою. Для визначення приведених сил у вузлах кожного елемента необхідно розглянути його як балку, жорстко закріплену на кінцях, і визначити реакції в закріпленнях.

Ці реакції, взяті з протилежними знаками, і є приведеними вузловими силами.

$$PR := [-M \quad -(q \cdot l_2 + F) \quad 0 \quad M]^T \quad PR = \begin{pmatrix} -2 \times 10^4 \\ -6 \times 10^4 \\ 0 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Визначення невідомих ненульових переміщень вузлів

$$UR := KR^{-1} \cdot PR \quad UR = \begin{pmatrix} -5 \times 10^{-4} \\ -1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 5 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Повний вектор переміщень

$$U := (0 \ 0 \ 0 \ UR_1 \ UR_2 \ UR_3 \ 0 \ UR_4 \ 0 \ 0)^T$$

$$k := 1..4 \quad i := 1..4 \quad U_{e_{k,i}} := U_{(mi,k)}$$

$$U_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -5 \times 10^{-4} & 0 & 5 \times 10^{-4} \\ 0 & -1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ -5 \times 10^{-4} & 0 & 5 \times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}$$

Кожен стовпець цієї матриці вміщує переміщення вузлів відповідного елемента

Сили, діючі у вузлах кожного окремого елемента, знайдемо, помноживши матрицю жорсткості кожного елемента на відповідний вектор вузлових переміщень.

Повний вектор вузлових сил

$$P := K \cdot U$$

	1
1	$-3 \cdot 10^4$
2	$-2 \cdot 10^4$
3	$6 \cdot 10^4$
4	$-2 \cdot 10^4$
5	$-6 \cdot 10^4$
6	$4.064 \cdot 10^{-12}$
7	$6 \cdot 10^4$
8	$2 \cdot 10^4$
9	$-3 \cdot 10^4$
10	$2 \cdot 10^4$

Матриця внутрішніх сил у вузлах кожного елемента

$$R(i) := Kel(i) \cdot Ue^{(i)}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} -3 \times 10^4 \\ -2 \times 10^4 \\ 3 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(2) = \begin{pmatrix} 3 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(3) = \begin{pmatrix} -3 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 3 \times 10^4 \\ -2 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(4) = \begin{pmatrix} 3 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Для побудови епюр внутрішніх сил необхідно до знайдених для кожного елемента вузлових сил додати сили, які діють на кожній ділянці від розподіленого навантаження, у припущенні, що на кінцях ділянки жорсткі закріплення.

Епюри поперечних сил N_z і згинаючих моментів M_y , побудовані згідно з одержаними векторами зусиль, наведено на рис. 3.20, а, б.

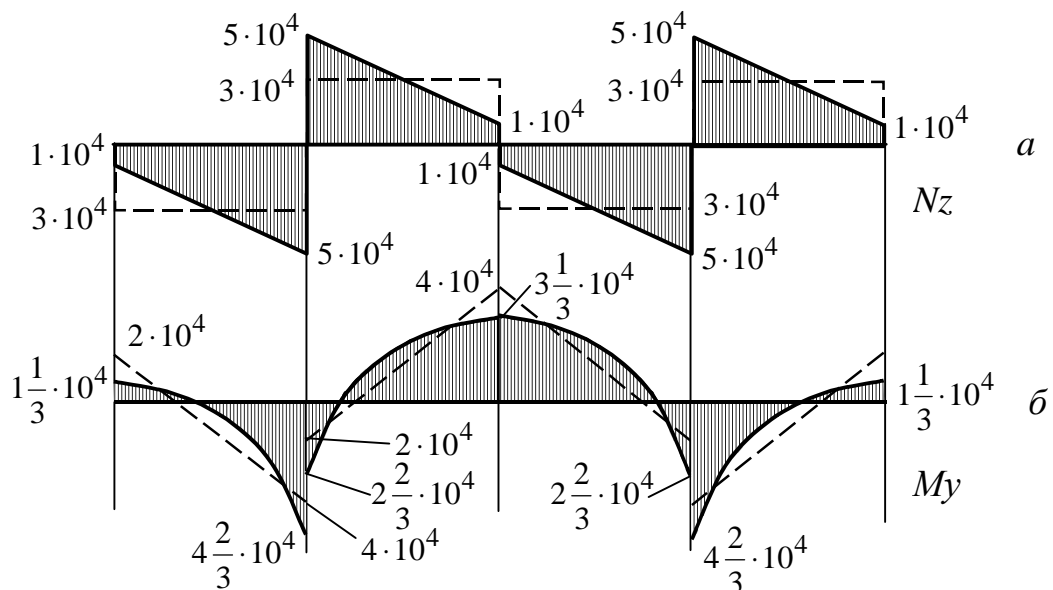


Рис. 3.20. Епюри внутрішніх зусиль

Приклад 3.4. Використаємо симетрію балки, яка розглядалася в попередньому прикладі, і розглянемо її половину, розділивши на вісім елементів (рис. 3.21). Врахування симетрії – характерний для МСЕ прийом, який дозволяє суттєво зменшити кількість невідомих при тій же точності розрахунку. Довжина елемента 0.5 м. При цьому необхідно врахувати граничні умови для перерізу, який лежить на осі симетрії. У даному випадку кут повороту перерізу, що лежить на осі симетрії, дорівнює нулю.

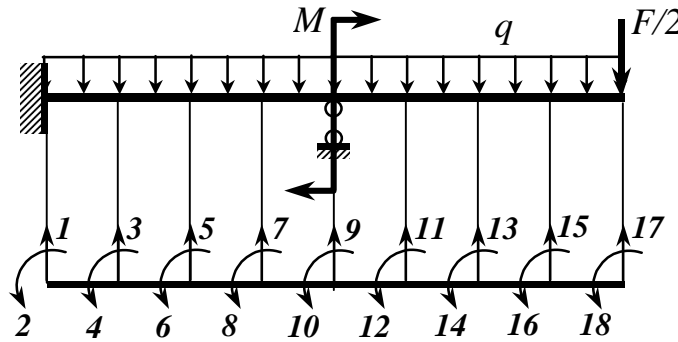


Рис. 3.21. Половина балки, зображеної на рис. 3.19

Введення початкових даних

$$ke := 8 \quad i := 1..8 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad I := 2 \cdot 10^{-4} \quad l_i :=$$

$$M := 20 \cdot 10^3 \quad P := 20 \cdot 10^3 \quad q := 20 \cdot 10^3$$

0.5
0.5
0.5
0.5
0.5
0.5
0.5

Матриця жорсткості елемента балки, який працює на згин

$$Kel(i) := \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{l_i}$$

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості системи

$$KA_{18,18} := 0 \quad k := 1..4 \quad ik := 1..4$$

$$KA_{(mi,ik,mi,k)} := KA_{(mi,ik,mi,k)} + Kel(i)_{ik,k}$$

$$\text{Умови закріплення:} \quad u_1 := 0 \quad u_2 := 0 \quad u_9 := 0 \quad u_{18} := 0$$

У відповідності з умовами закріплення з матриці КА треба вилучити такі рядки і стовпці: 1, 2, 9, 18.

$$m := 1..14$$

$$n := 1..14$$

$$mr := (3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17)$$

$$\text{Редуційована матриця жорсткості} \quad KR_{m,n} := KA_{(mr_1,m,mr_1,n)}$$

$$\text{Вектор вузлових навантажень} \quad F := -q \cdot l_1$$

$$PR := \left(F \ 0 \ F \ 0 \ F \ 0 \ -M \ F \ 0 \ F \ 0 \ F \ 0 \ \frac{F-P}{2} \right)^T$$

Визначення невідомих ненульових переміщень вузлів

$$U := KR^{-1} \cdot PR$$

Повний вектор переміщень

$$U := (0 \ 0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ 0 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ U_{10} \ U_{11} \ U_{12} \ U_{13} \ U_{14} \ 0)^T$$

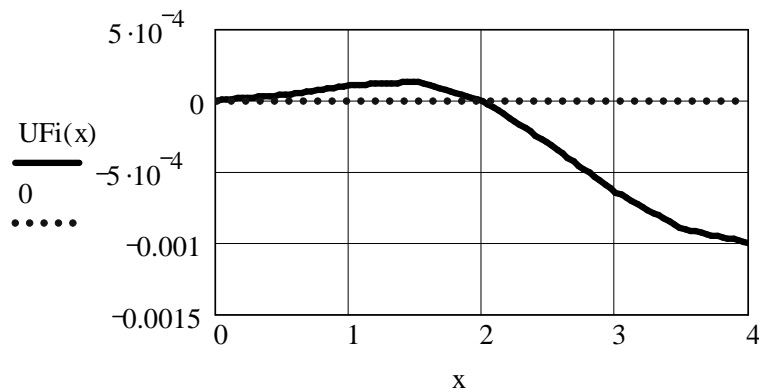
Побудова графіків лінійних і кутових переміщень перерізів балки з використанням функції **linterp**

$$UF := (U_1 \ U_3 \ U_5 \ U_7 \ U_9 \ U_{11} \ U_{13} \ U_{15} \ U_{17})^T$$

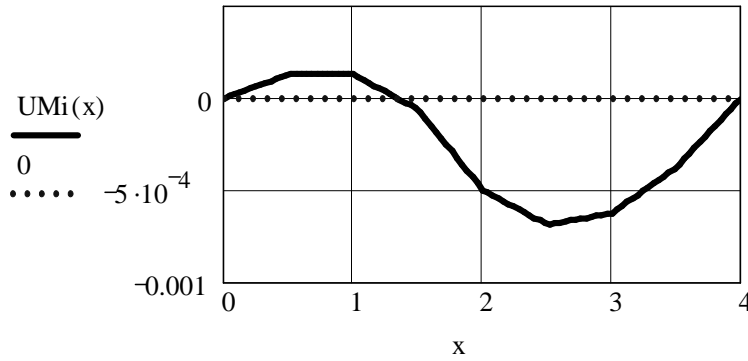
$$UM := (U_2 \ U_4 \ U_6 \ U_8 \ U_{10} \ U_{12} \ U_{14} \ U_{16} \ U_{18})^T$$

$$a := (0 \ 0.5 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 3.5 \ 4)^T \quad x := 0, 0.01 \cdot 4..4$$

$$UF_i(x) := \text{linterp}(a, UF, x) \quad UM_i(x) := \text{linterp}(a, UM, x)$$



Графік прогинів



Графік кутів повороту перерізів

Сили у вузлах балки $P := KA \cdot U$ Переміщення у вузлах кожного елемента $k := 1..4$ $i := 1..8$

$$U_{e_{k,i}} := U_{(m_{i,k})}$$

$$U_e^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3.516 \times 10^{-5} & 1.25 \times 10^{-4} \\ 3.516 \times 10^{-5} & 1.25 \times 10^{-4} & 1.042 \times 10^{-4} & 1.25 \times 10^{-4} \\ 1.042 \times 10^{-4} & 1.25 \times 10^{-4} & 1.289 \times 10^{-4} & -6.25 \times 10^{-5} \\ 1.289 \times 10^{-4} & -6.25 \times 10^{-5} & 0 & -5 \times 10^{-4} \\ 0 & -5 \times 10^{-4} & -3.086 \times 10^{-4} & -6.875 \times 10^{-4} \\ -3.086 \times 10^{-4} & -6.875 \times 10^{-4} & -6.458 \times 10^{-4} & -6.25 \times 10^{-4} \\ -6.458 \times 10^{-4} & -6.25 \times 10^{-4} & -9.023 \times 10^{-4} & -3.75 \times 10^{-4} \\ -9.023 \times 10^{-4} & -3.75 \times 10^{-4} & -1 \times 10^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

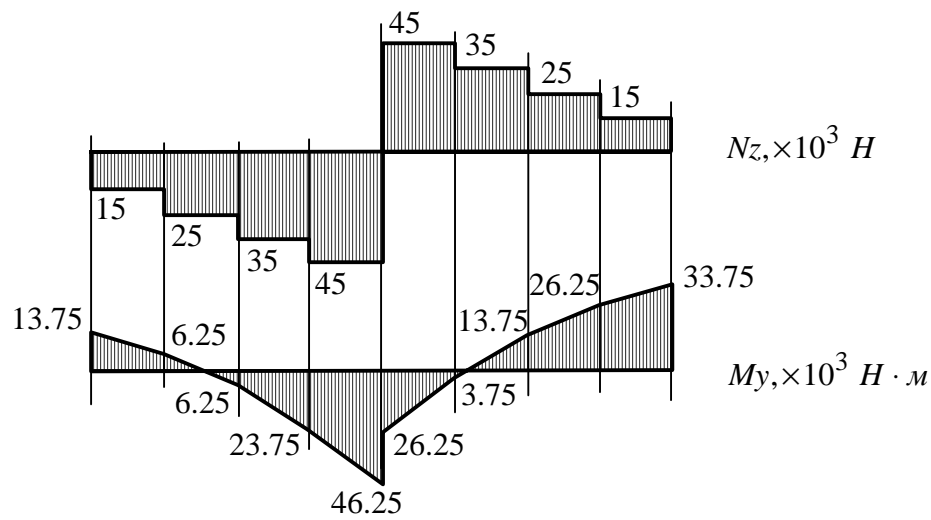
Сили у вузлах кожного елемента $R(i) := Kel(i) \cdot U_e^{(i)}$

$$R(1) = \begin{pmatrix} -1.5 \times 10^4 \\ -1.375 \times 10^4 \\ 1.5 \times 10^4 \\ 6.25 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad R(2) = \begin{pmatrix} -2.5 \times 10^4 \\ -6.25 \times 10^3 \\ 2.5 \times 10^4 \\ -6.25 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad R(3) = \begin{pmatrix} -3.5 \times 10^4 \\ 6.25 \times 10^3 \\ 3.5 \times 10^4 \\ -2.375 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$R(4) = \begin{pmatrix} -4.5 \times 10^4 \\ 2.375 \times 10^4 \\ 4.5 \times 10^4 \\ -4.625 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(5) = \begin{pmatrix} 4.5 \times 10^4 \\ 2.625 \times 10^4 \\ -4.5 \times 10^4 \\ -3.75 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad R(6) = \begin{pmatrix} 3.5 \times 10^4 \\ 3.75 \times 10^3 \\ -3.5 \times 10^4 \\ 1.375 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$R(7) = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^4 \\ -1.375 \times 10^4 \\ -2.5 \times 10^4 \\ 2.625 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(8) = \begin{pmatrix} 1.5 \times 10^4 \\ -2.625 \times 10^4 \\ -1.5 \times 10^4 \\ 3.375 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

У векторах $R(i)$ перша і третя компоненти – поперечні сили у лівому й правому перерізах i -го елемента, друга й четверта – згинаючі моменти. Графіки сил і моментів побудовано нижче.



Як видно, збільшення кількості елементів приводить до уточнення епюр внутрішніх сил і відкидає необхідність уведення поправок на розподілене навантаження, які використовувалися у попередньому прикладі.

Приклад 3.5. Побудувати епюри внутрішніх сил у перерізах ферми і схему деформування ферми. Схему навантаження і скінченно-елементну модель ферми наведено на рис. 3.22.

Вхідні дані: a, b – довжини вертикального і горизонтального стержнів (м);
 E – модуль пружності матеріалу (Па); A_i – площі поперечних перерізів стержнів (m^2);
 F_i – зовнішні сили (Н).

$$a := 2 \quad b := 2.5 \quad A := 4 \cdot 10^{-4} \quad E := 2 \cdot 10^{11}$$

$$F1 := 10 \cdot 10^3 \quad F2 := 40 \cdot 10^3 \quad F3 := 20 \cdot 10^3$$

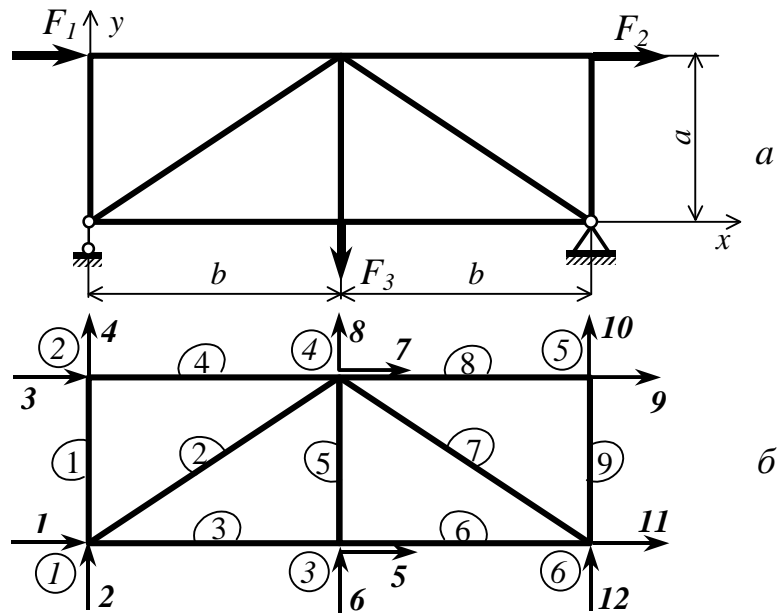


Рис. 3.22. Статично-визначувана ферма (а),
скінченно-елементна модель (б)

ne := 4 - кількість узагальнених координат в елементі

n := 9 - кількість елементів nv := 2 - кількість вузлів у елементі

k := 1..ne jj := 1..ne j := 1..nv ie := 1..n A_{ie} := E_{ie} :=

Топологічна матриця

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T$$

Координати вузлів

$$\text{Nodes} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b & 2 \cdot b & 2 \cdot b \\ 0 & a & 0 & a & a & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E

Координати вузлів кожного елемента згідно з матрицею **Top**

$$X_{nj,ie} := \text{Nodes}_{1, \text{Top}_{ie,j}} \quad Y_{nj,ie} := \text{Nodes}_{2, \text{Top}_{ie,j}}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 5 \\ 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Довжини стержнів $l_{ie} := \sqrt{(X_{n2,ie} - X_{n1,ie})^2 + (Y_{n2,ie} - Y_{n1,ie})^2}$

Синус і косинус кутів нахилу стержнів до осі x

$$s(ie) := \frac{Y_{n2,ie} - Y_{n1,ie}}{l_{ie}} \quad c(ie) := \frac{X_{n2,ie} - X_{n1,ie}}{l_{ie}}$$

Матриця направляючих косинусів
для переводу елемента в глобальну
систему координат

$$T(ie) := \begin{pmatrix} c(ie) & s(ie) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(ie) & s(ie) \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів з використанням матриці **Тор**

$$mi_{ie,2j} := 2 \cdot Tor_{ie,j} \quad mi_{ie,(2j-1)} := 2 \cdot Tor_{ie,j} - 1$$

Матриця жорсткості
скінченного елемента

$$Ke(ie) := E_{ie} \cdot \frac{A_{ie}}{l_{ie}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$mi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента
у глобальній системі координат

$$K\alpha(ie) := T(ie)^T \cdot Ke(ie) \cdot T(ie)$$

Формування матриці жорсткості ферми

$$KS_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$KS_{mi_{ie,jj}, mi_{ie,k}} := KS_{mi_{ie,jj}, mi_{ie,k}} + K\alpha(ie)_{jj,k}$$

Записуючи вектор зовнішніх вузлових навантажень, невідомі реакції опор
тимчасово покладаємо рівними нулю

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0$$

$$FS := (0 \ R1 \ F1 \ 0 \ 0 \ -F2 \ 0 \ 0 \ F3 \ 0 \ R2 \ R3)^T$$

Умови закріплення ферми: $u2=u11=u12=0$

Відповідна редукція матриць жорсткості й вузлових сил

$$m := 1..9 \quad n := 1..9 \quad mr := (1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)$$

$$KR_{m,n} := KS_{(mr_1,m), (mr_1,n)} \quad FR_m := FS_{(mr_1,m)}$$

$$FR^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times 10^4 & 0 & 0 & -4 \times 10^4 & 0 & 0 & 2 \times 10^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи рівнянь відносно невідомих вузлових переміщень

$$U := KR^{-1} \cdot FR$$

Повний вектор переміщень вузлів ферми

$$US_1 := U_1 \quad US_2 := 0 \quad US_3 := U_2 \quad US_4 := U_3$$

$$US_5 := U_4 \quad US_6 := U_5 \quad US_7 := U_6 \quad US_8 := U_7$$

$$US_9 := U_8 \quad US_{10} := U_9 \quad US_{11} := 0 \quad US_{12} := 0$$

Матриця переміщень вузлів кожного елемента

$$k := 1..4 \quad UE_{ie,k} := US_{mie,k} \quad UE := UE^T$$

Сили у вузлах кожного елемента у глобальній системі координат

$$RE(ie) := K\alpha(ie) \cdot UE^{(ie)}$$

$$RE(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad RE(2) = \begin{pmatrix} 10 \times 10^3 \\ 8 \times 10^3 \\ -10 \times 10^3 \\ -8 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad RE(3) = \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 0 \\ 10 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad RE(4) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^4 \\ 0 \\ -1 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$RE(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \times 10^4 \\ 0 \\ 4 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RE(6) = \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 0 \\ 10 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad RE(7) = \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 \\ -3.2 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 3.2 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$RE(8) = \begin{pmatrix} -2 \times 10^4 \\ 0 \\ 2 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad RE(9) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сили у вузлах елементів у локальних координатах кожного елемента

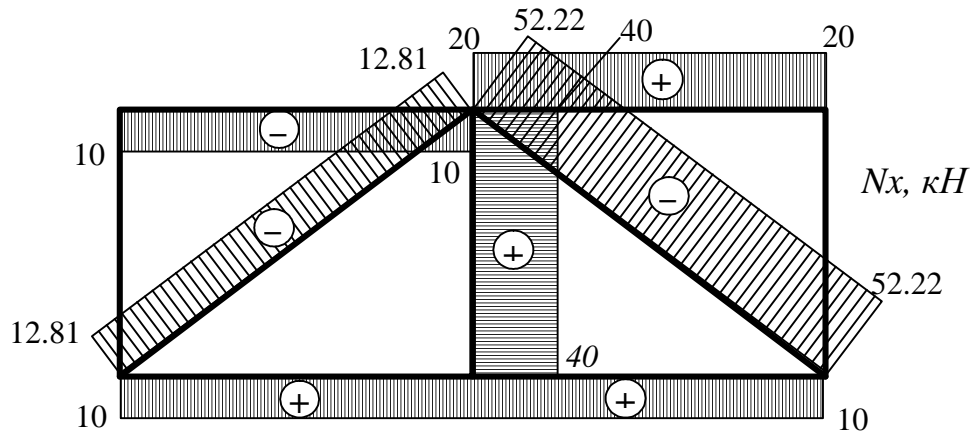
$$RE\alpha(ie) := T(ie) \cdot RE(ie)$$

$$RE\alpha(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad RE\alpha(2) = \begin{pmatrix} 1.281 \times 10^4 \\ -1.281 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RE\alpha(3) = \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 10 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$RE\alpha(4) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^4 \\ -1 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RE\alpha(5) = \begin{pmatrix} -4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RE\alpha(6) = \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 10 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$RE\alpha(7) = \begin{pmatrix} 5.122 \times 10^4 \\ -5.122 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RE\alpha(8) = \begin{pmatrix} -2 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RE\alpha(9) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

За одержаними значеннями будуємо епюру внутрішніх сил.



Епюра внутрішніх сил

	1
1	$-6.25 \cdot 10^{-4}$
2	0
3	$9.845 \cdot 10^{-4}$
4	0
5	$-3.125 \cdot 10^{-4}$
6	$-3.442 \cdot 10^{-3}$
7	$6.72 \cdot 10^{-4}$
8	$-2.442 \cdot 10^{-3}$
9	$1.297 \cdot 10^{-3}$
10	0
11	0
12	0

Побудова схеми деформованої ферми

$$W := US$$

$$X := (0 \ 5 \ 5 \ 0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 5 \ 10 \ 10)$$

$$Y := (0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0)$$

$$W_{x1} := W_1 \quad W_{x7} := W_7 \quad W_{y1} := W_2 \quad W_{y7} := W_8$$

$$W_{x2} := W_7 \quad W_{x8} := W_{11} \quad W_{y2} := W_8 \quad W_{y8} := W_{12}$$

$$W_{x3} := W_5 \quad W_{x9} := W_5 \quad W_{y3} := W_6 \quad W_{y9} := W_6$$

$$W_{x4} := W_1 \quad W_{x10} := W_9 \quad W_{y4} := W_2 \quad W_{y10} := W_{10}$$

$$W_{x5} := W_3 \quad W_{x11} := W_{11} \quad W_{y5} := W_4 \quad W_{y11} := W_{12}$$

$$W_{x6} := W_5 \quad W_{y6} := W_6$$

$$v := 1 .. 11$$

$$WX := (W_x^T \cdot 100 + X)^T \quad WY := (W_y^T \cdot 100 + Y)^T$$

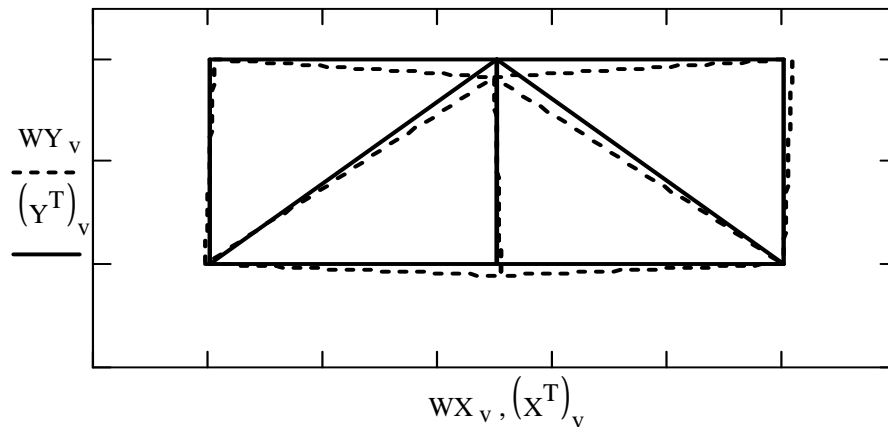


Схема деформованої ферми

Приклад 3.6. Визначити внутрішні сили і переміщення у рамі (рис. 3.23).

Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; площа поперечного перерізу стержнів $A = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$; момент інерції площі $I = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; довжина $a = 1 \text{ м}$; зовнішнє навантаження $q = 25 \text{ кН/м}$, $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $P = 30 \text{ кН}$.

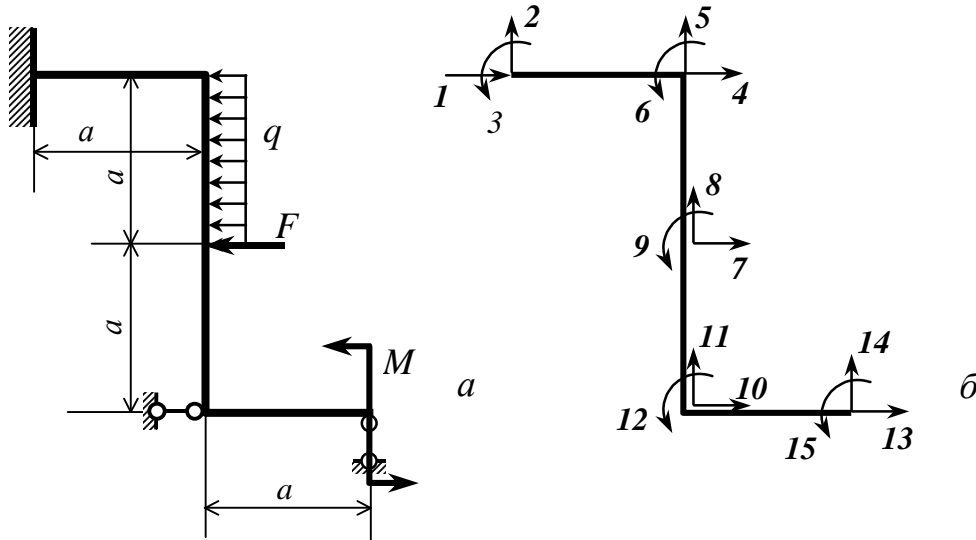


Рис. 3.23. Плоска рама (а) та її скінченно-елементна модель (б)

Вхідні дані:

$$a := 1 \quad I := 1 \cdot 10^{-4} \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad A := 1 \cdot 10^{-2}$$

$$q := 25 \quad P := 30 \quad M := 30$$

$$\text{Матриця координат вузлів} \quad N_c := \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & a \\ 2 \cdot a & 2 \cdot a & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Топологічна матриця} \quad T_{op} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$$

$$k_e := \text{rows}(T_{op}) \quad \text{- кількість елементів} \quad k_e = 4$$

$$k_n := \text{cols}(T_{op}) \quad \text{- кількість вузлів у кожному елементі} \quad k_n = 2$$

Обчислюємо координати вузлів кожного елемента у глобальній системі координат

$$i := 1 .. k_e \quad j := 1 .. k_n$$

$$X_{n_{j,i}} := N_{c_{1,(T_{op}_{i,j})}} \quad Y_{n_{j,i}} := N_{c_{2,(T_{op}_{i,j})}}$$

$$\text{Довжини елементів} \quad l_i := \sqrt{(X_{n_{2,i}} - X_{n_{1,i}})^2 + (Y_{n_{2,i}} - Y_{n_{1,i}})^2}$$

Елементи матриці направляючих косинусів

$$s(i) := \frac{Y_{n2,i} - Y_{n1,i}}{l_i} \quad c(i) := \frac{X_{n2,i} - X_{n1,i}}{l_i}$$

Матриця направляючих косинусів

$$T(i) := \begin{pmatrix} c(i) & s(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(i) & c(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(i) & s(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(i) & c(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів

$$m_{i,(3 \cdot j - 2)} := 3 \cdot \text{Top}_{i,j} - 2$$

$$m_{i,(3 \cdot j - 1)} := 3 \cdot \text{Top}_{i,j} - 1$$

$$m_{i,3 \cdot j} := 3 \cdot \text{Top}_{i,j}$$

Матриця індексів:

$$m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента

$$K_e(i) := \frac{E}{l_i} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{pmatrix}$$

Обчислення компонент матриці жорсткості елемента у глобальній системі координат

$$K_{e\alpha}(i) := T(i)^T \cdot K_e(i) \cdot T(i)$$

Побудова матриці жорсткості рами:

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$k := 1 .. 6 \quad ik := 1 .. 6 \quad \max(mi) = 15$$

$$K_{m_{ij}, ik, m_{ij}, k} := K_{m_{ij}, ik, m_{ij}, k} + K_{e\alpha}(i)_{ik, k}$$

Будуємо редуційовану матрицю жорсткості рами, виключаючи рядки і стовпці з номерами переміщень, які не допускаються накладеними на раму в'язями.

$$m := 1 .. (\max(mi) - 5) \quad n := 1 .. (\max(mi) - 5)$$

$$mr := (4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 11 \ 12 \ 13 \ 15)$$

$$KR_{m,n} := K_{mr_{1,m},mr_{1,n}}$$

Матриця вузлових сил:

$$F := \begin{bmatrix} -q \cdot \frac{a}{2} & 0 & \left(-q \cdot \frac{a^2}{12}\right) & \left[\left(-q \cdot \frac{a}{2}\right) - P\right] & 0 & q \cdot \frac{a^2}{12} & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}^T$$

Визначення вузлових переміщень: $U := KR^{-1} \cdot F$

Повна матриця переміщень вузлів рами (з урахуванням нульових переміщень):

$$US := (0 \ 0 \ 0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ 0 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ 0 \ U_{10})^T$$

Матриця вузлових сил

$$R := K \cdot US$$

	1		1
1	0	1	27.136
2	0	2	37.639
3	0	3	32.051
4	-1.357·10 ⁻⁸	4	-12.5
5	-4.876·10 ⁻⁷	5	-1.215·10 ⁻¹³
6	-6.616·10 ⁻⁷	6	-2.083
7	-3.614·10 ⁻⁷	7	-42.5
8	-5.064·10 ⁻⁷	8	2.118·10 ⁻¹³
9	8.794·10 ⁻⁸	9	2.083
10	0	10	27.864
11	-5.252·10 ⁻⁷	11	-1.173·10 ⁻¹³
12	4.026·10 ⁻⁷	12	-1.037·10 ⁻¹⁵
13	0	13	0
14	0	14	-37.639
15	9.616·10 ⁻⁷	15	30

Вузлові сили для кожного елемента

$$US_{e_k,i} := US_{mi,k} \quad N(i) := Ke\alpha(i) \cdot US_{e_k,i}$$

$$N(1) = \begin{pmatrix} 27.136 \\ 37.639 \\ 32.051 \\ -27.136 \\ -37.639 \\ 5.589 \end{pmatrix} \quad N(2) = \begin{pmatrix} 14.636 \\ 37.639 \\ -7.672 \\ -14.636 \\ -37.639 \\ 22.308 \end{pmatrix} \quad N(3) = \begin{pmatrix} -27.864 \\ 37.639 \\ -20.225 \\ 27.864 \\ -37.639 \\ -7.639 \end{pmatrix} \quad N(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 37.639 \\ 7.639 \\ 0 \\ -37.639 \\ 30 \end{pmatrix}$$

У відповідності зі значеннями вузлових сил у кожному елементі будуємо епюри внутрішніх сил (рис. 3.24). На ділянці, де прикладене розподілене навантаження, необхідно зробити поправку.

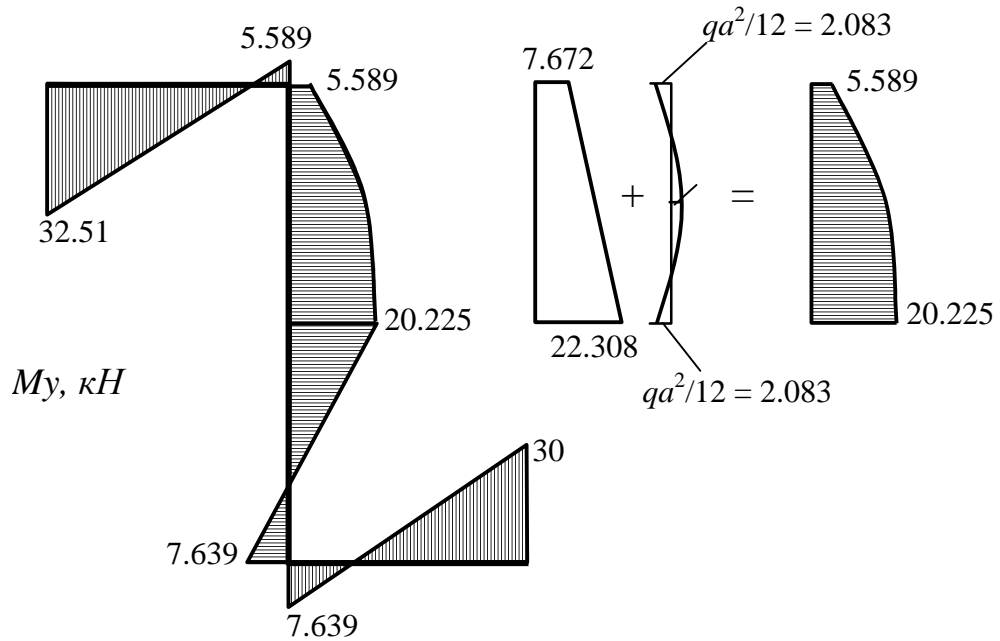


Рис. 3.24. Епюра згинаючих моментів

Побудова деформованої рами

$$W := US$$

$$a := 2 \quad X := (0 \quad a \quad a \quad a \quad 2 \cdot a) \quad Y := (2 \cdot a \quad 2 \cdot a \quad a \quad 0 \quad 0)$$

$$W_{x1} := W_1 \quad W_{y1} := W_2 \quad W_{x3} := W_7 \quad W_{x4} := W_{10} \quad W_{y4} := W_{11}$$

$$W_{x2} := W_4 \quad W_{y2} := W_5 \quad W_{y3} := W_8 \quad W_{y5} := W_{14} \quad W_{x5} := W_{13}$$

$$v := 1..8 \quad W_X := W_x^T \cdot 1000000 + X^T \quad W_Y := W_y^T \cdot 1000000 + Y^T$$

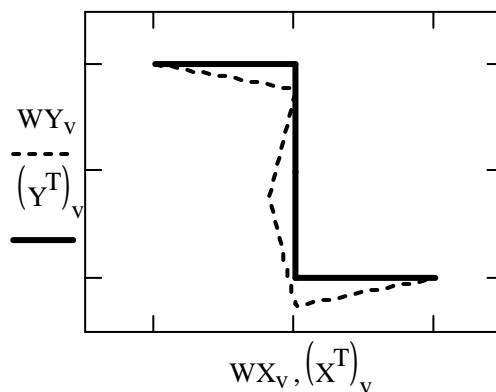


Схема деформованої рами

Приклад 3.7. Визначити переміщення і внутрішні сили у перерізах просторової рами (рис. 3.25).

Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$; модуль зсуву $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; діаметр поперечного перерізу стержнів $d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; довжина $a = 1 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$; навантаження $P_1 = P_2 = P_3 = 20 \text{ кН}$.

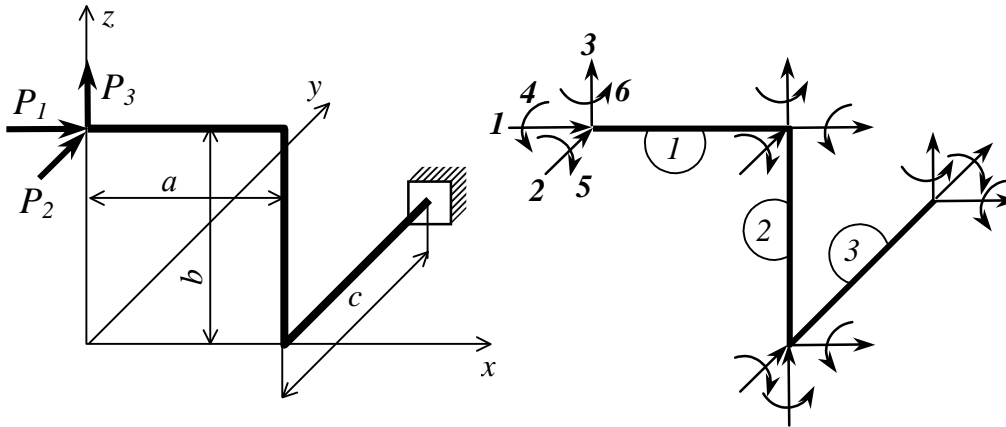


Рис. 3.25. Просторова рама та її скінченно-елементна модель

Вхідні дані :

$$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad \nu := 0.3 \quad G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$P_1 := 20 \quad P_2 := 20 \quad P_3 := 20 \quad d := 5 \cdot 10^{-2}$$

$$I_x := \pi \cdot \frac{d^4}{32} \quad I_y := \pi \cdot \frac{d^4}{64} \quad I_z := I_y \quad A := \pi \cdot \frac{d^2}{4} \quad \text{Геометричні характеристики поперечного перерізу}$$

$$n_v := 4 \quad n_e := 3 \quad i_e := 1 \dots n_e \quad - \text{кількість елементів}$$

$$n_{ve} := 3 \quad j := 1 \dots n_{ve} \quad - \text{кількість вузлів для кожного елемента}$$

$$L_{ie} := \quad A_{ie} := \quad I_{x_{ie}} := \quad I_{z_{ie}} := \quad I_{y_{ie}} := \quad \text{Розподілення геометричних характеристик по елементах}$$

a	A	I_x	I_z	I_y
b	A	I_x	I_z	I_y
c	A	I_x	I_z	I_y

$$\text{Nod} := \begin{pmatrix} 0 & a & a & a \\ b & b & 0 & 0 \\ c & c & c & 0 \end{pmatrix} \quad - \text{координати вузлів}$$

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad - \text{топологічна матриця}$$

$$\begin{aligned}
 X_{j,ie} := \text{Nod}_{1, \text{Top}_{ie,j}} \quad X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 Y_{j,ie} := \text{Nod}_{2, \text{Top}_{ie,j}} \quad Y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- координати вузлів кожного елемента} \\
 Z_{j,ie} := \text{Nod}_{3, \text{Top}_{ie,j}} \quad Z &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{у відповідності з матрицею топології}
 \end{aligned}$$

Розрахунок матриці направляючих косинусів:

Довжина елемента

$$L_{ie} := \sqrt{[(X_{2,ie} - X_{1,ie})^2 + [Y_{(2,ie)} - Y_{1,ie}]^2 + (Z_{2,ie} - Z_{1,ie})^2]}$$

Направляючі косинуси

$$\begin{aligned}
 t_{xx}(ie) &:= \frac{(X_{2,ie} - X_{1,ie})}{L_{ie}} & t_{yx}(ie) &:= \frac{(Y_{2,ie} - Y_{1,ie})}{L_{ie}} \\
 t_{zx}(ie) &:= \frac{(Z_{2,ie} - Z_{1,ie})}{L_{ie}}
 \end{aligned}$$

Довжина допоміжного відрізка

$$L_{1ie} := \sqrt{[(X_{3,ie} - X_{1,ie})^2 + [Y_{(3,ie)} - Y_{1,ie}]^2 + (Z_{3,ie} - Z_{1,ie})^2]}$$

Направляючі косинуси допоміжного відрізка, який фіксує положення площини XOZ для кожного елемента

$$t_1(ie) := \frac{(X_{3,ie} - X_{1,ie})}{L_{1ie}} \quad t_2(ie) := \frac{(Y_{3,ie} - Y_{1,ie})}{L_{1ie}} \quad t_3(ie) := \frac{(Z_{3,ie} - Z_{1,ie})}{L_{1ie}}$$

Розрахунок направляючих косинусів для осі Oу елементів

$$\begin{aligned}
 a_x(ie) &:= t_2(ie) \cdot t_{zx}(ie) - t_3(ie) \cdot t_{yx}(ie) \\
 a_y(ie) &:= t_3(ie) \cdot t_{xx}(ie) - t_1(ie) \cdot t_{zx}(ie) \\
 a_z(ie) &:= t_1(ie) \cdot t_{yx}(ie) - t_2(ie) \cdot t_{xx}(ie)
 \end{aligned}$$

$$L_{2ie} := \sqrt{[(a_x(ie))^2 + (a_y(ie))^2 + (a_z(ie))^2]}$$

$$t_{xy}(ie) := \frac{(a_x(ie))}{L_{2ie}} \quad t_{yy}(ie) := \frac{(a_y(ie))}{L_{2ie}} \quad t_{zy}(ie) := \frac{(a_z(ie))}{L_{2ie}}$$

Направляючі косинуси осі Oz елементів

$$\begin{aligned}
 t_{xz}(ie) &:= t_{yx}(ie) \cdot t_{zy}(ie) - t_{zx}(ie) \cdot t_{yy}(ie) \\
 t_{yz}(ie) &:= t_{zx}(ie) \cdot t_{xy}(ie) - t_{xx}(ie) \cdot t_{zy}(ie) \\
 t_{zz}(ie) &:= t_{xx}(ie) \cdot t_{yy}(ie) - t_{yx}(ie) \cdot t_{xy}(ie)
 \end{aligned}$$

$$T(\text{ie}) := \begin{pmatrix} \text{txx}(\text{ie}) & \text{txy}(\text{ie}) & \text{txz}(\text{ie}) \\ \text{tyx}(\text{ie}) & \text{tyy}(\text{ie}) & \text{tyz}(\text{ie}) \\ \text{tzx}(\text{ie}) & \text{tzy}(\text{ie}) & \text{tzz}(\text{ie}) \end{pmatrix} \quad T0(\text{ie}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T1(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T(\text{ie}), T0(\text{ie})) & T2(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T0(\text{ie}), T(\text{ie})) \\ T1(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T1(\text{ie}), T0(\text{ie})) & T2(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T2(\text{ie}), T0(\text{ie})) \\ T1(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T1(\text{ie}), T0(\text{ie})) & T2(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T2(\text{ie}), T0(\text{ie})) \\ T3(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T0(\text{ie}), T0(\text{ie})) & T4(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T0(\text{ie}), T0(\text{ie})) \\ T3(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T3(\text{ie}), T(\text{ie})) & T4(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T4(\text{ie}), T0(\text{ie})) \\ T3(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T3(\text{ie}), T0(\text{ie})) & T4(\text{ie}) &:= \text{augmen}(T4(\text{ie}), T(\text{ie})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TT(\text{ie}) &:= \text{stack}(T1(\text{ie}), T2(\text{ie})) & - \text{матриця направляючих косинусів} \\ TT(\text{ie}) &:= \text{stack}(TT(\text{ie}), T3(\text{ie})) & \text{елементів} \\ TT(\text{ie}) &:= \text{stack}(TT(\text{ie}), T4(\text{ie})) \end{aligned}$$

Блоки матриці жорсткості елемента рами

$$K11(\text{ie}) := \begin{bmatrix} E \cdot \frac{A_{\text{ie}}}{L_{\text{ie}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{E \cdot I_{z\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})^3} & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot E \cdot \frac{I_{z\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})^2} \\ 0 & 0 & 12 \cdot \frac{E \cdot I_{y\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})^3} & 0 & \left[6 \cdot E \cdot \frac{I_{y\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})^2} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \cdot \frac{I_{x\text{ie}}}{L_{\text{ie}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[6 \cdot E \cdot \frac{I_{y\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})^2} \right] & 0 & 4 \cdot E \cdot \frac{I_{y\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})} & 0 \\ 0 & 6 \cdot E \cdot \frac{I_{z\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})^2} & 0 & 0 & 0 & 4 \cdot E \cdot \frac{I_{z\text{ie}}}{(L_{\text{ie}})} \end{bmatrix}$$

$$K21(ie) := \begin{bmatrix} -E \cdot \frac{A_{ie}}{L_{ie}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{E \cdot I_{zie}}{(L_{ie})^3} & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} \\ 0 & 0 & -12 \cdot \frac{E \cdot I_{yie}}{(L_{ie})^3} & 0 & E \cdot \frac{I_{yie} \cdot 6}{(L_{ie})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G \cdot \frac{I_{xie}}{L_{ie}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[6 \cdot E \cdot \frac{I_{yie}}{(L_{ie})^2} \right] & 0 & 2 \cdot E \cdot \frac{I_{yie}}{(L_{ie})^2} & 0 \\ 0 & 6 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} \end{bmatrix}$$

$$K12(ie) := \begin{bmatrix} -E \cdot \frac{A_{ie}}{L_{ie}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{E \cdot I_{zie}}{(L_{ie})^3} & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} \\ 0 & 0 & -12 \cdot \frac{E \cdot I_{yie}}{(L_{ie})^3} & 0 & -E \cdot \frac{I_{yie} \cdot 6}{(L_{ie})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G \cdot \frac{I_{xie}}{L_{ie}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[6 \cdot E \cdot \frac{I_{yie}}{(L_{ie})^2} \right] & 0 & 2 \cdot E \cdot \frac{I_{yie}}{(L_{ie})^2} & 0 \\ 0 & -6 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} \end{bmatrix}$$

$$K22(ie) := \begin{bmatrix} E \cdot \frac{A_{ie}}{L_{ie}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{E \cdot I_{zie}}{(L_{ie})^3} & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} \\ 0 & 0 & 12 \cdot \frac{E \cdot I_{yie}}{(L_{ie})^3} & 0 & E \cdot \frac{I_{yie} \cdot 6}{(L_{ie})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \cdot \frac{I_{xie}}{L_{ie}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[6 \cdot E \cdot \frac{I_{yie}}{(L_{ie})^2} \right] & 0 & 4 \cdot E \cdot \frac{I_{yie}}{(L_{ie})} & 0 \\ 0 & -6 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})^2} & 0 & 0 & 0 & 4 \cdot E \cdot \frac{I_{zie}}{(L_{ie})} \end{bmatrix}$$

$$K01(ie) := \text{augmen}(K11(ie), K12(ie)) \quad K02(ie) := \text{augmen}(K21(ie), K22(ie))$$

$$Kel(ie) := \text{stack}(K01(ie), K02(ie)) \quad - \text{матриця жорсткості елемента у локальних координатах}$$

$$Keg(ie) := TT(ie) \cdot Kel(ie) \cdot TT(ie)^T \quad - \text{матриця жорсткості елемента у глобальних координатах}$$

$$mi := \begin{pmatrix} p := 1..12 & q := 1..12 \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad - \text{матриця індексів}$$

Формування матриці жорсткості рами

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$K_{(mi_{ie,p}, mi_{ie,q})} := K_{(mi_{ie,p}, mi_{ie,q})} + Keg(ie)_{p,q}$$

Редукція матриці жорсткості у відповідності з умовами закріплення

$$KR := \text{submatrix}(K, 1, 18, 1, 18)$$

Вектор навантажень

$$F := (P1 \ P2 \ P3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Переміщення вузлів

$$U := KR^{-1} \cdot F$$

$$U00 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Повний вектор переміщень з урахуванням переміщень у закріпленні

$$Us := \text{stack}(U, U00)$$

	1
1	1.391·10 ⁻³
2	1.391·10 ⁻³
3	1.293·10 ⁻³
4	3.259·10 ⁻⁴
5	1.076·10 ⁻³
6	-1.499·10 ⁻³
7	1.391·10 ⁻³
8	-5.427·10 ⁻⁵
9	2.717·10 ⁻⁴
10	3.259·10 ⁻⁴
11	9.127·10 ⁻⁴
12	-1.336·10 ⁻³
13	2.716·10 ⁻⁴
14	-5.432·10 ⁻⁵
15	5.093·10 ⁻⁸
16	1.63·10 ⁻⁴

U =

Зусилля у вузлах

$$Rs := K \cdot Us$$

$$Rs =$$

	1
1	20
2	20
3	20
4	0
5	-3.171·10 ⁻¹⁴
6	-5.677·10 ⁻¹⁴
7	4.779·10 ⁻¹¹
8	1.814·10 ⁻¹²
9	-8.946·10 ⁻¹⁴
10	1.494·10 ⁻¹⁴
11	-2.269·10 ⁻¹⁴
12	-7.976·10 ⁻¹⁴

$$Rs =$$

	1
13	3.991·10 ⁻¹⁴
14	-2.875·10 ⁻¹²
15	3.203·10 ⁻¹⁴
16	1.121·10 ⁻¹⁴
17	-1.574·10 ⁻¹⁴
18	-5.079·10 ⁻¹⁵
19	-20
20	-20
21	-20
22	1.153·10 ⁻¹²
23	-40
24	40

$$k := 1..3$$

$$i := 1..12$$

$$Ue_{i,k} := Us_{(mik,i)}$$

$$RR(ie) := Keg(ie) \cdot Ue^{(ie)}$$

- зусилля у вузлах кожного елемента у глобальній системі координат

$$RRs(ie) := TT(ie) \cdot RR(ie)$$

- зусилля у вузлах кожного елемента у локальних координатах

	1
1	20
2	-20
3	20
4	0
5	$5.677 \cdot 10^{-14}$
6	$-3.171 \cdot 10^{-14}$
7	-20
8	20
9	-20
10	0
11	-20
12	-20

 $RRs(1) =$

	1
1	-20
2	-20
3	-20
4	-20
5	$-2.206 \cdot 10^{-14}$
6	20
7	20
8	20
9	20
10	20
11	20
12	-40

 $RRs(2) =$

	1
1	-20
2	20
3	-20
4	-20
5	-40
6	-20
7	20
8	-20
9	20
10	40
11	40
12	$-1.153 \cdot 10^{-12}$

 $RRs(3) =$

За одержаними значеннями побудуємо епюри внутрішніх сил (рис.3.26).

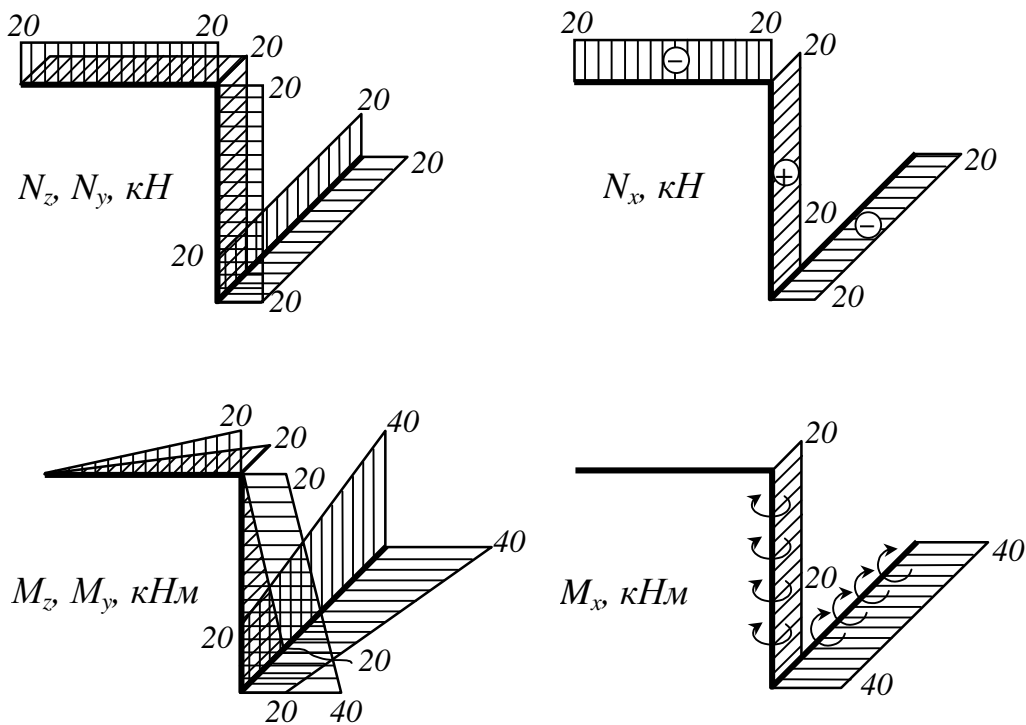


Рис. 3.26. Епюри внутрішніх зусиль для просторової рами

РОЗДІЛ 4

ДВОВИМІРНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

4.1. Основні залежності плоскої задачі напруженого стану

У тонкостінних елементах конструкцій, зокрема пластин, при дії сил, прикладених по контуру, має місце плоский напружений стан. Уявимо собі плоску пластину, завантажену силами у її площині (рис. 4.1, а). Товщину пластин h вважаємо малою порівняно з габаритними розмірами a і b .

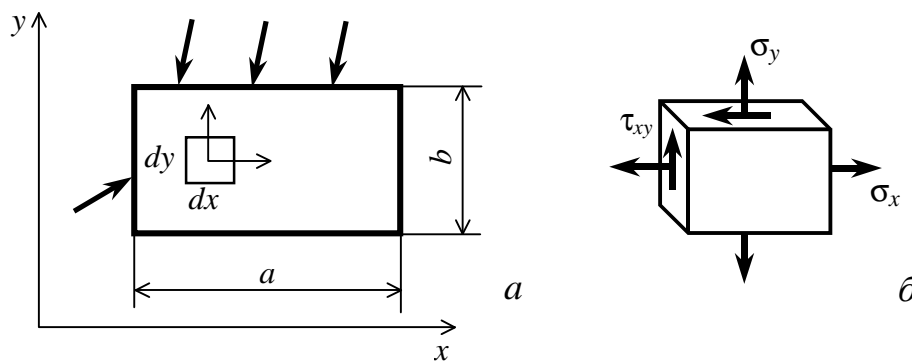


Рис. 4.1. Плоский напружений стан

Якщо виділити у пластині елемент з розмірами dx , dy , h , то на його гранях у загальному випадку будуть діяти напруження σ_x , σ_y і τ_{xy} (рис. 4.1, б). Напруження σ_z , τ_{xz} , τ_{zy} будуть нульовими на поверхнях елемента. Припустимо, що ці напруження будуть нульовими і у внутрішніх точках елемента. Такий напружений стан називають плоским. Напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} рівномірно розподілені по товщині пластини h , якщо h – мала величина. Схему плоского напруженого стану приймають і у випадках не малої товщини h , і якщо навантаження нерівномірно розподілене по товщині, однак симетричне відносно серединної площини. При цьому знайдені напруження вважають середніми по товщині (узагальнений плоский напружений стан).

Задача про визначення напруженого стану є двовимірною, оскільки напруження і переміщення u і v залежать від двох координат x і y .

Використовуючи узагальнений закон Гука, з урахуванням уведених припущень, одержимо

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, & \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).\end{aligned}\quad (4.1)$$

Наявність поперечної деформації $\varepsilon_z \neq 0$ приводить до появи переміщення у напрямку, перпендикулярному поверхні пластини. Однак, у зв'язку з малою товщиною пластини, це переміщення буде малим, і можна стверджувати, що точки пластини переміщуються, в основному, вздовж осей x і y .

Рівняння рівноваги і граничні умови на поверхні тіла матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_V &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{P}_S,\end{aligned}\quad (4.2)$$

де \mathbf{A} – матричний диференціальний оператор для плоского напруженого стану;

\mathbf{A}_S – матриця направляючих косинусів нормалі до поверхні, де діє навантаження \mathbf{P}_S ;

\mathbf{P}_V – вектор масових сил;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_V = \begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_S = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$n_x = \cos(x, n), \quad n_y = \cos(y, n).$$

Геометричні рівняння (рівняння Коші) набувають вигляду

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy})^T, \quad \mathbf{u} = (u \quad v)^T.$$

З шести рівнянь сумісності деформацій у даному випадку залишається тільки одне

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Закон Гука, записаний відносно напружень, набуває вигляду

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.5)$$

де \mathbf{C} – матриця пружних модулів

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Необхідно відрізнити плоский напружений стан від плоскої деформації. Якщо для пластини, навантаженої у своїй площині, створюються такі умови, що деформація по товщині неможлива (це може бути у двох випадках: у тілі великої довжини, коли кожний умовно виділений шар не може деформуватись по товщині, або при закріпленні тонкого шару (рис. 4.2, а, б), має місце плоска деформація.

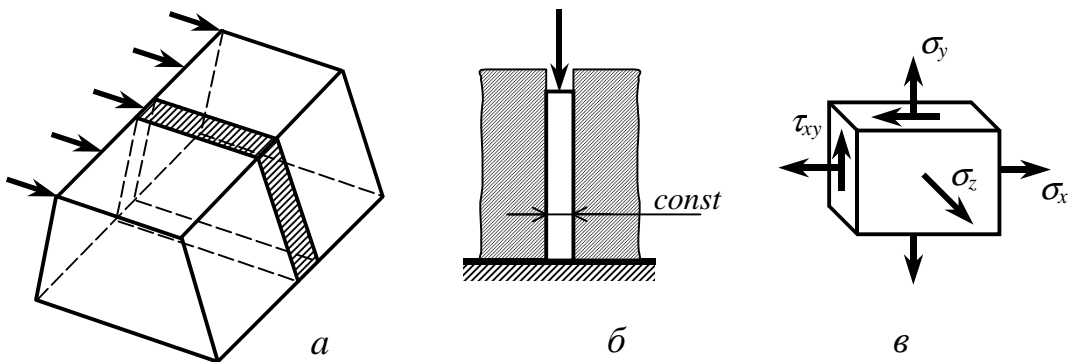


Рис. 4.2. Плоска деформація

Згідно із законом Гука, при $\epsilon_z = 0$ напруження $\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Напружений стан, зображений на рис. 4.2, в, є об'ємним, але він повністю визначається трьома напруженнями, що залежать від двох координат x і y , тому задача плоскої деформації залишається двовимірною. Для плоскої деформації всі рівняння плоского напруженого стану залишаються незмінними, окрім рівнянь закону Гука. У зв'язку з наявністю напруження σ_z для плоскої деформації у матриці \mathbf{C} (4.6) необхідно ввести нові умовні константи пружності $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$, $E_1 = E/(1-\nu^2)$, $G = E_1/[2(1+\nu_1)]$.

4.2. Трикутні скінченні елементи

Задача плоского напруженого стану, як видно з рівнянь (4.2), відноситься до класу задач, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку ($2m = 2$). У зв'язку з цим для забезпечення збіжності МСЕ інтерполяційні поліноми повинні задовольняти умови неперервності по всій області. Найвищий степінь полінома повинен бути не меншим, ніж $2m - 1 = 1$. Таким чином, переміщення в елементі (рис. 4.3) апроксимуємо такими функціями:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y, \quad v(x, y) = \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y. \quad (4.7)$$

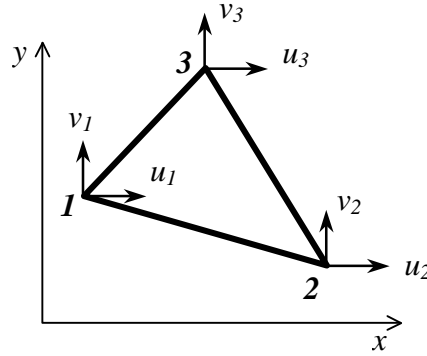


Рис. 4.3. Плоский трикутний елемент

Для визначення шести коефіцієнтів маємо шість умов для переміщень у вузлах

$$u(x_i, y_i) = u_i, \quad v(x_i, y_i) = v_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.8)$$

Як і раніше, переміщення записуємо у вигляді добутку функцій інтерполяції на невідомі коефіцієнти – переміщення вузлових точок

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (4.9)$$

де

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3)^T, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3) \frac{1}{2S},$$

$$N_2 = y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1) \frac{1}{2S},$$

$$N_3 = y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2) \frac{1}{2S}, \quad N_3 = y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2) \frac{1}{2S},$$

$$2S = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23},$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Компоненти вектора деформацій згідно із залежностями (4.4) мають вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{q}, \quad (4.11)$$

де

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & -y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & x_{21} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & x_{21} & -y_{21} \end{bmatrix} - \quad (4.12)$$

матриця деформацій.

Використовуючи далі фізичні залежності (4.5), одержимо вираз для напружень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.13)$$

де

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy})^T, \quad \mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Після підстановки $\boldsymbol{\varepsilon}$ з (4.11) одержимо

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{q} = \mathbf{C}_\sigma \mathbf{q}, \quad (4.14)$$

де

$$\mathbf{C}_\sigma = \frac{E}{2S(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{23} & -\nu x_{23} & y_{31} & -\nu x_{31} & -y_{21} & \nu x_{31} \\ \nu y_{23} & -x_{23} & \nu y_{31} & -x_{31} & -\nu y_{21} & x_{21} \\ -a_1 x_{23} & a_1 y_{23} & -a_1 x_{31} & a_1 y_{31} & a_1 x_{21} & -a_1 y_{21} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$a_1 = \frac{G}{E}(1-\nu^2).$$

Матрицю жорсткості \mathbf{K} одержимо з виразу для потенціальної енергії деформації як квадратичної форми

$$\mathbf{U} = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (4.16)$$

Після підстановки напружень і деформацій в інтеграл енергії

$$U = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.17)$$

і порівняння одержаного виразу з (4.16) отримаємо матрицю жорсткості \mathbf{K} з компонентами

$$\begin{aligned} K_{11} &= \bar{E}(y_{23}^2 + a_1 x_{23}^2), & K_{12} &= K_{21} = \bar{E}(a_1 + \nu)x_{32}y_{23}, \\ K_{13} &= K_{31} = \bar{E}(y_{23}y_{31} + a_1 x_{23}x_{31}), & K_{14} &= K_{41} = \bar{E}(a_1 x_{32}y_{31} + \nu x_{13}y_{23}), \\ K_{15} &= K_{51} = \bar{E}(a_1 x_{12}x_{23}), & K_{16} &= K_{61} = \bar{E}(a_1 x_{32}y_{12} + \nu x_{21}y_{23}), \\ K_{22} &= \bar{E}(x_{23}^2 + a_1 y_{23}^2), & K_{23} &= K_{32} = \bar{E}(a_1 x_{13}y_{23} + \nu x_{32}y_{31}), \\ K_{24} &= K_{42} = \bar{E}(x_{23}x_{31} + a_1 y_{23}y_{31}), & K_{25} &= K_{52} = \bar{E}(a_1 x_{21}y_{23} + \nu x_{32}y_{12}), \\ K_{26} &= K_{62} = \bar{E}(x_{12}x_{23} + a_1 y_{12}y_{23}), & K_{33} &= \bar{E}(y_{31}^2 + a_1 x_{31}^2), \\ K_{34} &= K_{43} = \bar{E}(a_1 + \nu)x_{13}y_{31}, & K_{35} &= K_{53} = \bar{E}(a_1 x_{12}x_{31} + \nu y_{12}y_{31}), \\ K_{36} &= K_{63} = \bar{E}(a_1 x_{13}y_{12} + \nu x_{21}y_{31}), & K_{44} &= \bar{E}(x_{31}^2 + a_1 y_{31}^2), \\ K_{45} &= K_{54} = \bar{E}(a_1 x_{21}y_{31} + \nu x_{13}y_{12}), & K_{46} &= K_{64} = \bar{E}(x_{12}x_{31} + a_1 y_{12}y_{31}), \\ K_{55} &= \bar{E}(y_{12}^2 + a_1 x_{12}^2), & K_{56} &= K_{65} = \bar{E}(a_1 + \nu)x_{21}y_{12}, & K_{66} &= \bar{E}(x_{12}^2 + a_1 y_{12}^2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\bar{E} = \frac{Eh}{4S(1-\nu^2)}, \quad S = \frac{1}{2}(x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}),$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Якщо елемент навантажений діючими у його площині поверхневими $\mathbf{P}_S = (X_S \ Y_S)$ і об'ємними $\mathbf{P}_V = (X_V \ Y_V)$ силами, еквівалентні вузлові навантаження можна визначити, скориставшись виразами для роботи сил на переміщеннях точок їх прикладення

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{P}_V dV, \quad \mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{P}_S dS. \quad (4.19)$$

При достатньо малих розмірах скінченного елемента можна ввести середні значення інтенсивностей по полю скінченного елемента

$$X_S = X_S^O, \quad Y_S = Y_S^O, \quad X_V = X_V^O, \quad Y_V = Y_V^O.$$

Тоді вектор вузлових навантажень матиме вигляд

$$\mathbf{F} = (P_1 \ P_2 \ P_1 \ P_2 \ P_1 \ P_2)^T, \quad (4.20)$$

де

$$P_1 = \frac{X_S^O + hX_V^O}{3} S, \quad P_2 = \frac{Y_S^O + hY_V^O}{3} S,$$

S – площа елемента.

Зазначимо, що при визначенні компонент матриці жорсткості доцільно координати вузлів елемента записувати зразу в глобальній системі координат, щоб виключити потім приведення локальної системи кожного елемента у глобальну.

4.3. Прямокутний елемент із чотирма вузлами

Приймаємо вектор вузлових переміщень для елемента (рис. 4.4) у вигляді

$$\mathbf{q} = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4)^T. \quad (4.21)$$

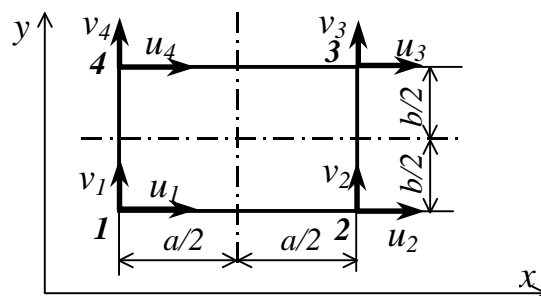


Рис. 4.4. Прямокутний елемент

Індекси у переміщеннях u і v позначають номер вузла; функції, що апроксимують поле переміщень, визначаються поліномами

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v &= \alpha'_1 + \alpha'_2 x + \alpha'_3 y + \alpha'_4 xy. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Якщо локальна система координат має початок у центрі ваги елемента (рис. 4.4), умови для визначення коефіцієнтів мають вигляд

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_3, v = v_3; & \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_2, v = v_2; \\ \left. \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_1, v = v_1; & \quad \left. \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_4, v = v_4. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Після визначення коефіцієнтів матимемо залежність

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, & N_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}, \\ N_3 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, & N_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Деформації визначаються залежністю

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (4.26)$$

де

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{N}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b\left(-\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & 0 & b\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) & 0 \\ 0 & a\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & 0 & a\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) \\ x\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & b\left(-\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & a\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) & b\left(-\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} b\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & 0 & b\left(-\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) & 0 \\ 0 & a\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & 0 & a\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) \\ a\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & b\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & a\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) & b\left(-\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) \end{bmatrix}.$$

Вектор напружень згідно з (4.13), (4.26) –

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (4.29)$$

Матриця жорсткості –

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV. \quad (4.30)$$

Компоненти матриць жорсткості і сил для системи елементів визначаються за такою ж методикою, що і для стержневих систем, – з використанням матриці індексів.

Більш складним виявляється врахування ненульових граничних умов. Якщо j – напрямок, у якому вузлове значення переміщення задається явно, наприклад, $u_j = u_0$, то в j -й рядок матриці системи вносяться нулі, крім діагональної позиції, де ставиться 1, а в j -й рядок матриці \mathbf{F} вводиться значення u_0 .

Згідно з другим варіантом діагональний елемент у j -ому рядку множиться на дуже велике число, а j -й елемент у матриці \mathbf{F} замінюється добутком того ж числа на u_0 і діагональний елемент K_{jj} . Приклади використання одержаних матриць для плоских скінченних елементів наведені нижче.

Приклад 4.1. Визначити вузлові переміщення і напруження для пластини, завантаженої силою в її площині (рис. 4.5).

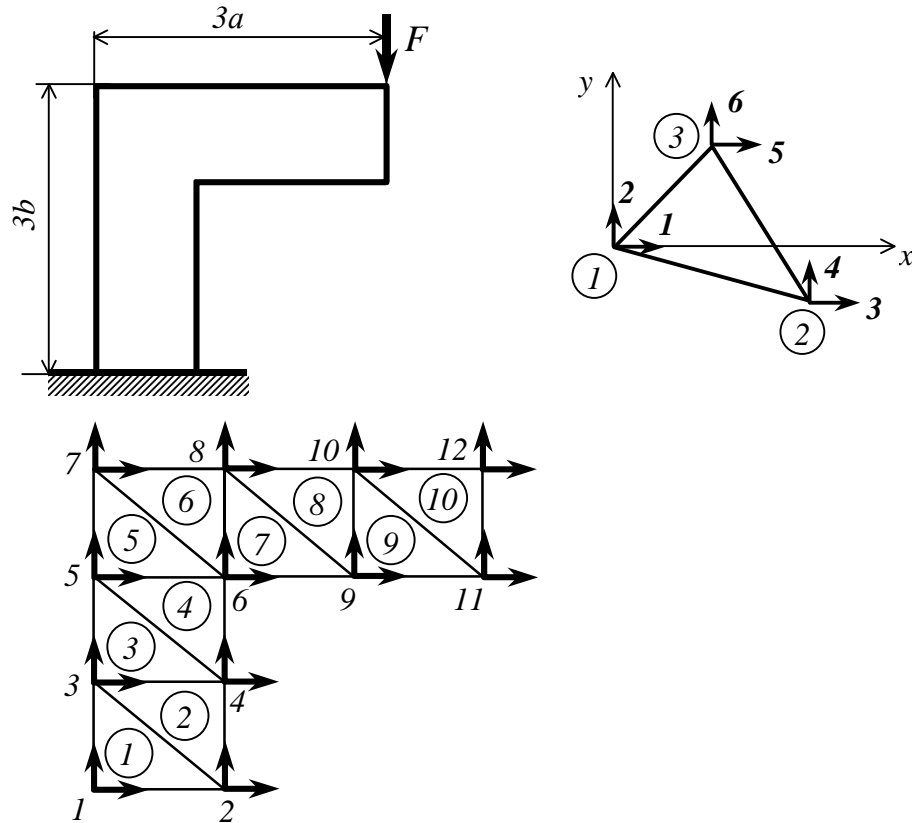


Рис. 4.5. Пластина, скінченний елемент і схема розділення на скінченні елементи

Вхідні дані

$$a := 1 \quad b := 1 \quad h := 0.02 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad \nu := 0.3 \quad jj := 1..19$$

$$x := 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 2 \cdot a \ 2 \cdot a \ 3 \cdot a \ 3 \cdot a^T$$

$$y := 0 \ 0 \ b \ b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b^T$$

$$xd := a \ a \ 0 \ 0 \ 3 \cdot a \ 3 \cdot a \ a^T$$

$$yd := 3 \cdot b \ 0 \ 0 \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b^T$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$nv := \text{cols}(x) \quad jj := 1..nv$$

Матриця координат вузлів

$$\text{Nod} := \text{augment}(x, y)^T$$

Nod =		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	2	2	3	3
	2	0	0	1	1	2	2	3	3	2	3	2	3

Топологічна матриця

$$1 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 7 \ 6 \ 8 \ 9 \ 10^T$$

$$\text{Top} := 2 \ 2 \ 4 \ 4 \ 6 \ 6 \ 9 \ 9 \ 11 \ 11$$

$$3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 8 \ 10 \ 10 \ 12$$

Кількість елементів $ne := rows(Top)$

Кількість вузлів у елементі $nve := cols(Top)$

$j := 1..nve$ $i := 1..ne$ $nve = 3$ $ne = 10$

Координати вузлів кожного елемента

$X_{j,i} := Nod_{1,Top_{i,j}}$ $Y_{j,i} := Nod_{2,Top_{i,j}}$

$X =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2
2	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3
3	0	1	0	1	0	1	1	2	2	3

$Y =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	2	3	2	3	2	3
2	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3

Формування матриці жорсткості елемента

$x12(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$ $x13(i) := X_{1,i} - X_{3,i}$ $x23(i) := X_{2,i} - X_{3,i}$

$x31(i) := -x13(i)$ $x21(i) := -x12(i)$ $x32(i) := -x23(i)$

$y12(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i}$ $y23(i) := Y_{2,i} - Y_{3,i}$ $y13(i) := Y_{1,i} - Y_{3,i}$

$y21(i) := -y12(i)$ $y32(i) := -y23(i)$ $y31(i) := -y13(i)$

$$A(i) := \frac{x23(i) \cdot y31(i) - x31(i) \cdot y23(i)}{2}$$

$h := 0.02$ Товщина пластини

$$B(i) := \begin{pmatrix} y23(i) & 0 & y31(i) & 0 & y12(i) & 0 \\ 0 & x32(i) & 0 & x13(i) & 0 & x21(i) \\ x32(i) & y23(i) & x13(i) & y31(i) & x21(i) & y12(i) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

Матриця пружних модулів $D :=$

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1-\nu^2}$$

Матриця жорсткості елемента $Ke(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot h \cdot A(i)$

Формування матриці індексів

$mi_{i,(2j-1)} := 2 \cdot Top_{i,j} - 1$

$mi_{i,2j} := 2 \cdot Top_{i,j}$

$i := 1..10$

$k := 1..6$

$jj := 1..6$

$mi =$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	5	6	3	4	7	8
3	5	6	7	8	9	10
4	9	10	7	8	11	12
5	9	10	11	12	13	14
6	13	14	11	12	15	16
7	11	12	17	18	15	16
8	15	16	17	18	19	20
9	17	18	21	22	19	20
10	19	20	21	22	23	24

Формування матриці жорсткості пластини

$$K_{24,24} := 0 \quad K_{m_i, j_j, m_i, k} := K_{m_i, j_j, m_i, k} + K_{e(i) j_j, k}$$

Вектор зовнішніх навантажень

$$FS := 0 \ -1^T$$

Граничні умови: U1, U2, U3, U4 еkv 0

$$m := 1..20 \quad n := 1..20 \quad KS_{m,n} := K_{(m+4),(n+4)}$$

Переміщення вузлів: $U := KS^{-1} \cdot FS$ $Nul := (0 \ 0 \ 0 \ 0)$

Повний вектор переміщень $US := \text{augment}(Nul, U^T)^T$

Побудова схеми переміщень вузлів пластини $s := 1..12$

$$X := 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 2 \cdot a \ 2 \cdot a \ 3 \cdot a \ 3 \cdot a^T$$

$$Y := 0 \ 0 \ b \ b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b^T$$

$$Xd := 2 \cdot a \ a \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a \ a \ a \ a \ a \ 2 \cdot a \ 3 \cdot a^T$$

$$Yd := 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ b \ 0 \ 0 \ b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b^T$$

$$Xp := \text{augment}(X^T, Xd^T)^T \quad Yp := \text{augment}(Y^T, Yd^T)^T$$

$$U_{Xs} := US_{2..s-1} \quad U_{Ys} := US_{2..s}$$

$$U_{Xd} := (U_{X10} \ U_{X8} \ U_{X7} \ U_{X5} \ U_{X3} \ U_{X1} \ U_{X2} \ U_{X4} \ U_{X6} \ U_{X8} \ U_{X6} \ U_{X9} \ U_{X11})$$

$$U_{Yd} := (U_{Y10} \ U_{Y8} \ U_{Y7} \ U_{Y5} \ U_{Y3} \ U_{Y1} \ U_{Y2} \ U_{Y4} \ U_{Y6} \ U_{Y8} \ U_{Y6} \ U_{Y9} \ U_{Y11})$$

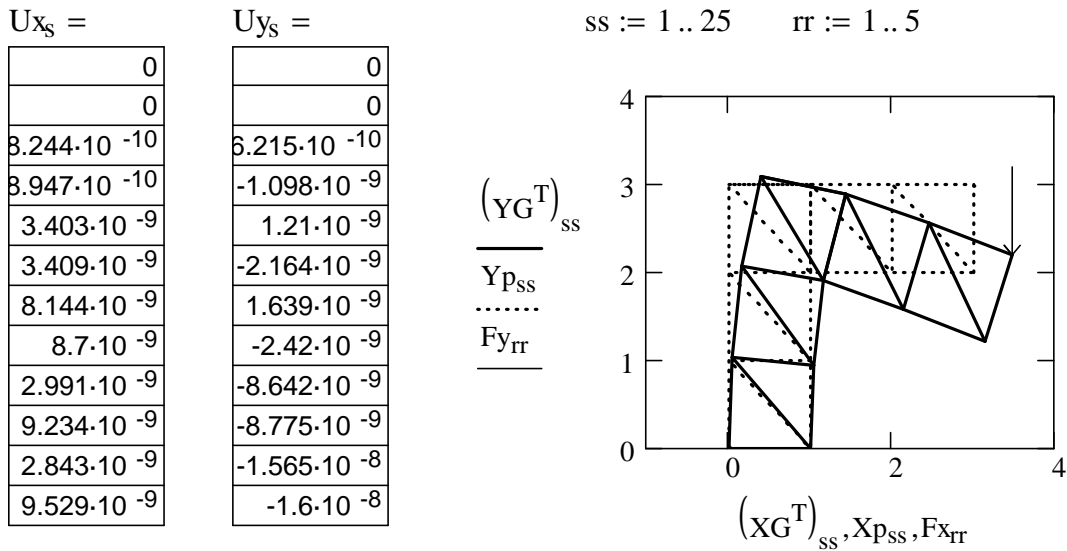
$$U_{Xg} := \text{augment}(U_{X^T}, U_{Xd}) \quad U_{Yg} := \text{augment}(U_{Y^T}, U_{Yd})$$

$$XG := Xp^T + U_{Xg} \cdot 10^8 \cdot 0.5$$

$$YG := Yp^T + U_{Yg} \cdot 10^8 \cdot 0.5$$

$$Fx := \left[(XG^T)_{12} \ (XG^T)_{12} \ (XG^T)_{12} - 0.1 \ (XG^T)_{12} \ (XG^T)_{12} + 0.1 \right]^T$$

$$Fy := \left[(YG^T)_{12} + 1 \ (YG^T)_{12} \ (YG^T)_{12} + 0.1 \ (YG^T)_{12} \ (YG^T)_{12} + 0.1 \right]^T$$



Визначення напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ $al := \frac{(1-\nu)}{2}$

$$E_{\sigma(i)} := \frac{E}{2 \cdot A(i) \cdot (1-\nu^2)} \cdot \begin{pmatrix} y_{23(i)} & -\nu \cdot x_{23(i)} & y_{31(i)} & -\nu \cdot x_{31(i)} & -y_{21(i)} & \nu \cdot x_{21(i)} \\ \nu \cdot y_{23(i)} & -x_{23(i)} & \nu \cdot y_{31(i)} & -x_{31(i)} & -\nu \cdot y_{21(i)} & x_{21(i)} \\ -al \cdot x_{23(i)} & al \cdot y_{23(i)} & -al \cdot x_{31(i)} & al \cdot y_{31(i)} & al \cdot x_{21(i)} & -al \cdot y_{21(i)} \end{pmatrix}$$

$j := 1..6$ $Nul := (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ $US := \text{augment}(Nul, U^T)^T$

$W_{i,j} := US_{mi,j}$ $WT := W^T$ $\sigma^{(i)} := E_{\sigma(i)} \cdot WT^{(i)}$

$\sigma =$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	40.976	-56.913	54.237	-68.875	29.728	105.234	-108.648	108.648	-41.472	41.472	
2	136.588	-236.588	133.912	-233.912	94.766	-19.624	-83.789	6.106	-38.93	-58.528	
3	63.412	-63.412	66.088	-66.088	105.234	94.766	-91.352	-8.648	-58.528	-41.472	

У матриці σ перший рядок – напруження σ_x , другий – σ_y , третій – τ_{xy} .

Приклад 4.2. Визначити переміщення вузлів і напруження у пластині з використанням прямокутних скінченних елементів (рис. 4.6).

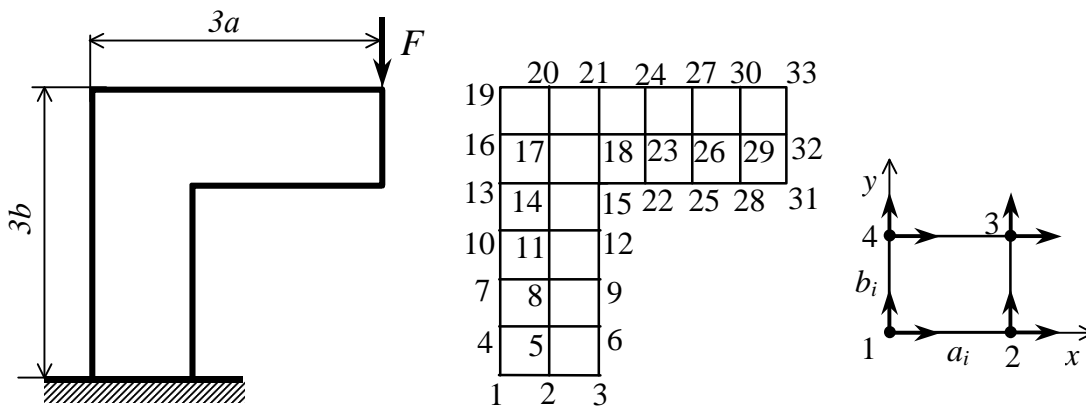


Рис. 4.6. Схема навантаження пластини, схема розділення на скінченні елементи і скінченний елемент

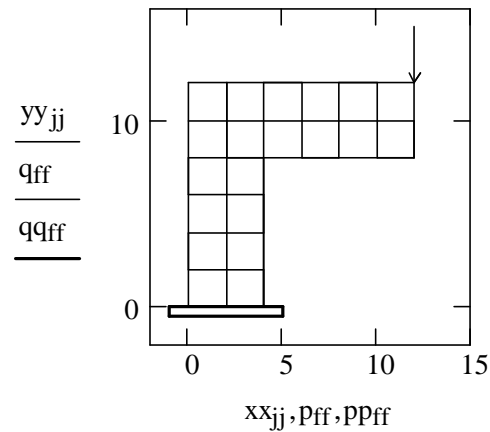
Розв'язання:

$$\begin{aligned}
 \nu &:= 0.3 & E &:= 2 \cdot 10^{11} & a &:= 0.5 & b &:= 0.5 \\
 c_{11} &:= \frac{E}{1 - \nu^2} & c_{12} &:= -\nu \cdot c_{11} & c_{21} &:= c_{12} & c_{22} &:= c_{11} & c_{13} &:= 0 \\
 c_{31} &:= c_{13} & c_{32} &:= 0 & c_{33} &:= \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} & c_{23} &:= 0 & j &\equiv 1..29
 \end{aligned}$$

$$i := 1..20$$

$$a_i := a$$

$$b_i := b$$



Компоненти матриці жорсткості плоского скінченного елемента

$$\begin{aligned}
 k_{23}(i) &:= \frac{-c_{12}}{4} + \left(c_{23} \cdot \frac{a_i}{6 \cdot b_i} \right) + c_{31} \cdot \frac{-b_i}{3 \cdot a_i} + \frac{c_{33}}{4} & k_{32}(i) &:= k_{23}(i) \\
 k_{15}(i) &:= c_{11} \cdot \left(\frac{-b_i}{6 \cdot a_i} \right) + c_{13} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) + c_{31} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) + c_{33} \cdot \left(\frac{-a_i}{6 \cdot b_i} \right) & k_{51}(i) &:= k_{15}(i) \\
 k_{16}(i) &:= c_{12} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) + c_{13} \cdot \left(\frac{-b_i}{6 \cdot a_i} \right) + c_{32} \cdot \left(\frac{-a_i}{6 \cdot b_i} \right) + c_{33} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) & k_{61}(i) &:= k_{16}(i) \\
 k_{25}(i) &:= c_{12} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) + c_{23} \cdot \left(\frac{-a_i}{6 \cdot b_i} \right) + c_{31} \cdot \left(\frac{-b_i}{6 \cdot a_i} \right) + c_{33} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) & k_{52}(i) &:= k_{25}(i) \\
 k_{26}(i) &:= c_{22} \cdot \frac{-a_i}{6 \cdot b_i} + \frac{-c_{23}}{4} + \frac{-c_{32}}{4} + c_{33} \cdot \frac{-b_i}{6 \cdot a_i} & k_{62}(i) &:= k_{26}(i) \\
 k_{27}(i) &:= \frac{c_{21}}{4} + c_{23} \cdot \frac{(-a)_i}{3 \cdot b_i} + c_{31} \cdot \frac{b_i}{6 \cdot a_i} + \frac{-c_{33}}{4} & k_{72}(i) &:= k_{27}(i) \\
 k_{17}(i) &:= c_{11} \cdot \frac{b_i}{6 \cdot a_i} + c_{13} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) + c_{31} \cdot \left(\frac{1}{4} \right) + c_{33} \cdot \left(\frac{-a_i}{3 \cdot b_i} \right) & k_{71}(i) &:= k_{17}(i) \\
 k_{18}(i) &:= c_{12} \cdot \left(\frac{-1}{4} \right) + c_{13} \cdot \left(\frac{b_i}{6 \cdot a_i} \right) + c_{32} \cdot \left(\frac{-a_i}{3 \cdot b_i} \right) + c_{33} \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \\
 k_{28}(i) &:= c_{22} \cdot \frac{(-a)_i}{3 \cdot b_i} + \frac{c_{23}}{4} + \frac{-c_{32}}{4} + c_{33} \cdot \frac{b_i}{6 \cdot a_i} \\
 k_{33}(i) &:= c_{11} \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} + \frac{-c_{13}}{4} + \frac{-c_{31}}{4} + c_{33} \cdot \frac{a_i}{3 \cdot b_i} \\
 k_{34}(i) &:= \frac{-c_{12}}{4} + \left(c_{13} \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} \right) + c_{32} \cdot \frac{a_i}{3 \cdot b_i} + \frac{-c_{33}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k35(i) &:= c11 \cdot \frac{b_i}{6 \cdot a_i} + c13 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c31 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c33 \cdot \left[\frac{(-a)_i}{3 \cdot b_i}\right] \\
k44(i) &:= c22 \cdot \frac{a_i}{3 \cdot b_i} + \frac{-c23}{4} + \frac{-c32}{4} + c33 \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} \\
k81(i) &:= k18(i) \quad k82(i) := k28(i) \quad k43(i) := k34(i) \quad k53(i) := k35(i) \\
k46(i) &:= c22 \cdot \frac{-a_i}{3 \cdot b_i} + \frac{-c23}{4} + \frac{c32}{4} + c33 \cdot \frac{b_i}{6 \cdot a_i} \quad k64(i) := k46(i) \\
k36(i) &:= c12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c13 \cdot \left(\frac{b_i}{6 \cdot a_i}\right) + c32 \cdot \left(\frac{-a_i}{3 \cdot b_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) \quad k63(i) := k36(i) \\
k45(i) &:= c12 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c23 \cdot \left(\frac{-a_i}{3 \cdot b_i}\right) + c31 \cdot \left(\frac{b_i}{6 \cdot a_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \quad k54(i) := k45(i) \\
k37(i) &:= c11 \cdot \frac{-b_i}{6 \cdot a_i} + c13 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c31 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c33 \cdot \left(\frac{-a_i}{6 \cdot b_i}\right) \quad k73(i) := k37(i) \\
k38(i) &:= c12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c13 \cdot \left(\frac{-b_i}{6 \cdot a_i}\right) + c32 \cdot \left(\frac{-a_i}{6 \cdot b_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \quad k83(i) := k38(i) \\
k47(i) &:= c12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c23 \cdot \left[\frac{(-a)_i}{6 \cdot b_i}\right] + c31 \cdot \left(\frac{-b_i}{6 \cdot a_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \quad k74(i) := k47(i) \\
k48(i) &:= c22 \cdot \frac{-a_i}{6 \cdot b_i} + \frac{c23}{4} + \frac{c32}{4} + c33 \cdot \frac{-b_i}{6 \cdot a_i} \quad k84(i) := k48(i) \\
k55(i) &:= c11 \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} + c13 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c31 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c33 \cdot \left(\frac{a_i}{3 \cdot b_i}\right) \\
k56(i) &:= c12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c13 \cdot \left(\frac{b_i}{3 \cdot a_i}\right) + c32 \cdot \left(\frac{a_i}{3 \cdot b_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \quad k65(i) := k56(i) \\
k66(i) &:= c22 \cdot \frac{a_i}{3 \cdot b_i} + \frac{c23}{4} + \frac{c32}{4} + c33 \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} \\
k57(i) &:= c11 \cdot \frac{-b_i}{3 \cdot a_i} + c13 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c31 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c33 \cdot \left(\frac{a_i}{6 \cdot b_i}\right) \quad k75(i) := k57(i) \\
k58(i) &:= c12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + c13 \cdot \left(\frac{-b_i}{3 \cdot a_i}\right) + c32 \cdot \left(\frac{a_i}{6 \cdot b_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) \quad k85(i) := k58(i) \\
k67(i) &:= c21 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c23 \cdot \left(\frac{a_i}{6 \cdot b_i}\right) + c31 \cdot \left(\frac{-b_i}{3 \cdot a_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \quad k76(i) := k67(i) \\
k68(i) &:= c22 \cdot \frac{a_i}{6 \cdot b_i} + \frac{-c23}{4} + \frac{c32}{4} + c33 \cdot \frac{-b_i}{3 \cdot a_i} \quad k86(i) := k68(i)
\end{aligned}$$

$$k77(i) := c11 \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} + c13 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c31 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c33 \cdot \left(\frac{a_i}{3 \cdot b_i}\right)$$

$$k78(i) := c12 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + c13 \cdot \left(\frac{b_i}{3 \cdot a_i}\right) + c32 \cdot \left(\frac{a_i}{3 \cdot b_i}\right) + c33 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$k88(i) := c22 \cdot \frac{a_i}{3 \cdot b_i} + \frac{-c23}{4} + \frac{-c32}{4} + c33 \cdot \frac{b_i}{3 \cdot a_i} \quad k87(i) := k78(1)$$

$$Ke(i) := \begin{pmatrix} k11(i) & k12(i) & k13(i) & k14(i) & k15(i) & k16(i) & k17(i) & k18(i) \\ k21(i) & k22(i) & k23(i) & k24(i) & k25(i) & k26(i) & k27(i) & k28(i) \\ k31(i) & k32(i) & k33(i) & k34(i) & k35(i) & k36(i) & k37(i) & k38(i) \\ k41(i) & k42(i) & k43(i) & k44(i) & k45(i) & k46(i) & k47(i) & k48(i) \\ k51(i) & k52(i) & k53(i) & k54(i) & k55(i) & k56(i) & k57(i) & k58(i) \\ k61(i) & k62(i) & k63(i) & k64(i) & k65(i) & k66(i) & k67(i) & k68(i) \\ k71(i) & k72(i) & k73(i) & k74(i) & k75(i) & k76(i) & k77(i) & k78(i) \\ k81(i) & k82(i) & k83(i) & k84(i) & k85(i) & k86(i) & k87(i) & k88(i) \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$Top := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 & 15 & 18 & 22 & 23 & 25 & 26 & 28 & 29 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 & 15 & 17 & 18 & 22 & 23 & 25 & 26 & 28 & 29 & 31 & 32 \\ 5 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 & 15 & 17 & 18 & 20 & 21 & 23 & 24 & 26 & 27 & 29 & 30 & 32 & 33 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 & 19 & 20 & 18 & 21 & 23 & 24 & 26 & 27 & 29 & 30 \end{pmatrix}^T$$

Побудова матриці індексів $j := 1..4$

$$mi_{i,2:j-1} := 2 \cdot Top_{i,j} - 1$$

$$mi_{i,2:j} := 2 \cdot Top_{i,j}$$

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$i := 1..20 \quad k := 1..8 \quad j := 1..8$$

Формування матриці жорсткості

$$K_{(mi_{i,j}, mi_{i,k})} := K_{(mi_{i,j}, mi_{i,k})} + Ke(i)_{j,k}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	9	10	7	8
2	3	4	5	6	11	12	9	10
3	7	8	9	10	15	16	13	14
4	9	10	11	12	17	18	15	16
5	13	14	15	16	21	22	19	20
6	15	16	17	18	23	24	21	22
7	19	20	21	22	27	28	25	26
8	21	22	23	24	29	30	27	28
9	25	26	27	28	33	34	31	32
10	27	28	29	30	35	36	33	34
11	31	32	33	34	39	40	37	38
12	33	34	35	36	41	42	39	40
13	29	30	43	44	45	46	35	36
14	35	36	45	46	47	48	41	42
15	43	44	49	50	51	52	45	46
16	45	46	51	52	53	54	47	48
17	49	50	55	56	57	58	51	52
18	51	52	57	58	59	60	53	54
19	55	56	61	62	63	64	57	58
20	57	58	63	64	65	66	59	60

Вектор зовнішнього навантаження $FS_{60} := -1$

Редукція матриці жорсткості $KR := \text{submatrix}(K, 7, 66, 7, 66)$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь відносно переміщень вузлів

$$U := KR^{-1} \cdot FS$$

$$Nul_6 := 0 \quad US := \text{stack}(Nul, U)$$

$$u := US$$

	1
50	$-7.853 \cdot 10^{-10}$
51	$4.232 \cdot 10^{-10}$
52	$-7.863 \cdot 10^{-10}$
53	$6.479 \cdot 10^{-10}$
54	$-7.842 \cdot 10^{-10}$
55	$1.989 \cdot 10^{-10}$
56	$-1.012 \cdot 10^{-9}$
57	$4.215 \cdot 10^{-10}$
58	$-1.015 \cdot 10^{-9}$
59	$6.506 \cdot 10^{-10}$
60	$-1.024 \cdot 10^{-9}$

Побудова схеми деформування

$$\text{Top1} := (1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 6 \ 4 \ 7 \ 8 \ 5 \ 6 \ 9 \ 7 \ 10 \ 11 \ 8 \ 9 \ 12 \ 10 \ 13 \ 14 \ 11 \ 12 \ 15 \ 13 \ 16 \ 17 \ 14 \ 20)$$

$$\text{Top2} := (19 \ 16 \ 18 \ 21 \ 20 \ 24 \ 23 \ 18 \ 15 \ 22 \ 24 \ 27 \ 26 \ 23 \ 22 \ 25 \ 27 \ 30 \ 29 \ 26)$$

$$\text{Top3} := (25 \ 28 \ 30 \ 33 \ 32 \ 29 \ 28 \ 31 \ 33 \ 33)$$

$$\text{Top} := \text{augmen}(\text{Top1}, \text{Top2}, \text{Top3}) \quad \text{Top} := \text{Top}^T$$

$$\text{Nod1} := \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 2 & 2 & 2 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nod2} := \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 2 & 2 & 2 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2.5 & 3 & 2 & 2.5 & 3 & 2 & 2.5 & 3 & 2 & 2.5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nod} := \text{augmen}(\text{Nod1}, \text{Nod2})$$

$$s := (1..60) \quad ss := 1..33$$

$$x_s := \text{Nod}_{1, \text{Top}_s} \quad y_s := \text{Nod}_{2, \text{Top}_s} \quad ux_{ss} := u_{2 \cdot ss - 1} \quad uy_{ss} := u_{2 \cdot ss}$$

$$ud_s := ux_{(\text{Top}_s)} \quad vd_s := uy_{(\text{Top}_s)} \quad X := x + ud \cdot 10^8 \cdot 4 \quad Y := (y + vd \cdot 4 \cdot 10^8)$$

$$m_r := \quad n_r := \quad r := 1..6 \quad c := X_{60} \quad d := Y_{60}$$

c
c - 0.1
c
c + 0.1
c
c

d
d + 0.2
d
d + 0.2
d
d + 0.8

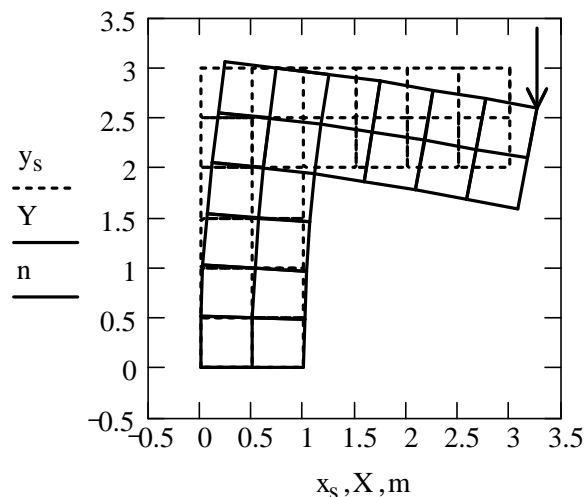


Схема переміщень вузлів

Визначення напружень

$$a1 := \frac{(1 - \nu)}{2} \quad ab(i) := \frac{a_i}{b_i} \quad \nu := 0.3$$

$$S(i) := \begin{pmatrix} -1 & ab(i) \cdot \nu & 1 & -ab(i) \cdot \nu & 1 & ab(i) \cdot \nu & -1 & ab(i) \cdot \nu \\ -\nu & ab(i) & \nu & -ab(i) & \nu & ab(i) & -\nu & ab(i) \\ -a1 \cdot ab(i) & -a1 & -a1 \cdot ab(i) & a1 & a1 \cdot ab(i) & a1 & a1 \cdot ab(i) & -a1 \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{2 \cdot a_i \cdot (1 - \nu^2)}$$

Напруження σ_x (Па) в елементах

	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\sigma =$	1	2.966	-3.932	7.961	-5.567	11.671	-5.64	14.997	-8.219
	2	6.455	-8.656	20.234	-10.376	33.726	-11.35	46.983	-13.819
	3	0.047	-0.047	-0.031	0.031	-0.062	0.062	0.731	-0.731

	7	8	9	10	11	12	13	14	
$\sigma =$	1	14.997	-8.219	17.79	-5.218	20.497	2.641	-26.467	-16.668
	2	46.983	-13.819	56.947	-8.36	62.947	-2.378	-70.44	-69.963
	3	0.731	-0.731	2.282	2.3	1.565	1.853	-1.72	-0.28

	13	14	15	16	17	18	19	20	
$\sigma =$	1	-26.467	-16.668	-49.892	-42.339	-76.255	-71.542	-104.836	-103.946
	2	-70.44	-69.963	-155.314	-152.244	-247.586	-245.419	-346.418	-347.194
	3	-1.72	-0.28	-0.883	-1.117	-1.133	-0.867	-0.845	-1.155

4.4. Використання автоматичної побудови сітки скінченних елементів для плоских пластинчатих конструкцій

У більшості прикладів розрахунків, що розглядаються у посібнику, кількість елементів, на які розділяються конструкції, вибирається невеликою, що дозволяє побудувати сітку скінченних елементів „вручну”.

Це пов'язано з тим, що наведені приклади є, в основному, демонстраційними і призначені для ознайомлення з внутрішньою структурою методу скінченних елементів і проблемами, які постають при розв'язанні конкретних задач. Розв'язання практичних задач аналізу конструкцій за допомогою методу скінченних елементів потребує розгляду моделей зі значно більшою кількістю елементів. Найбільш трудомісткою операцією при підготовці даних є розділення на скінченні елементи (побудова сітки скінченних елементів). Для її реалізації розроблено багато алгоритмів [15]. Більшість із них потребує професійного і достатньо

громіздкого програмного забезпечення. Нижче наведені два приклади, які використовують алгоритм прямої триангуляції [16]. Процедура побудови сітки базується на послідовному заповненні плоскої області елементами від її границі, яка попередньо розділяється на задану кількість відрізків. Згідно з алгоритмом будуються масиви координат вузлових точок X і Y , а також список елементів сітки, в якому кожному трикутному елементу ставиться у відповідність три числа – номери вузлів, які є вершинами даного трикутника. До форми трикутних елементів ставиться ряд умов, які гарантують відсутність елементів із кутами, меншими тридцяти і більшими дев'яноста градусів.

ПРИКЛАД 4.3. Визначення напружень у пластині, навантаженій силою у її площині (рис. 4.7).

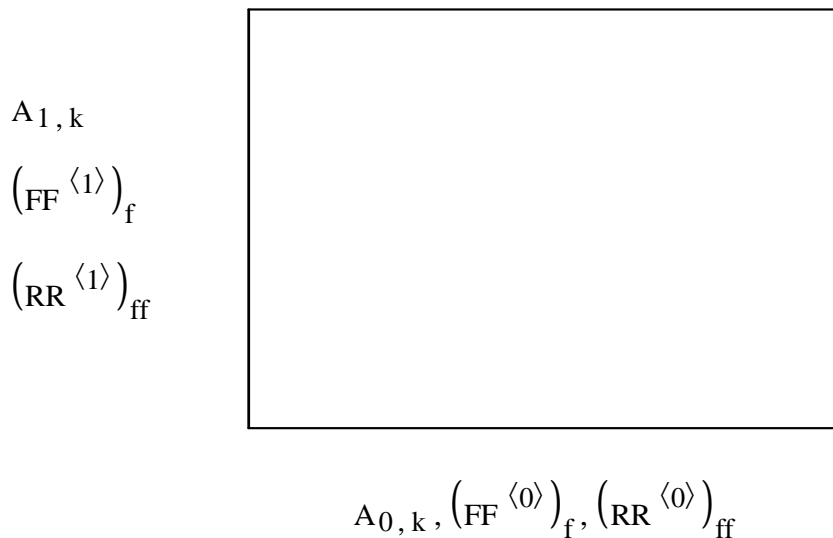


Рис. 4.7. Схема навантаження пластини

Вхідними даними для розділення на трикутні елементи є координати початкових точок контуру

$$\text{in} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

і кількість відрізків, на які поділяється довжина відрізка між початковими точками, $k = 1/m$ (у даному прикладі прийнято $m = 0.2$).

Довжина відрізка між точками з координатами X_0, Y_0 і X_1, Y_1

$$\text{line_len}(X, Y) := \sqrt{(X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2}$$

Обчислення кута між двома відрізками. Точки трикутника обходяться за годинниковою стрілкою

$$\text{ap}(X, Y, Z) := \left\{ \begin{array}{l} a \leftarrow \text{line_len}(X, Y) \\ b \leftarrow \text{line_len}(Y, Z) \\ c \leftarrow \text{line_len}(X, Z) \\ \cos \leftarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \\ \text{al} \leftarrow \text{acos}(\cos) \text{ if } X_0 \cdot (Y_1 - Z_1) + Y_0 \cdot (Z_1 - X_1) + Z_0 \cdot (X_1 - Y_1) < 0 \\ \text{al} \leftarrow \pi \cdot 3 \text{ otherwise} \\ \text{ap} \leftarrow \text{al} \end{array} \right.$$

Обчислення координат точок, які ділять заданий відрізок на n частин

$$\text{cut}(X, Y, \text{melk}) := \left\{ \begin{array}{l} l \leftarrow \text{line_len}(X, Y) \\ n \leftarrow \text{ceil}\left(\frac{l}{\text{melk}}\right) \\ \text{RES} \leftarrow X \\ \text{for } i \in 1..n-1 \quad \text{if } n > 1 \\ \quad \text{RES} \leftarrow \text{augmen}\left[\text{RES}, X + \frac{(Y - X) \cdot i}{n}\right] \\ \text{cut} \leftarrow \text{RES} \end{array} \right.$$

Видалення точки з масиву точок

$$\text{dc}(M, i) := \left\{ \begin{array}{l} \text{dc} \leftarrow \text{submatrix}(M, 0, \text{rows}(M) - 1, 1, \text{cols}(M) - 1) \text{ if } i = 0 \\ \text{otherwise} \\ \quad \text{dc} \leftarrow \text{submatrix}(M, 0, \text{rows}(M) - 1, 0, \text{cols}(M) - 2) \text{ if } i = \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \text{otherwise} \\ \quad \quad \text{dc1} \leftarrow \text{submatrix}(M, 0, \text{rows}(M) - 1, 0, i - 1) \\ \quad \quad \text{dc2} \leftarrow \text{submatrix}(M, 0, \text{rows}(M) - 1, i + 1, \text{cols}(M) - 1) \\ \quad \quad \text{dc} \leftarrow \text{augmen}(\text{dc1}, \text{dc2}) \end{array} \right.$$

Одержання масиву точок на контурі фігури з урахуванням значення m

$$\text{cut_ring}(M, \text{melk}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{RES} \leftarrow \text{cut}(M^{(0)}, M^{(1)}, \text{melk}) \\ \text{for } i \in 1.. \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \text{RES} \leftarrow \text{augmen}(\text{RES}, \text{cut}(M^{(i)}, M^{(\text{mod}(i+1, \text{cols}(M)))}, \text{melk})) \\ \text{cut_ring} \leftarrow \text{RES} \end{array} \right.$$

Програма триангуляції має вигляд

```

i(M) = nodes_left = cols(M), for i ∈ 0..nodes_left- 1
      WORKi ← i
      ntr ← 0
      while nodes_left > 3
        a ← last(WORK), ma ← ap[ M⟨WORKa⟩, M⟨WORK0⟩, M⟨WORK1⟩ ]
        ma ← ap[ M⟨WORKa⟩, M⟨WORK0⟩, M⟨WORK1⟩ ], min_point ← 0
        for i ∈ 1..nodes_left- 1
          angle_i ← ap( M⟨WORKi-1⟩, M⟨WORKi⟩, M⟨WORKmod(i+1,nodes_left)⟩ )
          ma ← angle_i, min_point ← i if angle_i < ma
        T1 ← M⟨WORKmod(min_point+nodes_left-1,nodes_left)⟩
        T2 ← M⟨WORKmin_point⟩, T3 ← M⟨WORKmod(min_point+1,nodes_left)⟩
        if ma ≤  $\frac{\pi}{3}$  ∨  $\left[ ma < \frac{\pi}{2} \wedge \left( ap(T2, T1, T3) \geq \frac{\pi}{6} \wedge ap(T2, T3, T1) \geq \frac{\pi}{6} \right) \right]$ 
          TRntr, 0 ← WORKmod(min_point+nodes_left-1, nodes_left)
          TRntr, 1 ← WORKmin_point, TRntr, 2 ← WORKmod(min_point+1, nodes_left)
          ntr ← ntr + 1, WORK ← dc( WORKT, min_pointT, nodes_left ← nodes_left - 1 )
        otherwise
          alpha ←  $\frac{ma}{2} + \text{angle} \left[ (T1 - T2)_0, (T1 - T2)_1 \right]$ 
          r ←  $\frac{\text{line\_len}(T1, T2) + \text{line\_len}(T2, T3)}{2}$ 
          T40 ← T20 + r · cos(alpha), T41 ← T21 + r · sin(alpha)
          TRntr, 0 ← WORKmod(min_point+nodes_left-1, nodes_left)
          TRntr, 1 ← WORKmin_point, TRntr, 2 ← cols(M), ntr ← ntr + 1
          TRntr, 0 ← WORKmin_point, TRntr, 1 ← WORKmod(min_point+1, nodes_left)
          TRntr, 2 ← cols(M), ntr ← ntr + 1, M ← augmen(M, T4)
          WORKmin_point ← cols(M) - 1
        TRntr, 0 ← WORK0, TRntr, 1 ← WORK1, TRntr, 2 ← WORK2
        for i ∈ 0..cols(M) - 1
          M2, i ← cols(M)
        t ← augmen( M, TRT )

```

(Для користування програмою триангуляції, наведеній на попередній сторінці, необхідно залишити по одному оператору у кожному рядку, перенісши записані через кому оператори у нові рядки).

Вузлові точки, одержані у результаті роботи програми триангуляції, показано на рис. 4.8.

```
B = t(A)
k := 0..650
```

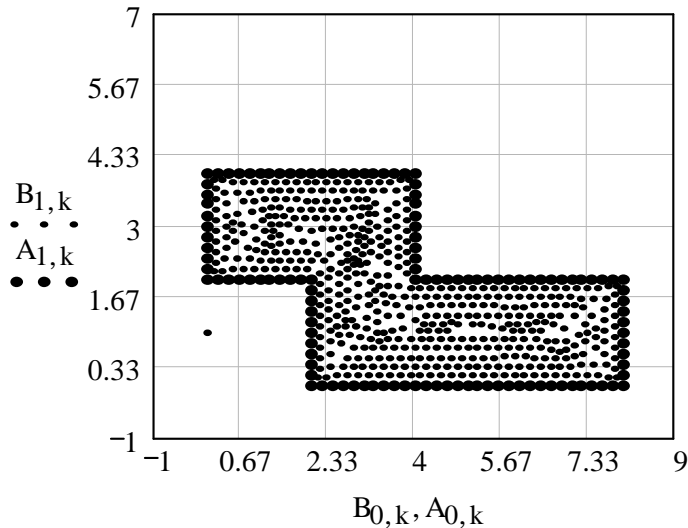


Рис. 4.8. Вузлові точки, одержані у результаті роботи програми триангуляції

Побудова сітки скінченних елементів (рис.4.9).

```
Nodes := submatrix(B, 0, 1, 0, 626)
```

```
Top := submatrix(B, 0, 2, 627, 1758)T
```

Nodes =

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
1	4	4	4	4	4	4	4	4

Top^T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	119	0	19	20	49	50	59	60	89	90
1	0	1	20	21	50	51	60	61	90	91
2	120	120	121	121	122	122	123	123	124	124

```
cols(Top) = 3
```

```
j := 0..cols(Top) - 1
```

```
ie := 0..rows(Top) - 1
```

```
rows(Top) = 1.132 × 103
```

Координати вузлів елементів

```
Xnj,ie := Nodes0,(Topie,j)      Ynj,ie := Nodes1,(Topie,j)
```

```
Iie := 108
```

```
XN := augment[ XnT, (XnT)<0>, I ]      YN := augment[ YnT, (YnT)<0>, I ]
```

$m := 0..rows(Top)$ $n := 0..cols(Top) + 2$

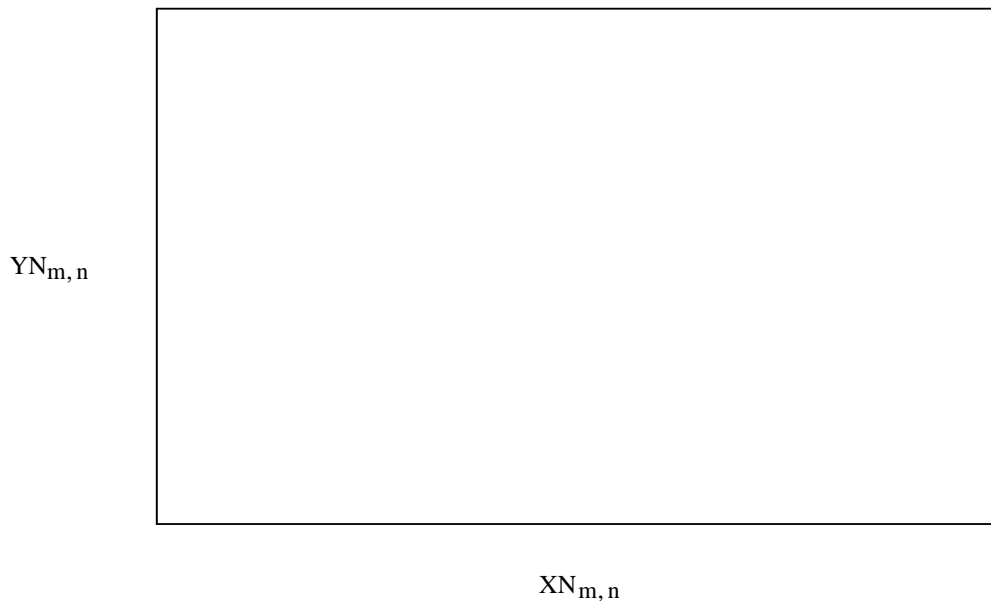


Рис. 4.9. Побудова сітки скінченних елементів

Розрахунок напружень у пластині

$NOD := Nodes$

$cols(NOD) = 627$ $rows(NOD) = 2$

Товщина пластини $h := 0.04$

Топологічна матриця

$TOP := Top$

$rows(TOP) = 1.132 \times 10^3$ $i := 0..1131$

$cols(TOP) = 3$ $j := 0..2$

Модуль пружності $E := 2 \cdot 10^{11}$

Коефіцієнт Пуассона $\nu := 0.3$

Модуль зсуву $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

Координати вузлів кожного елемента

$X_{j,i} := NOD_{0, TOP_{i,j}}$ $Y_{j,i} := NOD_{1, TOP_{i,j}}$

Формування матриці жорсткості елемента

$x01(i) := X_{0,i} - X_{1,i}$ $x02(i) := X_{0,i} - X_{2,i}$ $x12(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$

$x20(i) := -x02(i)$ $x10(i) := -x01(i)$ $x21(i) := -x12(i)$

$y01(i) := Y_{0,i} - Y_{1,i}$ $y12(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i}$ $y02(i) := Y_{0,i} - Y_{2,i}$

$y10(i) := -y01(i)$ $y21(i) := -y12(i)$ $y20(i) := -y02(i)$

$A(i) := \left| \frac{x12(i) \cdot y20(i) - x20(i) \cdot y12(i)}{2} \right|$

$$B(i) := \begin{pmatrix} y12(i) & 0 & y20(i) & 0 & y01(i) & 0 \\ 0 & x21(i) & 0 & x02(i) & 0 & x10(i) \\ x21(i) & y12(i) & x02(i) & y20(i) & x10(i) & y01(i) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

$$K_e(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot h \cdot A(i)$$

Фізичні залежності

$$D := \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1 - (\nu)^2}$$

Формування матриці індексів

$$m_{i,(2;j)} := 2 \cdot TOP_{i,j} \quad m_{i,2;j+1} := 2 \cdot TOP_{i,j} + 1$$

Формування матриці жорсткості пластини

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$\max(mi) = 1.253 \times 10^3$$

$$k := 0..5 \quad p := 0..5$$

$$K_{m_{i,p}, m_{i,k}} := K_{m_{i,p}, m_{i,k}} + (K_e(i))_{p,k}$$

Вектор вузлових сил (сила діє на координату 101)

$$FS_{101} := -100$$

$$FS_{\max(mi)-20} := 0$$

$$r := 0.. \text{cols}(NOD) - 1$$

Закріплені точки відрізка 110-0 , навантаження прикладене по координаті 50

NOD_{1,r}NOD_{1,50}NOD_{1,0}NOD_{1,110}NOD_{0,r}, NOD_{0,50}, NOD_{0,0}, NOD_{0,110}

Редукція матриці жорсткості з урахуванням умов закріплення

$K1 := \text{stack}(\text{submatrix}(K, 0, 219, 0, 219), \text{submatrix}(K, 240, 1253, 0, 219))$

$K2 := \text{stack}(\text{submatrix}(K, 0, 219, 240, 1253), \text{submatrix}(K, 240, 1253, 240, 1253))$

Редуційована матриця жорсткості

$K0 := \text{augment}(K1, K2)$

Розв'язок відносно вузлових переміщень

$U := K0^{-1} \cdot FS$

Повний вектор переміщень

$NUL_{19} := 0$

$US := \text{stack}(\text{submatrix}(U, 0, 219, 0, 0), NUL, \text{submatrix}(U, 220, 1233, 0, 0))$

$$a := \frac{(1 - \nu)}{2}$$

$$b(i) := \frac{E}{2 \cdot A(i) \cdot (1 - \nu^2)}$$

$$E_{\sigma}(i) := b(i) \cdot \begin{pmatrix} y_{12}(i) & -\nu \cdot x_{12}(i) & y_{20}(i) & -\nu \cdot x_{20}(i) & -y_{10}(i) & \nu \cdot x_{10}(i) \\ \nu \cdot y_{12}(i) & -x_{12}(i) & \nu \cdot y_{20}(i) & -x_{20}(i) & -\nu \cdot y_{10}(i) & x_{10}(i) \\ -a \cdot x_{12}(i) & a \cdot y_{12}(i) & -a \cdot x_{20}(i) & a \cdot y_{20}(i) & a \cdot x_{10}(i) & -a \cdot y_{10}(i) \end{pmatrix}$$

Переміщення вузлових точок кожного елемента

$j := 0..5$

$$W_{i,j} := US_{mi,j} \quad WT := W^T$$

Визначення напружень у елементах (Кожний стовпець у матриці σ вміщує нормальні напруження σ_x і σ_y , а також дотичне напруження τ_{xy}).

$$\sigma^{(i)} := E_{\sigma}(i) \cdot WT^{(i)}$$

$\sigma = \blacksquare$

Для побудови графіка розподілення напружень по пластині визначаємо центри мас скінченних елементів

```

MXY :=
  for i ∈ 0..rows(TOP) - 1
    for j ∈ 0..2
      vj ← TOPi,j
      for j ∈ 0..2
        xj ← NOD0,vj
        yj ← NOD1,vj
      xmi ← mean(x)
      ymi ← mean(y)
    MXY ← augment(xm, ym)

```

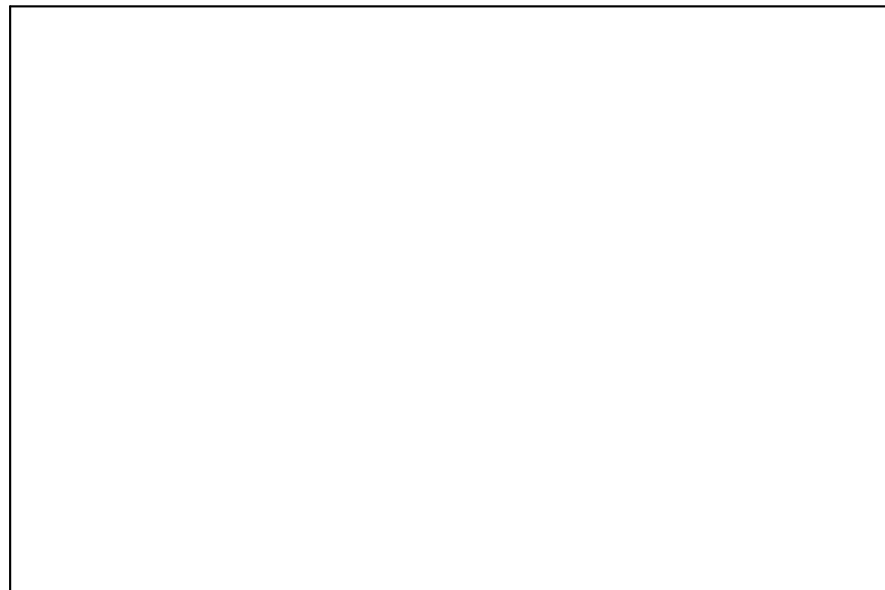
$$MX := MXY^{(0)} \quad MY := MXY^{(1)}$$

$$\text{rows}(MX) = 1.132 \times 10^3$$

$$\sigma_x := (\sigma^T)^{(0)} \quad \sigma_y := (\sigma^T)^{(1)} \quad \tau_{xy} := (\sigma^T)^{(2)}$$

$$\text{cols}(\sigma) = 1.132 \times 10^3$$

MY_i



MX_i

Еквівалентне напруження за третьою гіпотезою міцності

$$\sigma_{\text{ekv}}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	$2.84 \cdot 10^4$	$7.804 \cdot 10^3$	299.633	298.205	$1.882 \cdot 10^4$	$2.514 \cdot 10^4$	125.692

$$\text{MXY}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.047	0.114	3.886	3.953	7.886	7.953	7.953	7.886	2.114	2.047
1	3.886	3.953	3.953	3.886	1.953	1.886	0.114	0.047	0.047	0.114

Побудова графіка розподілення еквівалентних напружень (рис. 4.10).

$V := \sigma_{\text{ekv}}$

$M := \text{MXY} \quad n := 2 \quad R := \text{regress}(M, V, n)$

$f(x, y) := \text{interp} \left[R, M, V, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$

$x2 := 8.5$

$\text{fr}(x, y) := \begin{cases} \text{fr} \leftarrow f(x, y) \\ \text{fr} \leftarrow \text{if}[(0 \leq x \leq 2 \wedge 2 \leq y \leq 4) \vee (2 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 4) \vee (4 \leq x \leq 8 \wedge 0 \leq y \leq 2), \text{fr}, 0] \end{cases}$

$x1 := -0.5$

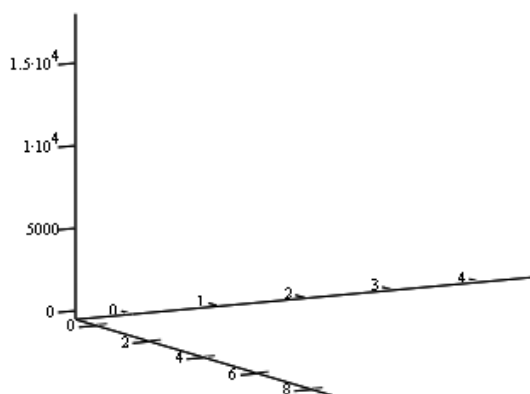
$y2 := 4.5$

$nx := 250$

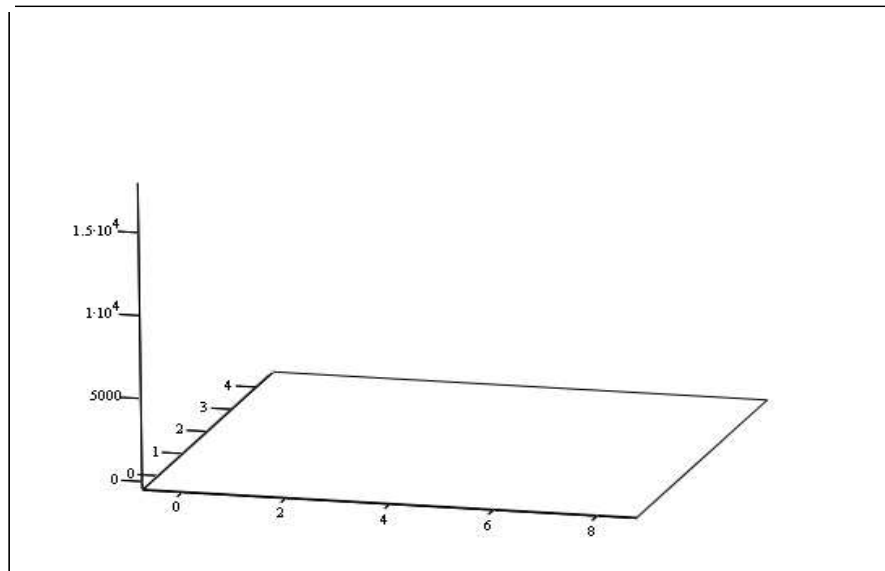
$ny := 250$

$\text{FR} := \text{CreateMesh}(\text{fr}, x1, x2, y1, y2, nx, ny)$

$y1 := -0.5$



FR



FR

Рис.4.10. Графік розподілення напружень

Приклад 4.4. Визначення напружень у перерізі стержня при крученні.

Задано форму, розміри перерізу і кут, на який закручується стержень. Вузлові точки, одержані у результаті триангуляції площі перерізу (квадрат 4×4) у відповідності з наведеною у попередньому прикладі програмою (рис. 4.11), розміщено у числових файлах: Nod (масив координат x і y у вузлових точок трикутних скінченних елементів) і Top (топологічна матриця з координатами вузлів кожного елемента у відповідності з глобальною нумерацією вузлів).

Масив вузлових точок

```
NOD := READPRN("Nodes5.prn" )
```

Топологічна матриця

```
TOP := READPRN("TOP5.prn" )
```

```
NV := cols(TOP)    NV = 3    NE := rows(TOP)    NE = 140
```

```
NOD = ■
```

```
TOPT = ■
```

Коефіцієнт Пуассона

```
v := 0.3
```

Модуль зсуву (Н/см²)

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + v)}$$

Модуль пружності (Н/см²)

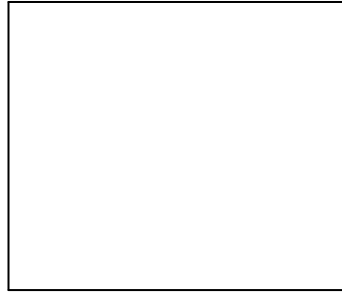
$$E := 1 \cdot 10^7$$

Відносний кут закручування (град/м)

$$\theta := 1 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$i := 0..139 \quad j := 0..2$$

$(\text{NOD}^T)^{(1)}$



$(\text{NOD}^T)^{(0)}$

Рис. 4.11. Вузлові точки, одержані в результаті триангуляції

Координати вузлів кожного елемента

$$X_{j,i} := \text{NOD}_{0, \text{TOP}_{i,j}} \quad Y_{j,i} := \text{NOD}_{1, \text{TOP}_{i,j}}$$

Формування матриці жорсткості елемента

$$x20(i) := -x02(i) \quad x02(i) := X_{0,i} - X_{2,i} \quad x12(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$$

$$x01(i) := X_{0,i} - X_{1,i} \quad x10(i) := -x01(i) \quad x21(i) := -x12(i)$$

$$y01(i) := Y_{0,i} - Y_{1,i} \quad y12(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i} \quad y02(i) := Y_{0,i} - Y_{2,i}$$

$$y10(i) := -y01(i) \quad y21(i) := -y12(i) \quad y20(i) := -y02(i)$$

$$A(i) := \left| \frac{x12(i) \cdot y20(i) - x20(i) \cdot y12(i)}{2} \right| \quad B(i) := \begin{pmatrix} y12(i) & y20(i) & y01(i) \\ x21(i) & x02(i) & x10(i) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента

$$Ke(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot A(i)$$

Матриця індексів $mi := \text{TOP}$

Формування глобальної матриці жорсткості

$$p := 0..2 \quad k := 0..2$$

$$\max(mi) = 86$$

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := C$$

$$K_{mi_i, p, mi_i, k} := K_{mi_i, p, mi_i, k} + (Ke(i))_{p, k}$$

$$\text{last}(K^{(0)}) = 86$$

Врахування граничних умов на контурі

$$K1 := \text{submatrix}(K, 32, 86, 32, 86)$$

$$\text{last}(K1^{(0)}) = 54$$

Вектор навантажень у елементах відповідний куту закручування 1 градус/м

$$Fe(i) := 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \frac{A(i)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор навантажень для системи елементів

$$F_{\max(mi)} := 0 \quad F_{(mi,j)} := F_{(mi,j)} + Fe(i)_j$$

$$\text{last}(F) = 86 \quad F1 := \text{submatrix}(F, 32, 86, 0, 0)$$

Значення функції напружень у вузлах у відповідності з нумерацією

$$\Phi1 := K1^{-1} \cdot F1 \quad \text{Nul}_{31} := 0$$

$$\Phi := \text{stack}(\text{Nul}, \Phi1) \quad \text{last}(\Phi) = 86$$

Значення функції напружень у вузлах кожного елемента

$$k := 0.. NE - 1 \quad j := 0.. 2$$

$$\Phi_{e,j,k} := \Phi_{(mi_k,j)}$$

Дотичні напруження в елементах (сталі для кожного елемента)

$$\tau_{el}^{(k)} := B(k) \cdot \Phi_{e}^{(k)}$$

$$T := 2 \int \Phi \, dA$$

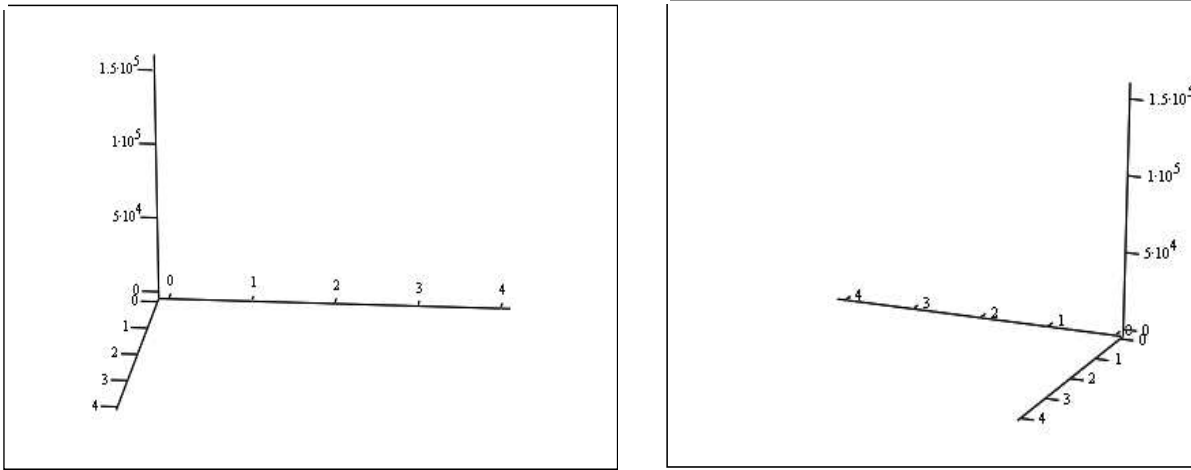
момент кручення (інтеграл обчислюється по площі поперечного перерізу).

$$T := \sum_{k=0}^{139} \frac{2}{3} \cdot A(k) \cdot \Phi_{e}^{(k)T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \blacksquare \quad \text{НСМ}$$

Побудова поверхні функції напружень (рис. 4.12).

$$Ny := (\text{NOD}^T)^{(0)} \quad Nz := (\text{NOD}^T)^{(1)}$$



(Ny, Nz, Φ)

(Ny, Nz, Φ)

Рис. 4.12. Поверхня функції напружень

Побудова графіка розподілення напружень у перерізі (рис. 4.13).

Обчислення положення центрів мас трикутних елементів

```

MXY := for i ∈ 0..rows(TOP) - 1
      for j ∈ 0..2
        v_j ← TOP_{i,j}
        for j ∈ 0..2
          x_j ← NOD_{0,v_j}
          y_j ← NOD_{1,v_j}
          xm_1 ← mean(x)
          ym_1 ← mean(y)
        MXY ← augment(xm, ym)

```

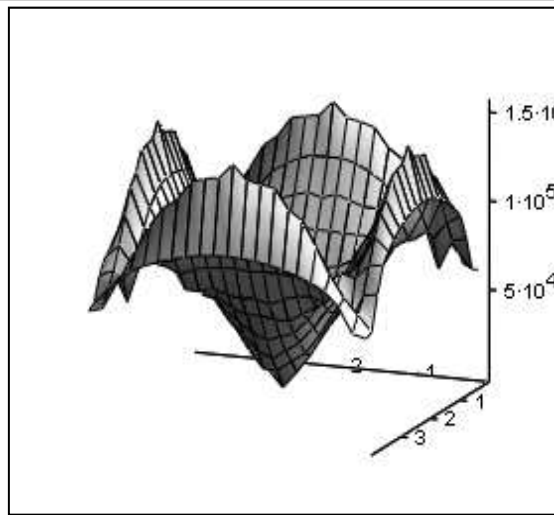
```

MY := MXY^{(1)}    MX := MXY^{(0)}
rows(MX) = 140

```

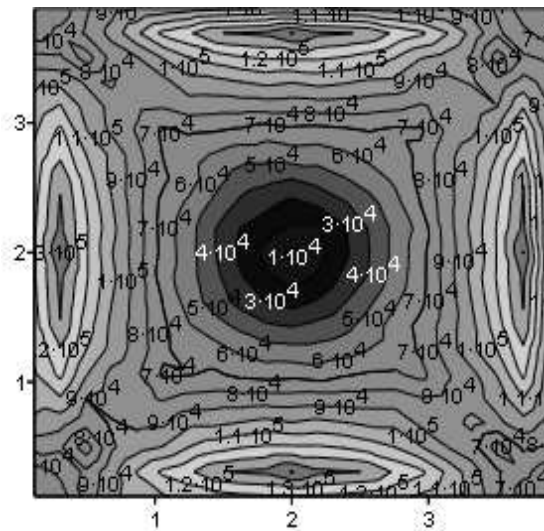
Дотичні напруження

$$\tau_{xy} := (\tau_{el}^T)^{(0)} \quad \tau_{xz} := (\tau_{el}^T)^{(1)} \quad \tau_{\Sigma} := \sqrt{(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}$$



(MX, MY, τ_Σ)

a



(MX, MY, τ_Σ)

б

Рис. 4.13. Поверхня сумарних дотичних напружень (*a*); контурний графік сумарних напружень (*б*)

Таблиця значень сумарних дотичних напружень Н/см²

$$\tau_\Sigma^T = \mathbf{I}$$

РОЗДІЛ 5

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

5.1. Основні рівняння згину прямокутних пластин

Розглянемо тонку^{*)} пластину, віднесену до прямокутної системи координат x, y, z (рис. 5.1).

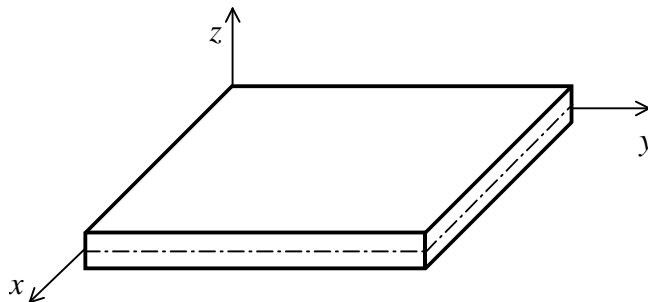


Рис. 5.1. Тонка пластина

Координатною будемо називати площину, рівновіддалену від зовнішніх площин, що утворюють пластину. Рівняння, що описують переміщення точок пластини, будуються на основі таких гіпотез:

1) Нормальний до серединної площини прямолінійний елемент у процесі деформування залишається прямолінійним, нормальним до деформованої серединної поверхні і зберігає свою довжину. Звідси випливає, що деформації $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \epsilon_z$ є нульовими.

2) Нормальні напруження σ_z малі порівняно з іншими компонентами тензора напружень, і їх можна не враховувати у фізичних залежностях.

У зв'язку з тим, що прогини вважаються малими і задача лінійною, серединна поверхня пластини при згині залишається недеформованою у своїй площині, тобто $u_0 = v_0 = 0$.

На основі першої гіпотези маємо

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.1)$$

^{*)} Тонкою можна вважати пластину, у якій товщина не перевищує 1/10 від меншого габаритного розміру.

Інтегруючи перші два рівняння, знайдемо вирази для переміщень шару, що знаходиться на відстані z від серединного

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + C_1(x, y), \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + C_2(x, y). \quad (5.2)$$

З урахуванням недеформівності серединної площини ($u_0 = v_0 = 0$) рівняння (5.2) спрощуються

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Відносні деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ визначаються з рівнянь Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.4)$$

З урахуванням гіпотези про малість напруження σ_z рівняння закону Гука будуть такими:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Інтегруванням по товщині одержимо згинаючі моменти M_x, M_y і момент кручення M_{xy}

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (5.6)$$

Після підстановки (5.5) у (5.6) одержимо

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Порівнюючи (5.5) і (5.7), одержимо напруження

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Розглянемо рівновагу елемента пластини (рис. 5.2). Вздовж осі z на пластину діє поперечне розподілене навантаження p_z . На гранях елемента діють згинаючі моменти і момент кручення, а також поперечні сили Q_x і Q_y .

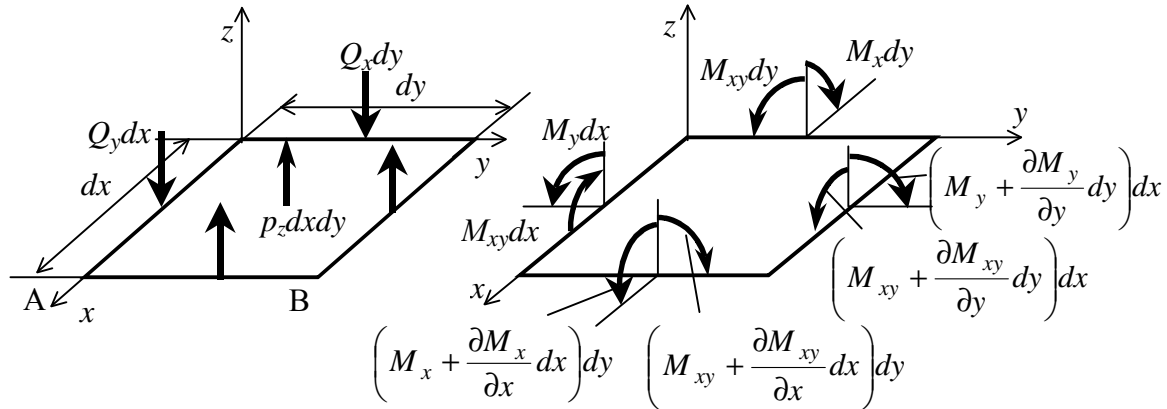


Рис. 5.2. Внутрішні сили у поперечних перерізах пластини

Рівняння рівноваги елемента, зокрема, сума проєкцій на вісь z , має вигляд

$$-p_z dxdy + \partial Q_x dy + \partial Q_y dx = 0. \quad (5.9)$$

Розділивши на $dxdy$, одержимо

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = p_z. \quad (5.10)$$

Ще два рівняння одержимо, записуючи рівність нулю сумарного момента усіх сил відносно осей AB і BC . Зокрема, умова $\sum m_{AB} = 0$ запишеться так:

$$(Q_x dy) dx - \partial M_x dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy dx + p_z dxdy \frac{dx}{2} = 0. \quad (5.11)$$

Відкинувши останній доданок як нескінченно малу величину другого порядку малості і розділивши на $dxdy$, одержимо

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y. \quad (5.12)$$

Щоб одержати рівняння для прогину, підставимо значення моментів M_x, M_y, M_{xy} у рівняння (5.12), після чого одержані вирази Q_x і Q_y через прогин підставимо у (5.10).

У результаті матимемо таке рівняння:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}, \quad (5.13)$$

де
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

При розв'язанні цього рівняння необхідно враховувати граничні умови (рис. 5.3).

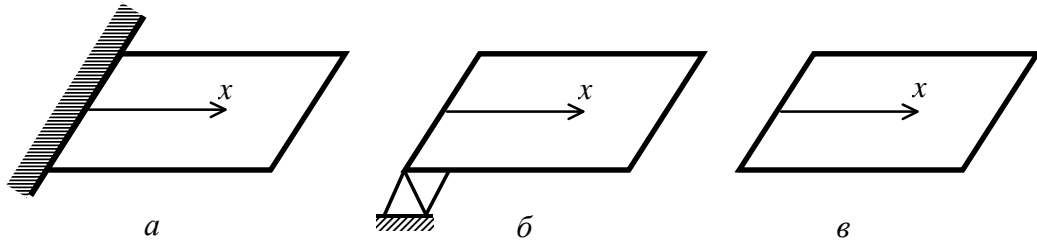


Рис. 5.3. Схеми закріплень: жорстке закріплення (а); шарнірне закріплення (б); вільний край (в)

Для жорсткого закріплення краю (рис. 5.3, а)

$$x=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0.$$

Для шарнірного закріплення краю (рис. 5.3, б)

$$x=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0.$$

Граничні умови для інших способів закріплень формулюються складніше. Наприклад, для вільного краю (рис. 5.3, в) записується рівність нулю приведеної поперечної сили, що враховує саму силу Q_x і момент кручення M_{xy}

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (5.14)$$

Такі ж умови можна записати для країв $y=0$, $x=a$, $y=b$ (a , b – розміри пластини).

Розв'язок рівняння (5.13) в аналітичній формі для пластин складної конфігурації одержати важко. Тільки для деяких умов закріплення пластин прямокутної форми можна побудувати розв'язок у формі ряду. Наприклад, для шарнірно закріпленої пластини, завантаженої тиском p_z , можна знайти розв'язок у вигляді ряду

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.15)$$

Для цього необхідно навантаження p_z розкласти в подвійний ряд Фур'є

$$p_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.16)$$

Для $p_z = const$ коефіцієнти ряду $p_{mn} = 16p / m\pi^2$.

Коефіцієнти A_{mn} одержимо після підстановки (5.15) і (5.16) у рівняння (5.13)

$$A_{mn} = \frac{16p}{m\pi^2 D} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-2}. \quad (5.17)$$

Значення моментів і напружень визначаються після підстановки виразу для w , відповідно, у формули (5.5) і (5.7).

Аналітичний розв'язок можна одержати також у випадку, коли два протилежних краї прямокутної пластини мають шарнірні опори (рис. 5.4).

Якщо опори розміщені на краях $y=0$ і $y=b$, то розв'язок представляють у формі одинарного ряду

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.18)$$

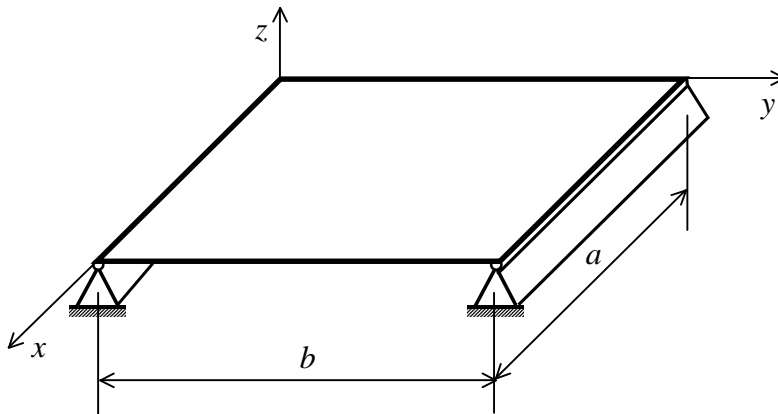


Рис. 5.4. Пластина з двома шарнірно закріпленими краями

Записуючи в такій же формі і навантаження і підставляючи в рівняння (5.13), після скорочення на $\sin \frac{n\pi y}{b}$ одержимо для кожного w_n звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 w_n}{dx^2} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 w_n = \frac{p_z}{D}. \quad (5.19)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$w_n = C_{1n} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + C_{2n} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + C_{3n} x \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + C_{4n} x \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + w_{nr}. \quad (5.20)$$

Частинний розв'язок w_{nr} залежить від вигляду правої частини рівняння (5.19). Для навантаження, що не змінюється вздовж осі y , –

$$w_{nr} = p_n b^4 / (n^4 \pi^4 D),$$

де p_n – коефіцієнт розкладення в ряд навантаження p_z .

Сталі $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ визначаються з умов закріплення країв $x = 0, x = a$.

Загальний розв'язок шукається згідно з (5.20).

5.2. Застосування МСЕ до розрахунку пластин

При використанні МСЕ для розв'язку задач згину пластин застосовується така ж дискретизація, яка розглядалась вище у плоскій задачі теорії пружності: пластину моделюють у вигляді сукупності плоских скінченних елементів. Найчастіше використовують прямокутні і трикутні елементи.

Розглянемо прямокутний елемент пластини з 12 ступенями вільності.

У кожній вузловій точці елемента (рис. 5.5) вводять по три узагальнені переміщення: переміщення у напрямку осі z і два кутові відносно осей x і y (позначені подвійними стрілками).

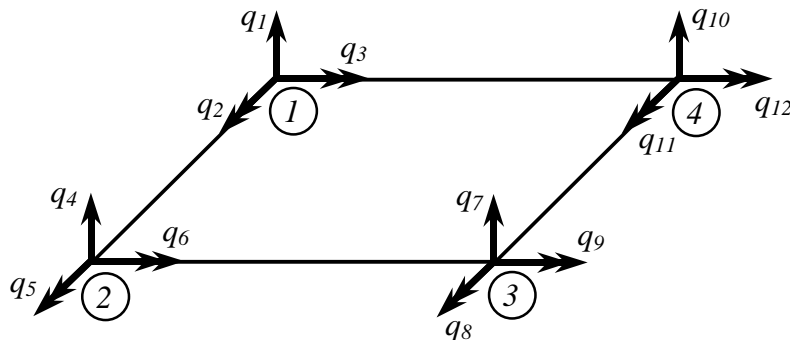


Рис. 5.5. Скінченний елемент пластини

Таким чином, положення серединної поверхні прямокутного елемента пластини визначиться 12 узагальненими координатами. Прогин пластини можна апроксимувати поліномом з 12 невідомими параметрами

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (5.21)$$

Використання цього полінома забезпечує неперервність переміщень, але приводить до порушення неперервності кутів повороту суміжних елементів [36].

Якщо визначити коефіцієнти α_i через узагальнені координати, скориставшись умовами

$$q_1 = w(0,0), \quad q_2 = \frac{\partial w}{\partial y}(0,0), \quad q_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,0), \quad \dots, \quad q_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,b), \quad (5.22)$$

одержимо після підстановки значень α_i і компонування виразу (5.21)

відносно q_i

$$w(x, y) = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (5.23)$$

де \mathbf{N} – матриця функцій Ерміта;

\mathbf{q} – вектор вузлових переміщень;

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{12}],$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$N_2 = a \left(\frac{y}{b} - 1\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 \frac{x}{a}, \quad N_3 = b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \frac{y}{b},$$

$$N_4 = 2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x}{a} \left(\frac{2x}{3a} + \frac{1y}{2b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$N_5 = a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x^2}{a^2}, \quad N_6 = b \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \frac{xy}{ab},$$

$$N_7 = \frac{xy}{ab} \left(3\frac{x}{a} + 3\frac{y}{b} - 1 - 2\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2}\right), \quad (5.24)$$

$$N_8 = -a \frac{x^2}{a^2} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad N_9 = b \frac{y^2}{b^2} \frac{x}{a} \left(\frac{y}{b} - 1\right),$$

$$N_{10} = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + 3\frac{y}{b} - 2\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$N_{11} = a \frac{xy}{ab} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2, \quad N_{12} = -b \frac{y^2}{b^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$\mathbf{q} = \left[w_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_1 \ w_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_2 \ w_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_3 \ w_4 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_4 \right]^T =$$

$$= (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{12})^T. \quad (5.25)$$

Матрицю жорсткості елемента одержимо, записуючи потенціальну енергію деформації у вигляді квадратичної форми

$$\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (5.26)$$

Напруження і деформації визначаються через прогин залежностями (5.4), (5.5). Підставляючи їх значення у (5.26), після інтегрування по z одержимо

$$\mathbf{K} = \int_0^b \int_0^a D \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (5.27)$$

Складові вузлових сил, відповідні навантаженню p ,

$$\mathbf{F} = \int_0^b \int_0^a \mathbf{N}^T p dx dy. \quad (5.28)$$

Компоненти матриць одержимо після визначення похідних та інтегрування (5.27) і (5.28). Згідно з [36], матриця \mathbf{K} має такий вигляд:

$$\mathbf{K} = \frac{D}{ab} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_2 & a_{15} & a_7 & a_{16} & a_{17} & a_{10} & a_{18} & a_{17} & a_{13} & a_{19} & a_{17} \\ & & a_3 & -a_8 & a_{17} & a_{20} & -a_{11} & a_{17} & a_{21} & a_{14} & a_{17} & a_{12} \\ & & & a_1 & a_4 & -a_5 & a_{12} & a_{13} & -a_{14} & a_9 & a_{10} & -a_{11} \\ & & & & a_2 & -a_{15} & -a_{13} & a_{19} & a_{17} & -a_{10} & a_{18} & a_{17} \\ & & & & & a_3 & -a_{14} & a_{17} & a_{22} & a_{11} & a_{17} & a_{21} \\ & & & & & & a_1 & -a_4 & -a_5 & a_6 & -a_7 & -a_8 \\ & & & & & & & a_2 & a_{15} & -a_7 & a_{16} & a_{17} \\ & & & & & & & & a_3 & a_8 & a_{17} & a_{20} \\ & & & & & & & & & a_1 & -a_4 & a_5 \\ & & & & & & & & & & a_2 & -a_{15} \\ \text{сум.} & & & & & & & & & & & a_3 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$a_1 = -4 \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) + 2\nu + \frac{28 D_k}{5 D},$$

$$a_2 = \left(\frac{4}{3} m^2 + \frac{8 D_k}{25 D} \right) b^2, \quad a_3 = \left(\frac{4}{3 m^2} + \frac{8 D_k}{5 D} \right) a^2,$$

$$a_4 = \left(2m^2 + \nu + \frac{2 D_k}{5 D} \right) b, \quad a_5 = - \left(\frac{2}{m^2} + \nu + \frac{2 D_k}{5 D} \right) a,$$

$$a_6 = 2m^2 - \frac{4}{m^2} - 2\nu - \frac{28 D_k}{5 D},$$

$$a_7 = \left(m^2 - \nu - \frac{2 D_k}{5 D} \right) b, \quad a_8 = - \left(\frac{2}{m^2} + \frac{2 D_k}{5 D} \right) a,$$

$$\begin{aligned}
a_9 &= -m^2 - \frac{2}{m^2} + 2\nu + \frac{28 D_k}{5 D}, \\
a_{10} &= \left(m^2 - \frac{2 D_k}{5 D}\right)b, \quad a_{11} = \left(-\frac{1}{m^2} + \frac{2 D_k}{5 D}\right)a, \\
a_{12} &= -4m^2 + \frac{2}{m^2} - 2\nu - \frac{28 D_k}{5 D}, \quad a_{13} = \left(2m^2 + \frac{2 D_k}{5 D}\right)b, \\
a_{14} &= \left(-\frac{1}{m^2} + \nu + \frac{2 D_k}{5 D}\right)a, \quad a_{15} = -\nu ab, \\
a_{16} &= \left(\frac{2}{3}m^2 - \frac{8 D_k}{5 D}\right)b^2, \quad a_{17} = 0, \\
a_{18} &= \left(\frac{1}{3}m^2 - \frac{2 D_k}{15 D}\right)b^2, \quad a_{19} = \left(\frac{2}{3}m^2 - \frac{2 D_k}{15 D}\right)b^2, \\
a_{20} &= \left(\frac{2}{3m^2} - \frac{2 D_k}{15 D}\right)a^2, \quad a_{21} = \left(\frac{1}{3m^2} + \frac{2 D_k}{15 D}\right)a^2, \\
a_{22} &= \left(\frac{2}{3m^2} - \frac{8 D_k}{15 D}\right)a^2, \\
m &= \frac{a}{b}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_k = \frac{Gh^3}{12},
\end{aligned} \tag{5.30}$$

E, G – модулі пружності.

Значення вузлових сил при дії навантаження $p(x, y)$

$$F_i = \int_0^a \int_0^b p(x, y) N_i(x, y) dy dx. \tag{5.31}$$

Для $p(x, y) = p_0 = const$

$$\mathbf{F} = \frac{p_0 ab}{4} \left(1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}\right)^T. \tag{5.32}$$

Для зовнішньої сили P , прикладеної в центрі елемента,

$$\mathbf{F} = \frac{P}{4} \left(1, \frac{b}{4}, -\frac{a}{4}, 1, -\frac{b}{4}, \frac{a}{4}, 1, -\frac{b}{4}, \frac{a}{4}, 1, \frac{b}{4}, -\frac{a}{4}\right)^T. \tag{5.33}$$

Для визначення напружень скористаємося формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{12z}{h^3} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{E} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{E} \mathbf{q} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{N} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{N} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & D_k \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

У розгорнутому вигляді вирази для напруження у вузлових точках можна знайти у [36].

При невеликих розмірах скінченних елементів для оцінки напружень у кожному елементі можна скористатися середньоарифметичними значеннями напружень у вузлах елемента [36].

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{6Dz}{h^3 ab} \begin{bmatrix} 0 & -va & b & 0 & -va & -b & 0 & va \\ 0 & -a & vb & 0 & -a & -vb & 0 & a \\ 4\frac{D_k}{D} & 2b\frac{D_k}{D} & -2a\frac{D_k}{D} & -4\frac{D_k}{D} & -2b\frac{D_k}{D} & -2a\frac{D_k}{D} & 4\frac{D_k}{D_1} & -2b\frac{D_k}{D} \\ -b & 0 & va & b & -b & 0 & va & b \\ -vb & 0 & a & vb & -vb & 0 & a & vb \\ 2a\frac{D_k}{D} & -4\frac{D_k}{D_1} & 2b\frac{D_k}{D} & 2a\frac{D_k}{D_1} & 2a\frac{D_k}{D} & -4\frac{D_k}{D_1} & 2b\frac{D_k}{D} & 2a\frac{D_k}{D_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Розглянутий елемент має таку особливість. На границях елементів забезпечується неперервність функцій w та їх похідних $\frac{\partial w}{\partial x}$ і $\frac{\partial w}{\partial y}$, але не забезпечується неперервність змішаних похідних $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Якщо додати у вузлах ще по одній узагальненій координаті $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a, 0)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0, b)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a, b)$, одержимо елемент з 16 ступенями вільності, який

більш точно апроксимує прогин у пластині. Матриця жорсткості для цього елемента будується аналогічно попередній і подається у [36]. Там же наведено компоненти матриці жорсткості елемента трикутної форми.

5.3. Скінченно-елементні моделі оболонок обертання

У зв'язку з широким розповсюдженням оболонок у техніці та складністю аналітичних розв'язків скінченно-елементному моделюванню оболонок приділяється дуже багато уваги [7, 18, 31].

Необхідність моделювання форми поверхні оболонки приводить до значних ускладнень і при скінченно-елементному моделюванні. Зважаючи на навчальний напрямок видання, обмежимося розглядом осесиметричних оболонок. Як відомо, до тонкостінних оболонок відносяться тіла, які обмежуються двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина h) набагато менша за габаритні розміри. Співвідношення між товщиною і радіусом кривизни тонкостінних оболонок $h/R \leq 1/20$.

В основу прикладної теорії оболонок покладені гіпотези Кірхгофа-Лява, згідно з якими:

- 1) прямолінійний елемент, перпендикулярний до серединної поверхні, при деформації залишається прямолінійним і перпендикулярним до деформованої серединної поверхні і зберігає свою довжину;
- 2) нормальні напруження у площадках, паралельних серединній поверхні, малі порівняно з напруженнями у площадках, перпендикулярних цій поверхні.

Ці гіпотези дозволяють привести тривимірну задачу розрахунку просторових тіл, якими є оболонки, до двовимірної задачі рівноваги і деформування серединної поверхні.

Оболонкою обертання будемо називати оболонку, серединна поверхня якої утворюється обертанням деякої кривої, яка називається кривою меридіана, навколо осі, яка є віссю симетрії оболонки.

Якщо оболонку обертання навантажено осесиметричним навантаженням (наприклад, силами тиску), то, як відомо, диференціальні рівняння, що описують напружений стан оболонки, є одновимірними, тобто всі величини залежать від однієї координати s – дуги меридіана. Для моделювання таких оболонок найчастіше застосовують конічні скінченні елементи (рис. 5.6).

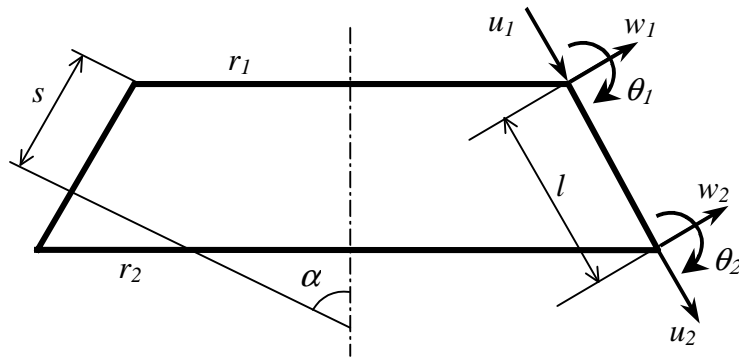


Рис. 5.6. Конічний елемент оболонки

При осесиметричній деформації оболонок обертання переміщення довільної точки визначається двома компонентами: нормальним прогином w і переміщенням по дотичній до меридіана u .

Розглянемо конічний елемент оболонки з шістьма ступенями вільності (рис. 5.6). Вектор вузлових переміщень має такий вигляд:

$$\mathbf{q} = (u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2)^T. \quad (5.36)$$

Шукаємо апроксимації переміщень у вигляді поліномів

$$u = a_1 + a_2 s, \quad w = b_1 + b_2 s + b_3 s^2 + b_4 s^3. \quad (5.37)$$

Враховуючи, що у вузлових точках переміщення і кути повороту дорівнюють u_1 , w_1 , θ_1 , u_2 , w_2 , θ_2 і $\theta = -\frac{dw}{ds}$, знайдемо коефіцієнти рівнянь (5.37)

$$\begin{aligned} u &= u_1 \left(1 - \frac{s}{l}\right) + u_2 \frac{s}{l}, \\ w &= w_1 \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) + \theta_1 \left(-s + 2\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) + \\ &+ w_2 \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) + \theta_2 \left(\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right), \end{aligned} \quad (5.38)$$

або у матричній формі

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (5.39)$$

де

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{s}{l}\right) & 0 & 0 & \frac{s}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \left(-s + 2\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) & 0 & \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \left(\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) \end{bmatrix}.$$

Деформації у серединній поверхні $\boldsymbol{\varepsilon}$ і зміни кривизни \mathbf{e} для осесиметричної оболонки

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_1 \mathbf{u}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}_2 \mathbf{u}, \quad (5.40)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2)^T$, $\mathbf{e} = (e_1 \ e_2)^T$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{r} & \frac{\sin \alpha}{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2}{dr^2} \\ 0 & -\frac{\cos \alpha}{r} \frac{d}{dr} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Індекс 1 відноситься до меридіональних, а 2 – до кільцевих деформацій і кривизни.

Залежності, які пов'язують вектори деформацій з вузловими переміщеннями,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{B}_2 \mathbf{q}, \quad (5.42)$$

де $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{N}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{N}$,

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) & \frac{\sin \alpha}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \frac{\sin \alpha}{r} \left(-s + 2\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) \\ \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{r} \frac{s}{l} & \frac{\sin \alpha}{r} \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \left(6\frac{1}{l^2} - 12\frac{s}{l^3}\right) & \left(-4\frac{1}{l} + 6\frac{s}{l^2}\right) \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{r} \left(6\frac{s}{l^2} - 6\frac{s^2}{l^3}\right) & \frac{\cos \alpha}{r} \left(1 - 4\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right) \\ 0 & \left(-6\frac{1}{l^2} + 12\frac{s}{l^3}\right) & -\left(2\frac{1}{l} - 6\frac{s}{l^2}\right) \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{r} \left(-6\frac{s}{l^2} + 6\frac{s^2}{l^3}\right) & \frac{\cos \alpha}{r} \left(-2\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right) \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Після підстановки (5.42) у формулу для потенціальної енергії деформації елемента

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V z^2 \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} dV,$$

одержимо матриці жорсткості аналогічно попереднім прикладам

$$\mathbf{K} = 2\pi \int_0^l \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1 r ds + 2\pi \int_0^l \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 r ds,$$

де

$$\mathbf{D}_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}.$$

Перший доданок у матриці \mathbf{K} відповідає деформаціям розтягу-стиску в серединній площині, другий – деформаціям згину і кручення.

При наявності поверхневого навантаження \mathbf{p} вектор вузлових сил визначається інтегралом

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{p} r ds,$$

де $\mathbf{p} = (q_u \ q_w)^T$;

q_u , q_w – складові навантаження, дотичні та перпендикулярні твірній конуса.

При синтезі оболонки з окремих скінченних елементів необхідно записати матриці жорсткості й сил у глобальній системі координат z, r (рис. 5.7). Вектор переміщень у глобальній системі

$$\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{u}_1 \ \bar{w}_1 \ \bar{\theta}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{w}_2 \ \bar{\theta}_2\}^T. \quad (5.44)$$

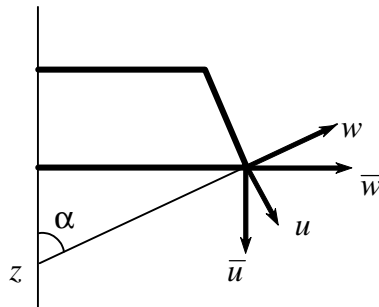


Рис. 5.7. Глобальні і локальні переміщення точок вузлової лінії

Залежність між векторами \mathbf{q} і $\bar{\mathbf{q}}$ та вузловими силами \mathbf{F} і $\bar{\mathbf{F}}$

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{F}},$$

де

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обернені формули

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{q}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T.$$

Матриця жорсткості у глобальних координатах

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}.$$

Одержані залежності дозволяють моделювати осесиметричні оболонки при осесиметричних навантаженнях, зокрема, при $\alpha = 0$ матимемо елемент для круглої пластини, при $\alpha = 90^\circ$ – елемент циліндричної оболонки. Для цих випадків компоненти матриць можна одержати у явному вигляді.

Для циліндричного елемента матрицю жорсткості можна записати у вигляді суми двох матриць, одна з яких (\mathbf{K}_1) відповідає мембранним силам, а друга (\mathbf{K}_2) – згинаючим моментам і моментам кручення

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2,$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi E h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{R}{l} & -\frac{\nu}{2} & \frac{\nu l}{12} & -\frac{R}{l} & -\frac{\nu}{2} & -\frac{\nu l}{12} \\ & \frac{13 l}{35 R} & -\frac{11 l^2}{210 R} & \frac{\nu}{2} & \frac{9 l}{70 R} & \frac{13 l^2}{420 R} \\ & & \frac{1 l^3}{105 R} & -\frac{\nu l}{12} & -\frac{13 l^2}{420 R} & \frac{1 l^3}{140 R} \\ & & & \frac{R}{l} & \frac{\nu}{2} & \frac{\nu l}{12} \\ & & & & \frac{13 l}{35 R} & \frac{11 l^2}{210 R} \\ & & & & & \frac{1 l^3}{105 R} \\ \text{сим.} & & & & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{2\pi E h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^2 R}{l^3} & -\frac{h^2 R}{2l^2} & 0 & -\frac{h^2 R}{l^3} & \frac{h^2 R}{2l^2} & \\ & \frac{h^2 R}{3l} & 0 & \frac{h^2 R}{2l^2} & -\frac{h^2 R}{6l} & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & \frac{h^2 R}{l^3} & -\frac{h^2 R}{2l^2} & \\ \text{сим.} & & & & \frac{h^2 R}{3l} & \end{bmatrix}.$$

ПРИКЛАД 5.1. Визначити прогини у пластинах прямокутної форми (рис. 5.8).

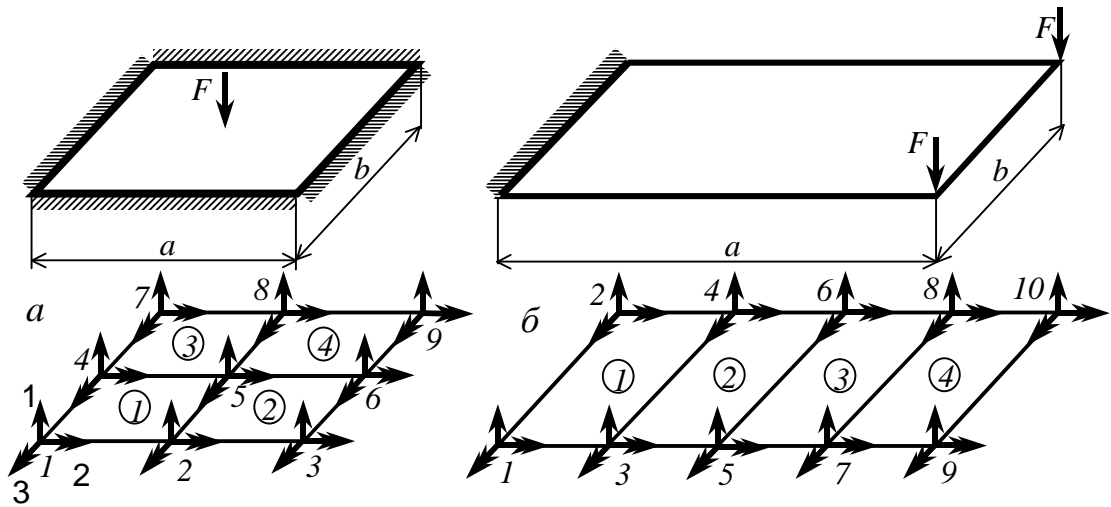


Рис. 5.8. Схеми закріплення і навантаження прямокутних пластин

$$a := 2 \quad b := 1 \quad i := 1..4 \quad a_i := \quad b_i :=$$

Розміри елементів

a	b
a	b
a	b
a	b

Функції форми (функції інтерполяції)

$$f1(x, y, i) := \left[\left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \left[1 + \frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} - 2 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] \right]$$

$$f3(x, y, i) := a_i \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1\right) \cdot \left(\frac{x}{a_i} - 1\right) \cdot \frac{x}{a_i} \quad f2(x, y, i) := b_i \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right)^2 \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f4(x, y, i) := 2 \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{a_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b_i} - \frac{x^2}{(a_i)^2} - \frac{y^2}{(b_i)^2} \right]$$

$$f6(x, y, i) := a_i \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} \quad f5(x, y, i) := b_i \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right)^2 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f10(x, y, i) := 3 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} + \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} - 2 \cdot \frac{y^3}{(b_i)^3} - 3 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} - 3 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i} + 2 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y^3}{(b_i)^3} + 2 \cdot \frac{x^3}{(a_i)^3} \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f9(x, y, i) := a_i \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \quad f12(x, y, i) := -a_i \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^2 \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f11(x, y, i) := -b_i \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \quad f8(x, y, i) := b_i \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1\right)$$

Похідні функцій форми

$$yy1(x, y, i) := -2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}{b_i} \cdot \left[\frac{1}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] - 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{y}{b_i}\right)}{(b_i)^2}$$

$$yy2(x, y, i) := 2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}{(b_i)^2} \cdot y - 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{y}{b_i}\right)}{b_i}$$

$$yy4(x, y, i) := \frac{-4}{b_i} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot b_i} - 2 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] - 2 \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{a_i \cdot (b_i)^2}$$

$$yy5(x, y, i) := \frac{2}{(b_i)^2} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot y - 4 \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{a_i \cdot b_i} \quad yy3(x, y, i) := 0$$

$$yy7(x, y, i) := 2 \cdot \frac{x}{a_i \cdot b_i} \cdot \left[\frac{3}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] - 4 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{(b_i)^3} \quad yy6(x, y, i) := 0$$

$$yy8(x, y, i) := \frac{2}{b_i} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1\right) + \frac{4}{(b_i)^2} \cdot y \cdot \frac{x}{a_i} \quad yy9(x, y, i) := 0$$

$$yy10(x, y, i) := \frac{6}{(b_i)^2} - 12 \cdot \frac{y}{(b_i)^3} - 6 \cdot \frac{x}{a_i \cdot (b_i)^2} + 12 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{(b_i)^3}$$

$$yy11(x, y, i) := \frac{-2}{b_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) + \frac{4}{(b_i)^2} \cdot y \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \quad yy12(x, y, i) := 0$$

$$xy1(x, y, i) := \frac{1}{a_i \cdot b_i} \cdot \left[1 + \frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} - 2 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] - \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}{b_i} \cdot \left[\frac{1}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] \dots$$

$$+ \frac{1}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \left[\frac{1}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right]$$

$$xy2(x, y, i) := \frac{2}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{y}{b_i} - \frac{1}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right)^2$$

$$xy3(x, y, i) := \frac{2}{b_i} \cdot \left(\frac{x}{a_i} - 1\right) \cdot \frac{x}{a_i} + \frac{1}{b_i} \cdot \left(\frac{x}{a_i} - 1\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 xy4(x, y, i) &:= \frac{-2}{b_i \cdot a_i} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{a_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b_i} - \frac{x^2}{(a_i)^2} - \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] - \frac{2}{b_i} \cdot \frac{x}{a_i} \left[\frac{3}{2 \cdot a_i} - 2 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] \dots \\
 &\quad + \frac{\left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i} \right)}{a_i} \left[\frac{1}{2} \cdot b_i - 2 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] \\
 xy7(x, y, i) &:= \frac{1}{a_i \cdot b_i} \left[3 \cdot \frac{x}{a_i} + 3 \cdot \frac{y}{b_i} - 1 - 2 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] + \left[\frac{x}{a_i \cdot b_i} \left[\frac{3}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} \left[\frac{3}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] \right] \\
 xy8(x, y, i) &:= \frac{2}{b_i} \cdot \frac{y}{a_i} \left(\frac{y}{b_i} - 1 \right) + \frac{1}{(b_i)^2} \cdot \frac{y^2}{a_i} \quad xy9(x, y, i) := \frac{2}{a_i} \cdot \frac{x}{b_i} \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) - \frac{1}{(a_i)^2} \cdot \frac{x^2}{b_i} \\
 xy10(x, y, i) &:= \frac{1}{a_i \cdot b_i} - \frac{6}{a_i} \cdot \frac{y}{(b_i)^2} - 6 \cdot \frac{x}{(a_i)^2 \cdot b_i} + \frac{6}{a_i} \cdot \frac{y^2}{(b_i)^3} + 6 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^3 \cdot b_i} \\
 xy11(x, y, i) &:= \frac{2}{b_i} \cdot \frac{y}{a_i} \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) - \frac{1}{(b_i)^2} \cdot \frac{y^2}{a_i} \quad xy12(x, y, i) := \frac{-\left(1 - \frac{x}{a_i} \right)^2}{b_i} + 2 \cdot x \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i} \right)}{b_i \cdot a_i} \\
 xx1(x, y, i) &:= \frac{-2}{a_i} \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) \left[\frac{1}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] - 4 \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{y}{b_i} \right)}{(a_i)^2} \\
 xx3(x, y, i) &:= 2 \cdot \frac{\left(\frac{y}{b_i} - 1 \right)}{(a_i)^2} \cdot x + 4 \left(\frac{y}{b_i} - 1 \right) \cdot \frac{\left(\frac{x}{a_i} - 1 \right)}{a_i} \\
 xx4(x, y, i) &:= 2 \cdot \frac{\left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i} \right)}{a_i} \left[\frac{3}{2 \cdot a_i} - 2 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] - 2 \left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i} \right) \cdot \frac{x}{(a_i)^3} \\
 xx6(x, y, i) &:= \frac{-4}{(a_i)^2} \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) \cdot x + \frac{2}{a_i} \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) \quad xx2(x, y, i) := 0 \\
 xx7(x, y, i) &:= \frac{2}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} \left[\frac{3}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^3} \cdot \frac{y}{b_i} \quad xx5(x, y, i) := 0 \\
 xx9(x, y, i) &:= \frac{2}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) - \frac{4}{(a_i)^2} \cdot x \cdot \frac{y}{b_i} \quad xx8(x, y, i) := 0 \\
 xx10(x, y, i) &:= \frac{-6}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i} + 12 \cdot \frac{x}{(a_i)^3} \cdot \frac{y}{b_i} \quad xx11(x, y, i) := 0 \\
 xx12(x, y, i) &:= 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) \cdot \frac{y}{b_i \cdot a_i} - 2 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i}
 \end{aligned}$$

Параметри матриці модулів пружності

$$h := 1 \cdot 10^{-2} \quad v := 0.3 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad c11 := \frac{E \cdot h^3}{(1 - v^2) \cdot 12} \quad c33 := \frac{(1 - v)}{2}$$

$$c12 := v \cdot c11 \quad c22 := c11 \quad c21 := c12 \quad c13 := 0 \quad c23 := 0 \quad c31 := 0 \quad c32 := 0$$

Матриці других похідних функцій форми

$$xx(x, y, i) := \begin{pmatrix} xx1(x, y, i) \\ xx2(x, y, i) \\ xx3(x, y, i) \\ xx4(x, y, i) \\ xx5(x, y, i) \\ xx6(x, y, i) \\ xx7(x, y, i) \\ xx8(x, y, i) \\ xx9(x, y, i) \\ xx10(x, y, i) \\ xx11(x, y, i) \\ xx12(x, y, i) \end{pmatrix}^T$$

$$yy(x, y, i) := \begin{pmatrix} yy1(x, y, i) \\ yy2(x, y, i) \\ yy3(x, y, i) \\ yy4(x, y, i) \\ yy5(x, y, i) \\ yy6(x, y, i) \\ yy7(x, y, i) \\ yy8(x, y, i) \\ yy9(x, y, i) \\ yy10(x, y, i) \\ yy11(x, y, i) \\ yy12(x, y, i) \end{pmatrix}^T$$

$$xy(x, y, i) := \begin{pmatrix} xy1(x, y, i) \\ xy2(x, y, i) \\ xy3(x, y, i) \\ xy4(x, y, i) \\ xy5(x, y, i) \\ xy6(x, y, i) \\ xy7(x, y, i) \\ xy8(x, y, i) \\ xy9(x, y, i) \\ xy10(x, y, i) \\ xy11(x, y, i) \\ xy12(x, y, i) \end{pmatrix}^T$$

Підінтегральний вираз матриці жорсткості елемента

$$k(x, y, i) := c11 \cdot (xx(x, y, i))^T \cdot xx(x, y, i) + c22 \cdot (yy(x, y, i))^T \cdot yy(x, y, i) \dots$$

$$+ c33 \cdot (xy(x, y, i))^T \cdot xy(x, y, i) \cdot 4 + c12 \cdot (xx(x, y, i))^T \cdot yy(x, y, i) \dots$$

$$+ c12 \cdot (yy(x, y, i))^T \cdot xx(x, y, i) + c13 \cdot (xx(x, y, i))^T \cdot xy(x, y, i) \cdot 2 \dots$$

$$+ c13 \cdot (xy(x, y, i))^T \cdot xx(x, y, i) \cdot 2 + c23 \cdot (yy(x, y, i))^T \cdot xy(x, y, i) \cdot 2 \dots$$

$$+ 2 \cdot c23 \cdot (xy(x, y, i))^T \cdot yy(x, y, i)$$

Чисельне визначення матриці жорсткості елемента

$$z1 := 0.5773502692 \quad z2 := -0.5773502692$$

$$w1 := 1 \quad w2 := 1$$

$$zx1(i) := \frac{(a_i \cdot z1 + a_i)}{2} \quad zy1(i) := \frac{(b_i \cdot z1 + b_i)}{2} \quad zx2(i) := \frac{(a_i \cdot z2 + a_i)}{2}$$

$$zy2(i) := \frac{(b_i \cdot z2 + b_i)}{2}$$

$$K(i) := a_i \cdot \frac{b_i}{4} \cdot \begin{pmatrix} w1 \cdot w1 \cdot k(zx1(i), zy1(i), i) + w1 \cdot w2 \cdot k(zx1(i), zy2(i), i) \dots \\ + w2 \cdot w1 \cdot k(zx2(i), zy1(i), i) \dots \\ + w2 \cdot w2 \cdot k(zx2(i), zy2(i), i) \end{pmatrix}$$

Розрахунок переміщень для пластини (варіант а)

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 16 & 17 & 18 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 19 & 20 & 21 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 25 & 26 & 27 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Одержання матриці жорсткості пластини

$$i := 1..4 \quad j := 1..12 \quad k := 1..12 \quad KS_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$KS_{(mi,j), (mi,k)} := KS_{(mi,j), (mi,k)} + K(i)_{j,k}$$

Редукція матриці жорсткості у відповідності з умовами закріплення

$$KR := \text{submatrix}(KS, 13, 15, 13, 15)$$

$$\text{Вектор зовнішніх навантажень } F := \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Визначення вузлових переміщень

$$U := KR^{-1} \cdot F \quad U = \begin{pmatrix} 0.016 \\ 9.263 \times 10^{-9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розрахунок переміщень для пластини (варіант б)

$$mi1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..4 \quad j := 1..12 \quad k := 1..12 \quad KS1_{\max(mi1), \max(mi1)} := 0$$

$$KS1_{(mi1,j), (mi1,k)} := KS1_{(mi1,j), (mi1,k)} + K(i)_{j,k}$$

$$KR1 := \text{submatrix}(KS1, 7, 30, 7, 30)$$

Компоненти вектора навантажень

$$F1_{19} := 10^2 \quad F1_{22} := 10^2 \quad F1_{24} := 0$$

$$U1 := KR1^{-1} \cdot F1$$

$$U1 =$$

	1
1	0.164
2	0.018
3	-0.16
4	0.167
5	-0.012
6	-0.163
7	0.613
8	0.018
9	-0.28
10	0.625
11	$5.326 \cdot 10^{-3}$
12	-0.286

$$U1 =$$

	1
13	1.252
14	0.027
15	-0.351
16	1.276
17	0.02
18	-0.358
19	1.987
20	0.037
21	-0.375
22	2.024
23	0.037
24	-0.382

ПРИКЛАД 5.2. Визначити переміщення точок у середньому перерізі осесиметричної оболонки при навантаженні внутрішнім тиском (рис. 5.9).

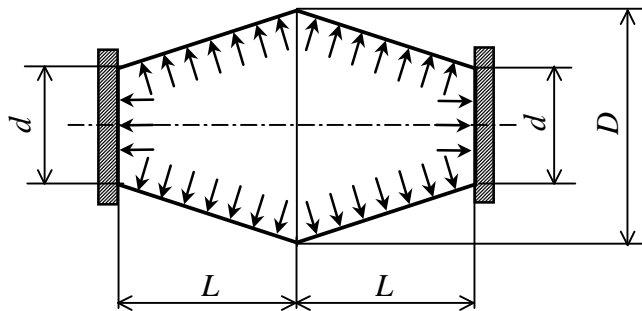


Рис. 5.9. Осесиметрична оболонка

Вхідні дані

- $ke := 2$ $i := 1..ke$ - кількість елементів
- $E := 2 \cdot 10^{11}$ - модуль пружності матеріалу, Па
- $L := 1$ - довжина, м $p0 := 10$ - початковий тиск, Па
- $\alpha1 := \frac{\pi}{4}$ - кут нахилу кільцевого радіуса до осі z
- $r := 1$ - початковий радіус, м

$l_i :=$ $\alpha_i :=$ $r0_i :=$ - параметри скінченних елементів

L	$\alpha1$	r
L	$3 \cdot \frac{\pi}{4}$	$r + L \cdot \cos(\alpha1)$

Матриці апроксимуючих функцій

$$F1(s, i) := \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{s}{l_i}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} + 2 \cdot \frac{s^3}{(l_i)^3}\right] & \left[-s + 2 \cdot \frac{s^2}{l_i} - \frac{s^3}{(l_i)^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$F2(s, i) := \begin{bmatrix} \frac{s}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & \left[3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} - 2 \cdot \frac{s^3}{(l_i)^3}\right] & \left[\frac{s^2}{l_i} - \frac{s^3}{(l_i)^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$F(s, i) := \text{augment}(F1(s, i), F2(s, i))$$

Похідні матриці апроксимуючих функцій

$$B11(s, i) := \begin{bmatrix} \frac{-1}{l_i} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left(1 - \frac{s}{l_i}\right) & \frac{\sin(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[1 - 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} + 2 \cdot \frac{s^3}{(l_i)^3}\right] & \frac{\sin(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[-s + 2 \cdot \frac{s^2}{l_i} - \frac{s^3}{(l_i)^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$B12(s, i) := \begin{bmatrix} \frac{1}{l_i} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \frac{s}{l_i} & \frac{\sin(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} - 2 \cdot \frac{s^3}{(l_i)^3}\right] & \frac{\sin(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[\frac{s^2}{l_i} - \frac{s^3}{(l_i)^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$B1(s, i) := \text{augment}(B11(s, i), B12(s, i)) \quad B1T(s, i) := B1(s, i)^T$$

$$B21(s, i) := \begin{bmatrix} 0 & \left[\frac{6}{(l_i)^2} - 12 \cdot \frac{s}{(l_i)^3}\right] & \left[\frac{-4}{l_i} + 6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2}\right] \\ 0 & \frac{\cos(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} - 6 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^3}\right] & \frac{\cos(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[1 - 4 \cdot \frac{s}{l_i} + 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$B22(s, i) := \begin{bmatrix} 0 & \left[-6 \cdot \frac{1}{(l_i)^2} + 12 \cdot \frac{s}{(l_i)^3}\right] & \left[-2 \cdot \frac{1}{l_i} + 6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2}\right] \\ 0 & \frac{\cos(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[-6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} + 6 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^3}\right] & \frac{\cos(\alpha_i)}{r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)} \cdot \left[-2 \cdot \frac{s}{l_i} + 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$B2(s, i) := \text{augment}(B21(s, i), B22(s, i)) \quad B2T(s, i) := B2(s, i)^T$$

Фізичні залежності

Жорсткості на згин і розтяг-стиск

$$\mu := 0.3 \quad h := 0.002 \quad \text{- товщина оболонки}$$

$$D := \left(\frac{E}{1 - \mu^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \quad D2 := D \cdot \frac{h^3}{12} \quad D1 := D \cdot h$$

Матриці жорсткості елементів

$$k := 1..2 \quad q := 1..6 \quad p := 1..6 \quad n := 1..2$$

$$K1_{12,12} := 0 \quad K2_{12,12} := 0$$

$$\text{Матриця індексів} \quad mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$K2_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := K2_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} \dots$$

$$+ 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_k \sum_n (B2T(s, i)_{q, k}) \cdot D2_{k, n} \cdot B2(s, i)_{n, p} \cdot (r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)) \, ds$$

$$K1_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := K1_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} \dots$$

$$+ 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_k \sum_n B1T(s, i)_{q, k} \cdot D1_{k, n} \cdot B1(s, i)_{n, p} \cdot (r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)) \, ds$$

Матриці направляючих косинусів

$$T(i) := \begin{pmatrix} \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TT(i) := \begin{pmatrix} \sin(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриці направляючих косинусів для елементів

$$TS_{12,12} := 0 \quad TTS_{12,12} := 0 \quad KS\alpha_{12,12} := 0 \quad PS_{12} := 0$$

$$TS_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := TS_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} + T(i)_{q,p}$$

$$TTS_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := TTS_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} + TT(i)_{q,p}$$

Матриця жорсткості системи незв'язаних елементів
у глобальній системі координат

$$KS\alpha := TTS \cdot (K1 + K2) \cdot TS$$

$$p(s, i) := \begin{bmatrix} 0 \\ (p0) \end{bmatrix} \quad \text{- навантаження} \quad m := 1..1$$

Матриця навантажень

$$FT(s, i) := F(s, i)^T$$

$$PS_{q+6 \cdot (i-1)} := PS_{q+6 \cdot (i-1)} + 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_m \sum_k FT(s, i)_{q,k} \cdot p(s, i)_{k,m} \cdot (r0_i + s \cdot \cos(\alpha_i)) \, ds$$

$$PS\alpha := TTS \cdot PS$$

Побудова матриць жорсткості і навантажень для оболонки

$$i := 1..2 \quad q := 1..6 \quad p := 1..6 \quad KK_{9,9} := 0 \quad PP_9 := 0$$

$$KK_{mi,q, mi,p} := KK_{mi,q, mi,p} + KS\alpha_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)}$$

$$PP_{mi,q} := PP_{mi,q} + PS\alpha_{q+6 \cdot (i-1)} \quad PPt := PP^T$$

$$PPt = \begin{pmatrix} -26.927 & 26.927 & -6.717 & -2.132 \times 10^{-14} & 66.42 & 2.665 \times 10^{-15} & 26.927 & 26.927 & 6.717 \end{pmatrix}$$

Редукція матриць у відповідності з умовами закріплення

$$K := \text{submatrix}(KK, 4, 6, 4, 6) \quad P := \text{submatrix}(PPt, 1, 1, 4, 6) \quad P := P^T$$

$$K = \begin{pmatrix} 3.743 \times 10^9 & -2.384 \times 10^{-7} & 6.644 \times 10^7 \\ 0 & 6.181 \times 10^9 & 1.49 \times 10^{-8} \\ 6.644 \times 10^7 & 1.49 \times 10^{-8} & 1.837 \times 10^7 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -2.132 \times 10^{-14} \\ 66.42 \\ 2.665 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$PN := (0 \ 6 \ 0)^T \quad \text{- вектор додаткових вузлових навантажень}$$

$$P + PN = \begin{pmatrix} -2.132 \times 10^{-14} \\ 72.42 \\ 2.665 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Переміщення від сумарного навантаження

$$U := K^{-1} \cdot (P + PN) \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.172 \times 10^{-8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Переміщення від зовнішнього вузлового навантаження

$$U1 := K^{-1} \cdot PN \quad U1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9.708 \times 10^{-10} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Переміщення від навантаження тиском

$$U2 := K^{-1} \cdot P \quad U2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.075 \times 10^{-8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ПРИКЛАД 5.3. Визначити переміщення кругової пластини (рис.5.10).

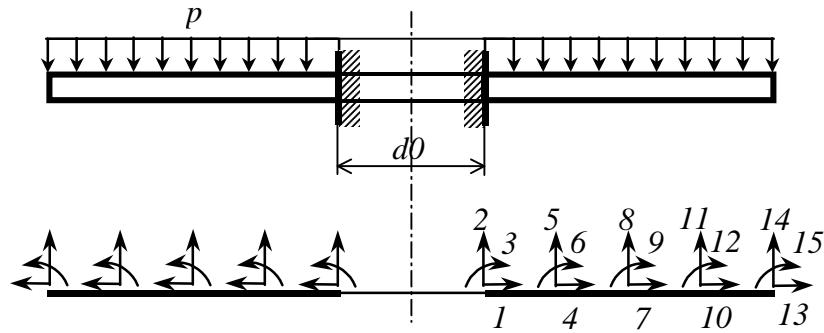


Рис. 5.10. Схема навантаження кругової пластини і її скінченно-елементна модель

$ke := 4 \quad i := 1..ke$ - кількість елементів

$p1 := 10$ - навантаження, Па $r0 := 1$ - початковий радіус, м

$E := 2 \cdot 10^{11}$ модуль пружності, Па $li :=$ $r0i :=$ - параметри елементів

0.5	r0
0.5	r0 + 0.5
0.5	r0 + 1
0.5	r0 + 1.5

Матриця інтерполяційних функцій для i -го елемента

$$F(s, i) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{li} & 0 & 0 & \frac{s}{li} & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - 3 \cdot \frac{s^2}{(li)^2} + 2 \cdot \frac{s^3}{(li)^3} \right] & \left[-s + 2 \cdot \frac{s^2}{li} - \frac{s^3}{(li)^2} \right] & 0 & \left[3 \cdot \frac{s^2}{(li)^2} - 2 \cdot \frac{s^3}{(li)^3} \right] & \left[\frac{s^2}{li} - \frac{s^3}{(li)^2} \right] \end{bmatrix}$$

Матриці, які пов'язують вектори деформацій i -го елемента з вузловими переміщеннями

$$\begin{aligned}
 B1(s,i) &:= \begin{bmatrix} \frac{-1}{l_i} & 0 & 0 & \frac{1}{l_i} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r0_i + s} \cdot \left(1 - \frac{s}{l_i}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \frac{s}{l_i} & 0 & 0 \end{bmatrix} & B1T(s,i) &:= B1(s,i)^T \\
 B21(s,i) &:= \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} \frac{6}{(l_i)^2} - 12 \cdot \frac{s}{(l_i)^3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-4}{l_i} + 6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} \end{bmatrix} \\ 0 & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \begin{bmatrix} 6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} - 6 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^3} \end{bmatrix} & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \begin{bmatrix} 1 - 4 \cdot \frac{s}{l_i} + 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 B22(s,i) &:= \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} -6 \cdot \frac{1}{(l_i)^2} + 12 \cdot \frac{s}{(l_i)^3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \cdot \frac{1}{l_i} + 6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} \end{bmatrix} \\ 0 & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \begin{bmatrix} -6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} + 6 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^3} \end{bmatrix} & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot \frac{s}{l_i} + 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 B2(s,i) &:= \text{augment}(B21(s,i), B22(s,i)) & B2T(s,i) &:= B2(s,i)^T
 \end{aligned}$$

Фізичні залежності

$$\mu := 0.3$$

Жорсткості на згин і розтяг-стиск

$$h := 0.003 \quad \text{- товщина оболонки}$$

$$D := \left(\frac{E}{1 - \mu^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$D2 := D \cdot \frac{h^3}{12} \quad D1 := D \cdot h$$

Формування матриць жорсткості елементів

$$k := 1..2 \quad q := 1..6 \quad p := 1..6 \quad n := 1..2$$

$$K1_{24,24} := 0 \quad K2_{24,24} := 0$$

$$K1_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := K1_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} \dots$$

$$+ 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_k \sum_n B1T(s,i)_{q,k} \cdot D1_{k,n} \cdot B1(s,i)_{n,p} \cdot (r0_i + s) \, ds$$

$$K2_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := K2_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} \dots$$

$$+ 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_k \sum_n (B2T(s,i)_{q,k}) \cdot D2_{k,n} \cdot B2(s,i)_{n,p} \cdot (r0_i + s) \, ds$$

$$KS := K1 + K2$$

Матриці навантажень

$$FT(s,i) := F(s,i)^T \quad m := 1..1 \quad PS_{24} := 0 \quad p(s,i) := \begin{pmatrix} 0 \\ p1 \end{pmatrix}$$

$$PS_{q+6 \cdot (i-1)} := PS_{q+6 \cdot (i-1)} + 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_m \sum_k FT(s, i)_{q, k} \cdot p(s, i)_{k, m} \cdot (r0_i + s) ds$$

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Побудова матриці жорсткості і навантажень для пластини

$$i := 1..4 \quad q := 1..6 \quad p := 1..6$$

$$KK_{15, 15} := 0 \quad PP_{15} := 0$$

$$KK_{mi, q, mi, p} := KK_{mi, q, mi, p} + KS_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)}$$

$$PP_{mi, q} := PP_{mi, q} + PS_{q+6 \cdot (i-1)} \quad Pt := PP^T$$

Редукція матриць у відповідності з умовами закріплення

$$m := 1..12 \quad n := 1..12$$

$$K_{m, n} := KK_{(m+3), (n+3)} \quad P_m := PP_{m+3}$$

Вектор зовнішніх вузлових навантажень

$$PV := [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0] \quad P := P + PV$$

Сумарний вектор вузлових навантажень

$$P := [0 \ 47.124 \ -0.524 \ 0 \ 62.832 \ -0.524 \ 0 \ 78.54 \ -0.524 \ 10 \ 44.768 \ 3.665]$$

Розв'язок системи рівнянь відносно переміщень вузлів від навантаження, прикладеного у вузлах

$$U := K^{-1} \cdot P \quad U = \begin{pmatrix} 4.844 \times 10^{-10} \\ 5.829 \times 10^{-3} \\ -0.02 \\ 8.734 \times 10^{-10} \\ 0.018 \\ -0.026 \\ 1.224 \times 10^{-9} \\ 0.031 \\ -0.026 \\ 1.555 \times 10^{-9} \\ 0.043 \\ -0.025 \end{pmatrix}$$

вузлові переміщення

$$U2 := K^{-1} \cdot PV \quad U2 = \begin{pmatrix} 4.844 \times 10^{-10} \\ 0 \\ 0 \\ 8.734 \times 10^{-10} \\ 0 \\ 0 \\ 1.224 \times 10^{-9} \\ 0 \\ 0 \\ 1.555 \times 10^{-9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ПРИКЛАД 5.4. Визначити переміщення точок середнього перерізу циліндричної оболонки, навантаженої радіальними силами інтенсивністю q на торці (рис. 5.11).

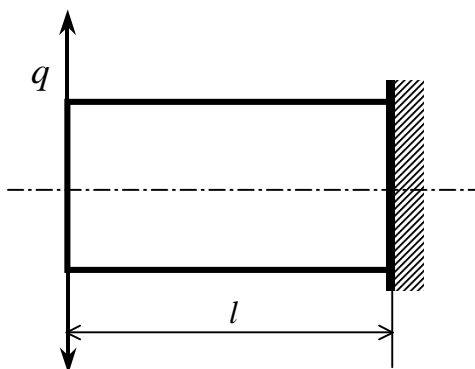


Рис. 5.11. Циліндрична оболонка

Вхідні дані:

- $E := 2 \cdot 10^{11}$ - модуль пружності, Па
 $\mu := 0.3$ - коефіцієнт Пуасона
 $R := 0.15$ - радіус оболонки, м
 $\delta := 0.002$ - товщина стінки, м
 $ke := 40$ $i := 1..ke$ - кількість скінченних елементів
 $l_i := 0.01$ - довжина скінченного елемента, м
 $q := 1000$ - радіальне погонне навантаження на торці оболонки, Н/м

Матриці жорсткості елемента оболонки

$$K1(i) := \begin{bmatrix} \frac{R}{l_i} & \frac{-\mu}{2} & \mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{-R}{l_i} & \frac{-\mu}{2} & -\mu \cdot \frac{l_i}{12} \\ \frac{-\mu}{2} & \frac{13}{35} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{-11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{\mu}{2} & \frac{9}{70} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} \\ \mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{-11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{1}{105} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} & -\mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{-13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{-1}{140} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} \\ \frac{-R}{l_i} & \frac{\mu}{2} & -\mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{R}{l_i} & \frac{\mu}{2} & \mu \cdot \frac{l_i}{12} \\ \frac{-\mu}{2} & \frac{9}{70} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{-13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{\mu}{2} & \frac{13}{35} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} \\ -\mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{-1}{140} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} & \mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{1}{105} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{E \cdot \delta \cdot 2 \cdot \pi}{1 - \mu^2} \right)$$

$$K2(i) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & -\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} & 0 & -\delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & \left[\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] \\ 0 & -\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} & \delta^2 \cdot \frac{R}{3 \cdot l_i} & 0 & \delta^2 \cdot \left[\frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] & \left(\delta^2 \cdot \frac{R}{6 \cdot l_i} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & \delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^2 \cdot 2} & 0 & \delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & \frac{R \cdot \delta^2}{2 \cdot (l_i)^2} \\ 0 & \left[\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] & \left(\delta^2 \cdot \frac{R}{6 \cdot l_i} \right) & 0 & \left[\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] & \delta^2 \cdot \frac{R}{3 \cdot l_i} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \delta \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{1 - \mu^2}$$

$Top^{(i)} := \begin{pmatrix} i \\ i + 1 \end{pmatrix}$ $Top := Top^T$ - топологічна матриця

Побудова матриці індексів

$$s := 1..2 \quad m_{i,(3s-2)} := 3 \cdot Top(i,s) - 2$$

$$m_{i,(3s-1)} := 3 \cdot Top(i,s) - 1$$

$$m_{i,(3s)} := 3 \cdot Top(i,s)$$

Побудова матриці жорсткості оболонки і матриці навантажень

$$ne := 6 \quad Ke(i) := K1(i) + K2(i) \quad KS_{123,123} := 0$$

$$j := 1..ne \quad k := 1..ne \quad KS_{m_{i,j},m_{i,k}} := KS_{m_{i,j},m_{i,k}} + Ke(i)_{j,k}$$

$$K := submatrix(KS, 1, 120, 1, 120)$$

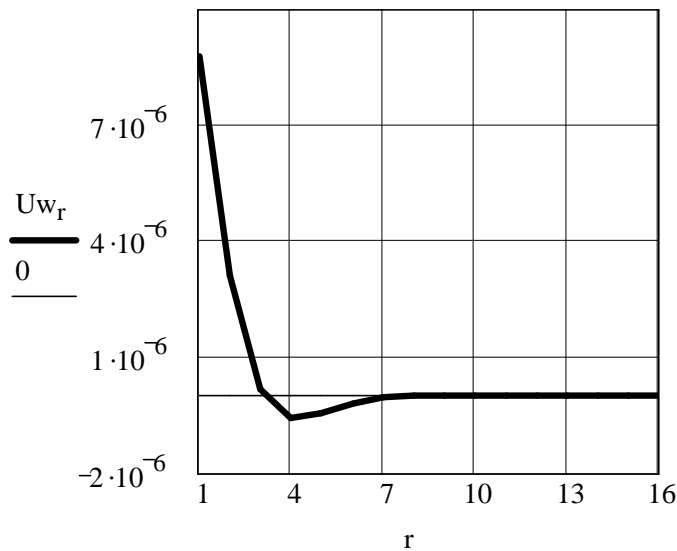
$$PS_{120} := 0 \quad PS_2 := q \quad - \text{вузлове навантаження}$$

Розв'язок відносно переміщень

$$U := K^{-1} \cdot PS$$

Графік прогинів (радіальних переміщень)

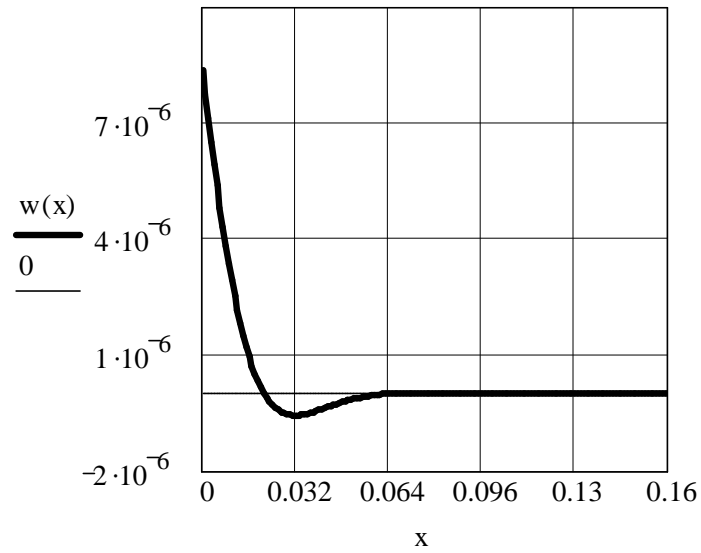
$$r := 1..32 \quad U_{w_r} := U_{3,r-1}$$



Точні значення переміщень

$$D := \frac{E \cdot \delta^3}{(1 - \mu^2) \cdot 12} \quad k := \sqrt[4]{3 \cdot \frac{(1 - \mu^2)}{R^2 \cdot \delta^2}} \quad w(x) := \frac{PS_2}{k^3 D \cdot 2} \cdot e^{-k \cdot x} \cdot \cos(k \cdot x)$$

$x := 0, 0.001 \dots 0.4$



РОЗДІЛ 6

ОБ'ЄМНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ. МОДЕЛЮВАННЯ МАСИВІВ

Об'ємні або тривимірні елементи використовують для аналізу задач тривимірної теорії пружності. Складність таких задач не дозволяє ефективно використати аналітичні методи, і МСЕ є практично єдиним ефективним методом їх розв'язання. Основні тривимірні елементи є узагальненням двовимірних елементів.

Скінченно-елементні моделі масивних тіл приводять до необхідності розв'язання задач великої розмірності, у зв'язку з чим на перший план виходить проблема економічності та ефективності основних за трудомісткістю етапів алгоритму МСЕ, а саме:

- 1) операцій введення і виведення даних;
- 2) розділення реальної конструкції на скінченні елементи і побудови глобальної матриці жорсткості;
- 3) методів розв'язку систем рівнянь великої розмірності.

Складність і трудомісткість розв'язку просторових задач теорії пружності привели до розробки великої кількості скінченних елементів, однак основними залишаються найпростіші: тетраедр і паралелепіпед, а також їх ізопараметричні узагальнення [7].

6.1. Тетраедральний скінченний елемент

Розглянемо елемент у вигляді тетраедра (рис. 6.1). Введемо у кожній вершині по три невідомих переміщення u_i, v_i, w_i у напрямках осей x, y, z , відповідно. Пронумеруємо вузли, для чого присвоюємо четвертий номер довільному вузлу, а інші три нумеруємо, обходячи їх за годинниковою стрілкою (1, 2, 3).

Вектор переміщень у довільній точці тетраедра $\mathbf{u}(x, y, z) = (u \ v \ w)^T$ апроксимуємо поліномами

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, & v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z, \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Прирівнюючи далі ці вирази до переміщень вузлових точок, одержимо для кожного з переміщень u, v, w по чотири рівняння, з яких можна визначити коефіцієнти α_i .

Визначимо вектор деформацій $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx})^T$, для чого скористаємось залежностями Коші

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (6.4)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T.$$

Після підстановки (6.2) у (6.4), з урахуванням (6.3) одержимо

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (6.5)$$

де

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 \\ c_1 & b_2 & 0 & c_2 & b_3 & 0 & c_3 & b_4 & 0 & c_4 & b_1 & 0 \\ 0 & d_2 & c_3 & 0 & d_3 & c_4 & 0 & d_4 & c_1 & 0 & d_1 & c_2 \\ d_1 & 0 & b_3 & d_2 & 0 & b_4 & d_3 & 0 & b_1 & d_4 & 0 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Напруження для ізотропного матеріалу згідно із законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.7)$$

де

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{сим.} & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\nu}{(1-\nu)}, \quad \mu = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}. \quad (6.8)$$

Матриця жорсткості

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV. \quad (6.9)$$

Вузлові сили, обумовлені дією поверхневих навантажень, визначаються векторами навантажень, відповідних кожній з граней елемента

$$\mathbf{F} = \frac{S_{123}}{3} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{S_{234}}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + \frac{S_{341}}{3} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + \frac{S_{412}}{3} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Навантаження на кожній з граней (S_{ijk} – площа грані, яка лежить проти вузла P) розподіляються порівну між вузлами, які відносяться до даної грані.

Якщо мають місце температурні деформації

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \alpha \Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

то з'являються додаткові вузлові сили

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 V. \quad (6.12)$$

6.2. Об'ємний елемент у формі паралелепіпеда

Введемо у кожному вузлі елемента (рис. 6.2) по три невідомих переміщення u_i, v_i, w_i . Загальна кількість невідомих – 24. Апроксимації переміщень в об'ємі елемента матимуть вигляд

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 x^2, \\ v(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} xz + \alpha_{15} yz + \alpha_{16} y^2, \quad (6.13)$$

$$w(x, y, z) = \alpha_{17} + \alpha_{18} x + \alpha_{19} y + \alpha_{20} z + \alpha_{21} xy + \alpha_{22} xz + \alpha_{23} yz + \alpha_{24} z^2$$

або у матричній формі

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\alpha}. \quad (6.14)$$

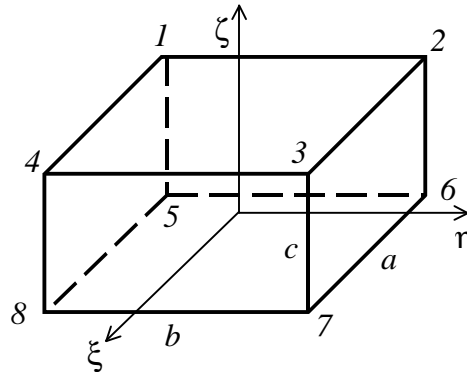


Рис. 6.2. Просторовий елемент – паралелепіпед

Введемо координатні осі ξ , η , ζ , паралельні сторонам паралелепіпеда, і підставимо значення вузлових переміщень у відповідних вузлах.

Одержимо систему рівнянь, що зв'язує вузлові переміщення і коефіцієнти

$$\mathbf{q} = \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \quad (6.15)$$

Вектор переміщень

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & & & & N_8 \\ & N_1 & & & & & & & N_8 \\ & & N_1 & & & & & & N_8 \\ & & & N_2 & & & \dots & & N_8 \\ & & & & N_2 & & & & N_8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = (u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8)^T.$$

Функції форми N_i визначаються формулами

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta), & N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), & N_8 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\xi = 2x/a, \quad \eta = 2y/b, \quad \zeta = 2z/c,$$

a, b, c – розміри граней паралелепіпеда.

Компоненти вектора деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q}. \quad (6.18)$$

Компоненти напружень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}. \quad (6.19)$$

Матриця жорсткості

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV. \quad (6.20)$$

Вектор зовнішніх навантажень визначається у вузлах кожної грані в залежності від навантаження на грань

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{P} dS. \quad (6.21)$$

6.3. Кільцевий елемент з трикутним перерізом

Розглянемо кільцевий елемент трикутного поперечного перерізу (рис. 6.3). Переміщення кожного вузла складається з трьох компонентів $\mathbf{q}_i = (u_i, v_i, w_i)^T$, $(i = 1, 2, 3)$; дев'ять вузлових переміщень складають вектор

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T)^T.$$

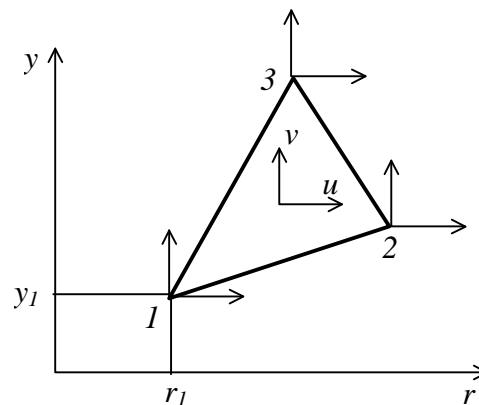


Рис. 6.3. Переріз кільцевого елемента

Розглянемо симетричне навантаження елемента. Для апроксимації переміщень по площі елемента скористаємось залежністю

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (6.22)$$

де $\mathbf{u} = (u \ v)^T$ – вектор переміщень довільної точки елемента з координатами y, r ; \mathbf{N} – матриця функцій форми

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & y_1 \\ 1 & r_2 & y_2 \\ 1 & r_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$N_i = a_i + b_i r + c_i y,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= r_2 y_3 - r_3 y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= r_2 - r_3, \\ a_2 &= r_3 y_1 - r_1 y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= r_3 - r_1, \\ a_3 &= r_1 y_2 - r_2 y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= r_1 - r_2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Для осесиметричного випадку залежність між деформаціями і переміщеннями має вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Як видно, враховуються всі лінійні деформації і кутова деформація у площині rOy .

З використанням функцій переміщень (6.23), (6.24) одержимо

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q} = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

де

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Оскільки матриця \mathbf{B} залежить від координат r і y , деформації в елементі не будуть сталими.

Матрицю жорсткості одержимо, обчислюючи інтеграл

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (6.28)$$

де для ізотропного матеріалу

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{сим.} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Оскільки об'ємний інтеграл береться по всій кільцевій області, одержимо

$$\mathbf{K} = 2\pi \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dy. \quad (6.30)$$

Обчислити цей інтеграл можна чисельним способом. Найпростіший метод полягає у визначенні матриці $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ для центра ваги елемента з координатами

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad r_0 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

і підстановки в наближений вираз для інтеграла \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = 2\pi \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B} r_0 S. \quad (6.31)$$

Можна використати і більш точні методи, коли обчислюється підінтегральний вираз у декількох точках.

Якщо на сторону 1–2 скінченного елемента (рис. 6.4) діє рівномірне навантаження p_0 , необхідно перейти до проєкцій p_r, p_y

$$\mathbf{p}_0 = (p_r \ p_y)^T. \quad (6.32)$$

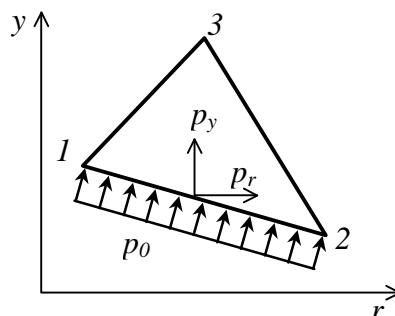


Рис. 6.4. Навантаження елемента

Вектор вузлових навантажень, відповідний такому навантаженню,

$$\mathbf{F}_{1,2} = 2\pi \int_{l_{1,2}} \bar{\mathbf{N}}^T \begin{pmatrix} p_r \\ p_y \end{pmatrix} r dl \quad (6.33)$$

($\bar{\mathbf{N}}$ – значення функцій інтерполяції на стороні $l_{1,2}$).

При наявності температурних деформацій відповідні вузлові сили обчислюються за формулою

$$\mathbf{F}_0 = 2\pi \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r dr dy, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 0)^T. \quad (6.34)$$

З урахуванням $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = const$ інтеграл (6.28) можна обчислити точно

$$\mathbf{F}_0 = 2\pi \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r_0 S, \quad (6.35)$$

де \mathbf{B}_0, r_0 – значення у точці – центрі мас трикутника.

Після визначення переміщень з умов рівноваги, записаних для системи в цілому, можна знайти напруження у кожному елементі за формулою

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{q} - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

Напруження змінюються по площі поперечного перерізу, і тому краще визначати усереднені напруження і відносити їх до центра ваги елемента. Матриця $\bar{\mathbf{B}}$ у цьому разі відноситься до центра ваги елемента з координатами

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad r = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}.$$

ПРИКЛАД 6.1. Визначити напруження у кільцевій деталі, переріз якої наведено на рис. 6.5, при дії навантаження, розподіленого по її внутрішній поверхні.

Вхідними даними є розміри деталі і характеристики матеріалу. Навантаження діє на внутрішній циліндричній поверхні кільця. Для побудови скінченно-елементної моделі скористаємося програмою, наведеною у розділі 4. У результаті дії програми одержимо масиви координат вузлів трикутних скінченних елементів (Nodes), на які розділений переріз кільця, і матрицю з'єднань елементів Top (топологічну матрицю). Вузлові точки показано на рис 6.6. Радіальна координата далі позначається x , осьова – y , окружна – θ .

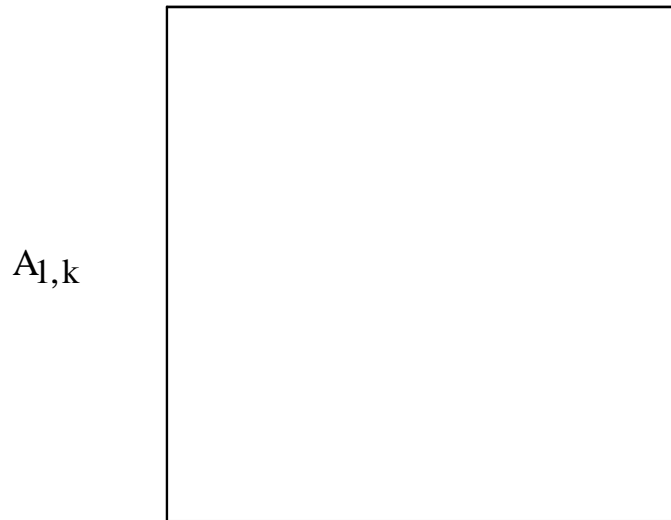

 $A_{0,k}$

Рис. 6.5. Переріз кільцевої деталі

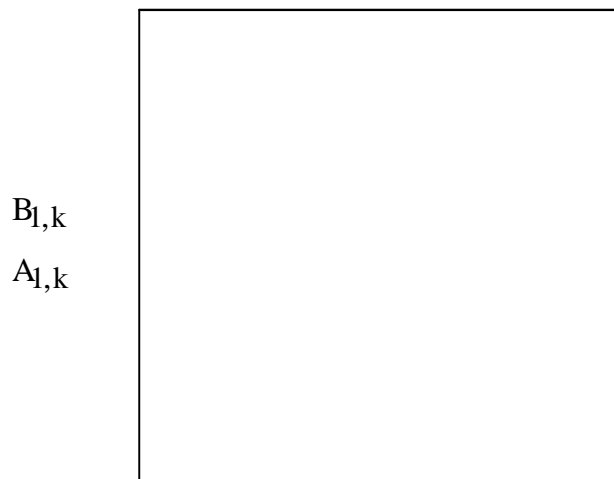

 $B_{0,k}, A_{0,k}$

Рис. 6.6. Вузлові точки перерізу

$$\text{Nodes} := \text{submatrix}(B, 0, 1, 0, 623)$$

$$\text{Top} := \text{submatrix}(B, 0, 2, 624, 1749)^T$$

$$\text{Nodes} = \blacksquare$$

$$\text{Top}^T = \blacksquare$$

Сітку скінченних елементів наведено на рис.6.7.

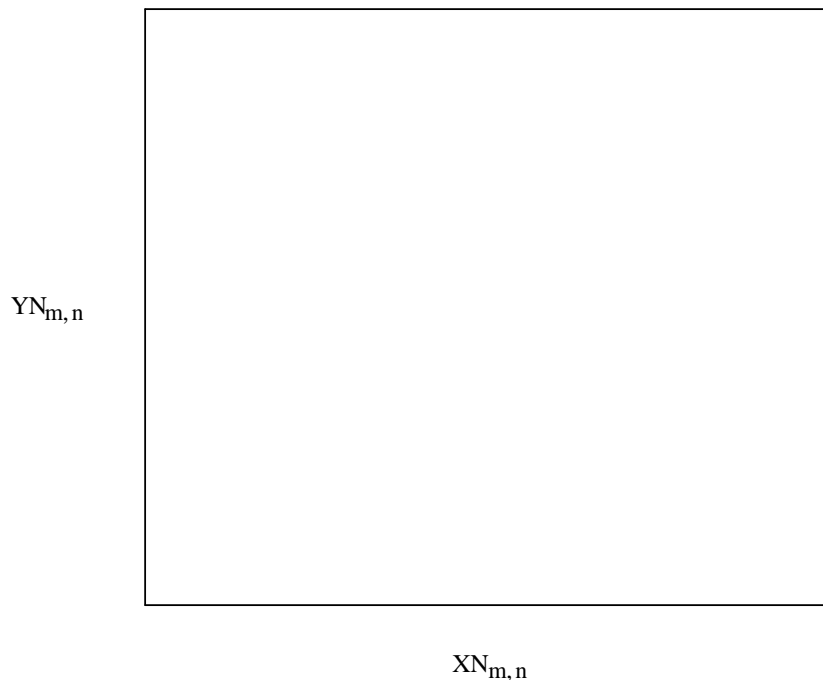


Рис. 6.7. Сітка скінченних елементів

Розрахунок плоского напруженого стану

Розрахунок у цілому повторює послідовність дій, наведену у прикладі 4.3. Відмінності пов'язані з наявністю третього нормального напруження, у зв'язку з чим дещо ускладнюється обчислення матриці жорсткості. Масив координат NOD і матриця з'єднань вузлів елементів TOP є копіями масивів Nodes і Top.

NOD := Nodes cols(NOD) = 624 rows(NOD) = 2

TOP := Top rows(TOP) = ■

NOD = ■

TOP^T = ■

Кількість елементів

i := 0..1125

cols(TOP) = 3

Кількість вузлів

j := 0..2

Модуль пружності (кН/см²) і коефіцієнт Пуассона

E := 2 · 10⁴ ν := 0.3

Координати вузлів

$$X_{j,i} := \text{NOD}_{0, \text{TOP}_{i,j}}$$

$$Y_{j,i} := \text{NOD}_{1, \text{TOP}_{i,j}}$$

Визначення елементів матриці жорсткості елемента

$$a0(i) := X_{1,i} \cdot Y_{2,i} - X_{2,i} \cdot Y_{1,i} \quad b0(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i} \quad c0(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$$

$$a1(i) := X_{2,i} \cdot Y_{0,i} - X_{0,i} \cdot Y_{2,i} \quad b1(i) := Y_{2,i} - Y_{0,i} \quad c1(i) := X_{2,i} - X_{0,i}$$

$$a2(i) := X_{0,i} \cdot Y_{1,i} - X_{1,i} \cdot Y_{0,i} \quad b2(i) := Y_{0,i} - Y_{1,i} \quad c2(i) := X_{0,i} - X_{1,i}$$

$$y(i) := \frac{1}{3} \cdot (Y_{0,i} + Y_{1,i} + Y_{2,i}) \quad x(i) := \frac{1}{3} \cdot (X_{0,i} + X_{1,i} + X_{2,i})$$

$$A(i) := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & X_{0,i} & Y_{0,i} \\ 1 & X_{1,i} & Y_{1,i} \\ 1 & X_{2,i} & Y_{2,i} \end{pmatrix}$$

$$B0(i) := \begin{pmatrix} b0(i) & 0 & \frac{a0(i)}{x(i)} + b0(i) + c0(i) \cdot \frac{y(i)}{x(i)} & c0(i) \\ 0 & c0(i) & 0 & b0(i) \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

$$B1(i) := \begin{pmatrix} b1(i) & 0 & \frac{a1(i)}{x(i)} + b1(i) + c1(i) \cdot \frac{y(i)}{x(i)} & c1(i) \\ 0 & c1(i) & 0 & b0(i) \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

$$B2(i) := \begin{pmatrix} b2(i) & 0 & \frac{a2(i)}{x(i)} + b2(i) + c2(i) \cdot \frac{y(i)}{x(i)} & c2(i) \\ 0 & c0(i) & 0 & b2(i) \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

$$B(i) := \text{augment}(B0(i), B1(i), B2(i))$$

Матриця пружних модулів для складного напруженого стану кільцевого елемента

$$D := \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \end{bmatrix} \cdot \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)}$$

Матриця жорсткості кільцевого елемента

$$K(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot A(i) \cdot x(i) \cdot 2 \cdot \pi$$

$$m_{i,2j+1} := 2 \cdot TOP_{i,j+1}$$

Визначення компонент матриці індексів

$$m_{i,(2j)} := 2 \cdot TOP_{i,j}$$

Формування матриці жорсткості елемента

$$KS_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$\max(mi) = 1.247 \times 10^3$$

$$k := 0..5$$

$$p := 0..5$$

$$KS_{m_{i,p}, m_{i,k}} := KS_{m_{i,p}, m_{i,k}} + (K(i))_{p,k}$$

Формування матриці вузлових навантажень

$$FS_{\max(mi)} := 0 \quad PN := 600$$

$$n := 70..100$$

$$FS_{2-n+1} := 2 \cdot \pi \cdot x(n) \cdot PN \quad r := 0.. \text{cols}(NOD) - 1 \quad q := 70..100$$

Нижче на рис. 6.8 зображено вузлові точки у поперечному перерізі кільцевого елемента і навантаження на внутрішню циліндричну поверхню у вигляді сил, прикладених у вузлах перпендикулярно до поверхні. Зазначимо, що вузлами у даному випадку є кільцеві лінії, отже навантаження вимірюється у кН\см.

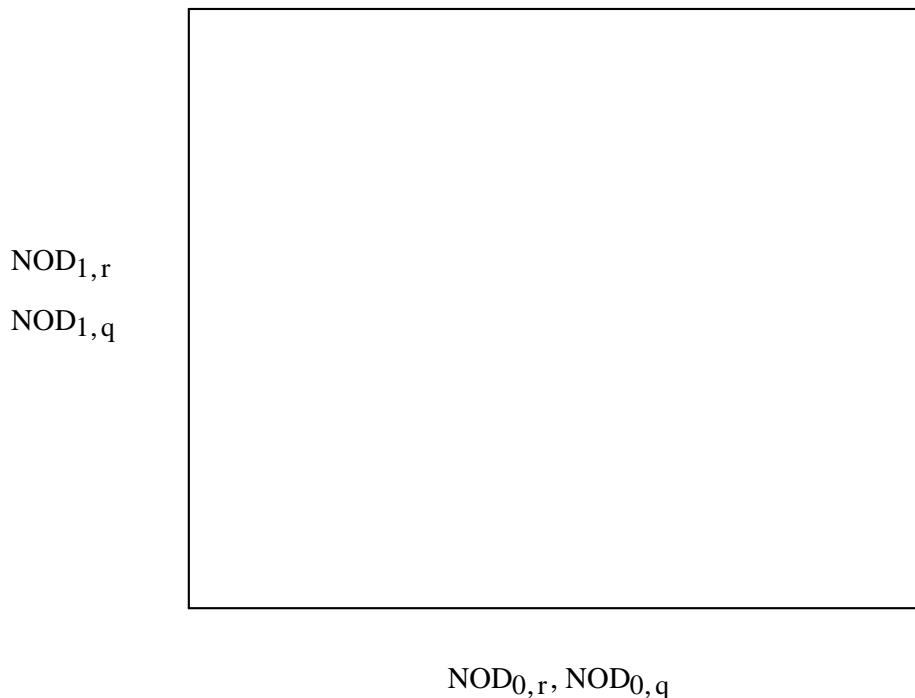


Рис. 6.8. Приведення навантаження до вузлів

Розв'язок системи рівнянь відносно вузлових переміщень

$$U := KS^{-1} \cdot FS$$

Локальні переміщення вузлів елементів

$$ss := 0..5$$

$$UELok_{ss,i} := U_{(mi,ss)}$$

Деформації і напруження у середніх точках елементів

$$\varepsilon^{(i)} := B(i) \cdot UELok^{(i)} \quad \sigma^{(i)} := D \cdot \varepsilon^{(i)} \quad \sigma := \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_\theta \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Побудова графіків розподілення напружень (рис.б.9)

```

MXY := for i ∈ 0 .. rows (TOP) - 1
      for j ∈ 0 .. 2
        vj ← TOP i, j
        for j ∈ 0 .. 2
          xj ← NOD 0, vj
          yj ← NOD 1, vj
          xm_i ← mean (x)
          ym_i ← mean (y)
      MXY ← augment (xm, ym)

```

Середні точки елементів

$$MX := MXY^{(0)}$$

$$MY := MXY^{(1)}$$

$$\sigma_x := (\sigma^T)^{(0)} \quad \sigma_y := (\sigma^T)^{(1)} \quad \sigma_\theta := (\sigma^T)^{(2)} \quad \tau_{xy} := (\sigma^T)^{(3)}$$

$$\sigma_x^T = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & -0.054 & 0.05 & 7.094 \cdot 10^{-5} & -9.749 \cdot 10^{-3} & -0.063 & 0.027 \end{array}$$

$$\sigma_y^T = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & -0.079 & 0.167 & 0.075 & 0.058 & -0.017 & 0.196 \end{array}$$

$$\sigma_\theta^T = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & -0.04 & 0.064 & 0.04 & 0.03 & -0.013 & 0.088 \end{array}$$

$$\tau_{xy}^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	0.036	-0.027	-0.122	-0.078	-0.011	-0.053

Масив координат середніх точок елементів

$$MXY^T = \mathbf{\cdot}$$

$$VX := \sigma_x \quad M := MXY \quad n := 2$$

$$RX := \text{regress}(M, VX, n)$$

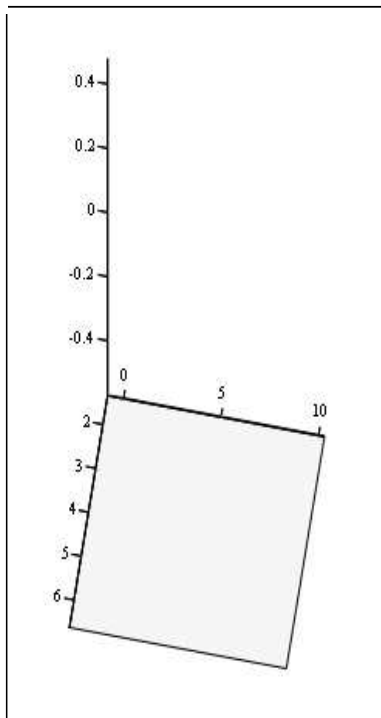
$$f1(x, y) := \text{interp} \left[RX, M, VX, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$frx(x, y) := \begin{cases} frx \leftarrow f1(x, y) \\ frx \leftarrow \text{if}[(2 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 6) \vee (4 \leq x \leq 6 \wedge 4 \leq y \leq 8)], frx, 0 \end{cases}$$

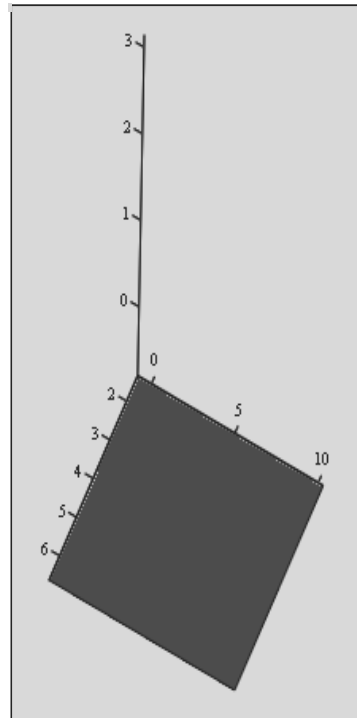
$$x1 := 1.5 \quad x2 := 6.5 \quad y1 := -0.5 \quad y2 := 10$$

$$nx := 250 \quad ny := 300$$

$$FR1 := \text{CreateMesh}(frx, x1, x2, y1, y2, nx, ny)$$



σ_x



τ_{xy}

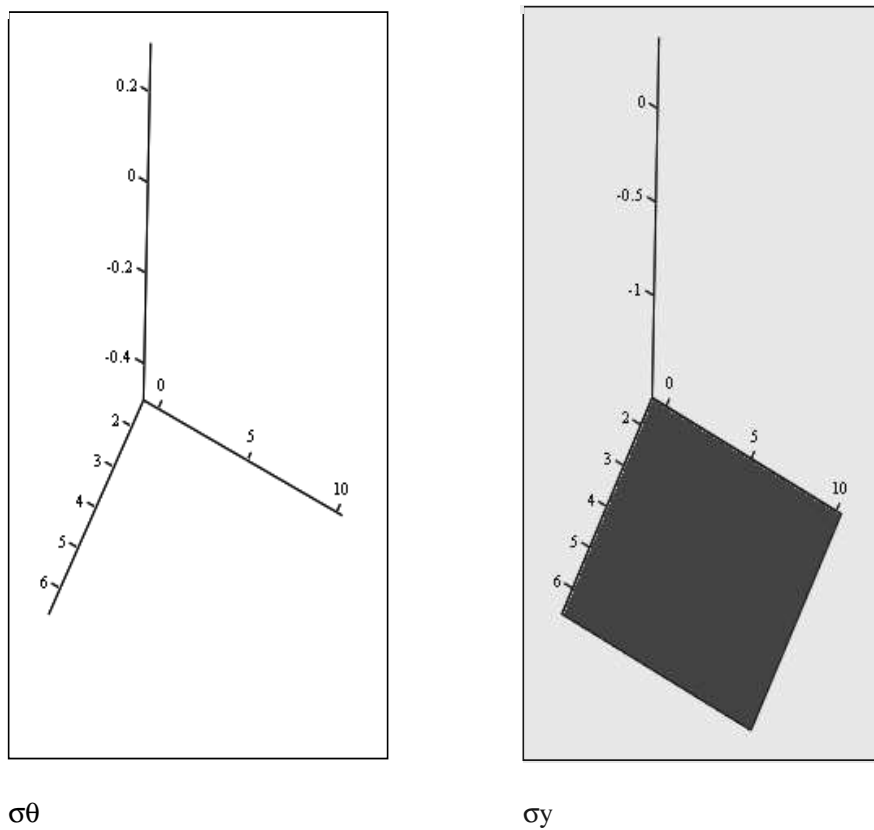


Рис. 6.9. Розподілення напружень по перерізу

РОЗДІЛ 7

ВИКОРИСТАННЯ ІЗОПАРАМЕТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

При розрахунках областей, що мають криволінійні границі, для задовільного геометричного моделювання цих областей необхідно використати велику кількість елементів із прямолінійними сторонами або плоскими гранями.

Якщо скористатись криволінійними елементами, то кількість їх можна значно зменшити, що, у свою чергу, зменшить кількість невідомих у задачі. Для побудови таких елементів використовують відображення простих елементів, віднесених до локальної системи координат, у більш складні, віднесені до загальної (глобальної) системи. Прикладом такого відображення може бути зв'язок між полярними і декартовими координатами

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (7.1)$$

яке приводить прямокутник у площині r, ϑ в елемент площини x, y (рис. 7.1).

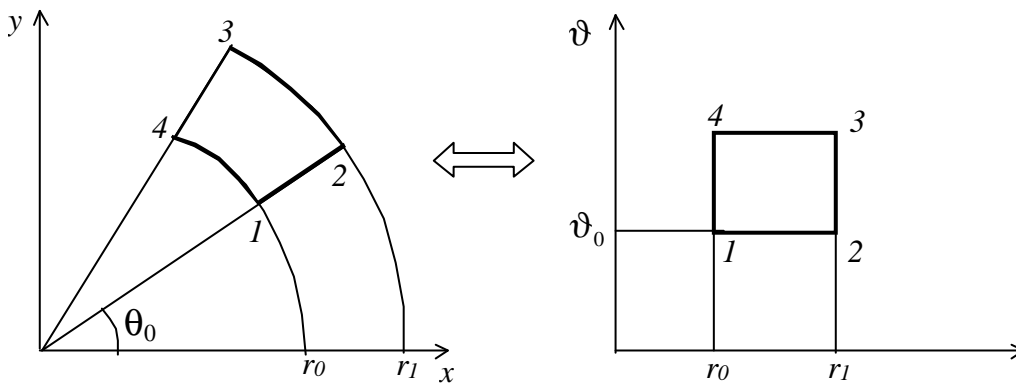


Рис. 7.1. Зв'язок між прямокутною і полярною системами координат

Довільне відображення (рис. 7.2) описується деякою функціональною залежністю між двома системами координат, яка у загальному вигляді може бути записана як

$$x = f_1(\xi, \eta), \quad y = f_2(\xi, \eta). \quad (7.2)$$

Якщо вибрано координатний вид відображення, і для кожного елемента координати підбрано так, що відбувається їх відображення в області, які мають спільну межу, то базисні функції, записані в локальній області (ξ, η) елемента, можуть бути використані для описання змін

функції в глобальній області (x, y) елемента без порушення між елементами вимог неперервності.

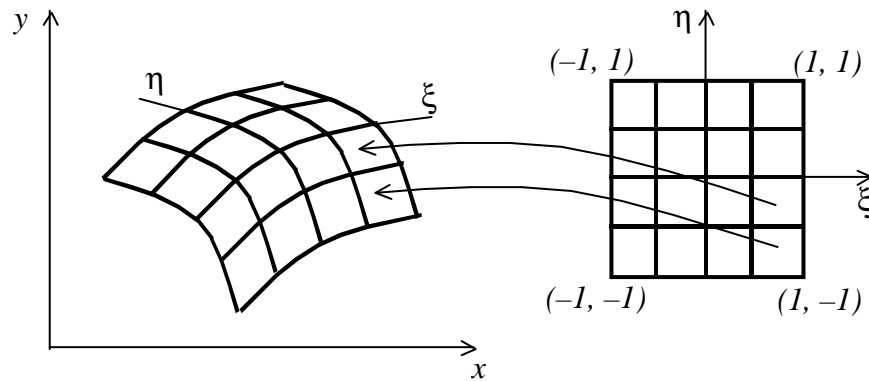


Рис. 7.2. Схема довільного відображення

Хоча існують різні варіанти побудови криволінійних елементів, спосіб, який використовує відображення елементів, є найпоширенішим.

Відображення з локальної системи координат ξ, η у декартову x, y реалізується за допомогою співвідношень

$$x = \mathbf{N}\mathbf{X}, \quad y = \mathbf{N}\mathbf{Y}, \quad (7.3)$$

де $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ – інтерполяційні функції, визначені в локальній системі координат, причому кожна з координат змінюється від $+1$ до -1 ;

\mathbf{X}, \mathbf{Y} – матриці координат вузлів елемента в глобальній системі координат;

x, y – декартові координати.

Використаємо інтерполяційні функції \mathbf{N} для того, щоб записати переміщення у точках елемента

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{v}}, \quad (7.4)$$

де $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$ – переміщення вузлових точок.

Елементи, для яких перетворення координат і переміщень проводиться за допомогою одних і тих же інтерполяційних функцій, називають ізопараметричними (рис. 7.3, б).

Якщо кількість вузлових точок для відображення геометрії (координат \mathbf{x}, \mathbf{y}) і розшукуваних функцій (\mathbf{u}, \mathbf{v}) різна, елементи називають суперпараметричними (якщо розмірність векторів \mathbf{X}, \mathbf{Y} більша, ніж $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$) (рис. 7.3, а) або субпараметричними (якщо, навпаки, кількість вузлових значень функцій більша, ніж кількість вузлових значень координат) (рис. 7.3, в).

До функцій форми, записаних у локальних координатах, ставиться ряд вимог, які забезпечують неперервність функцій на границях елементів і, відповідно, збіжність результатів розрахунку до точних при зменшенні розмірів скінченних елементів.

В основному, вони співпадають із вимогами до вибору інтерполяційних функцій в глобальній системі [6].

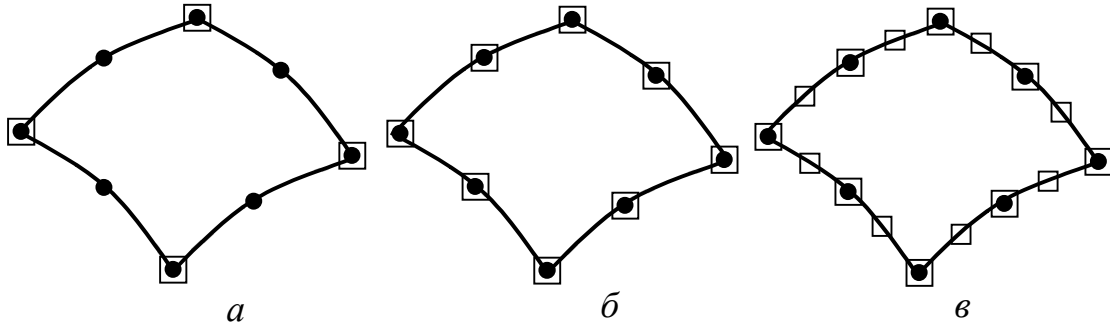


Рис. 7.3. Суперпараметричний (а), ізопараметричний (б) і субпараметричний (в) елементи

7.1. Плоскі скінченні елементи

Розглянемо чотирикутники двох видів: з прямолінійними сторонами (рис. 7.4, а) і параболічними (рис. 7.4, б).

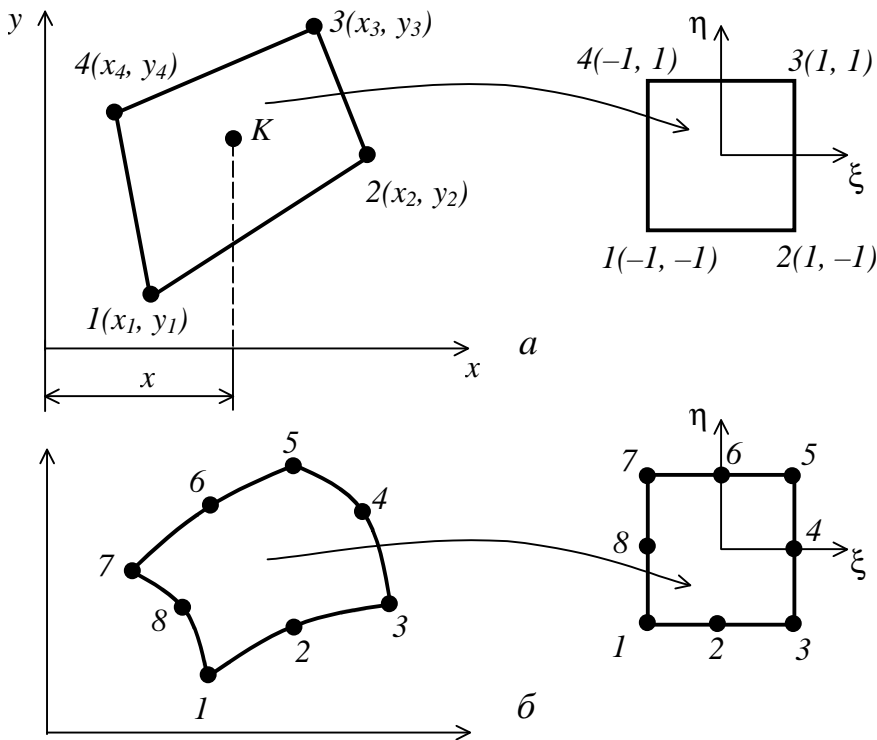


Рис. 7.4. Плоскі скінченні елементи: з прямолінійними сторонами (а); з параболічними сторонами (б)

Функції, що відображають квадрат на чотирикутник з прямолінійними кромками, мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4) \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4) \mathbf{Y}, \\ \mathbf{X} &= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T, \quad \mathbf{Y} = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4)^T, \\ N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для елемента з криволінійними сторонами

$$\begin{aligned} x &= [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \mathbf{X}, \quad y = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \mathbf{Y}, \\ \mathbf{X} &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_8]^T, \quad \mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_8]^T. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Інтерполяційні функції

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\ N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \\ N_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Залежності (7.5), (7.6) ставлять у відповідність кожній точці $K(\xi, \eta)$ у квадраті справа точку $K(x, y)$, розміщену в чотирикутнику зліва (рис. 7.2). При цьому кутові точки квадрата переходять у кутові точки прямокутника.

Розглянемо процес побудови матриць жорсткості для елемента, зображеного на рис. 7.4, б.

Вважаємо, що переміщення апроксимуються за допомогою тих же локальних функцій, що і координати

$$u = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8) \bar{\mathbf{u}}, \quad v = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8) \bar{\mathbf{v}}, \quad (7.8)$$

де

$$\bar{\mathbf{u}} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_8)^T, \quad \bar{\mathbf{v}} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_8)^T.$$

Деформації для плоскої задачі визначаються через переміщення формулами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (7.9)$$

$$\text{де } \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \dots \ \mathbf{B}_8], \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_8 \ v_8)^T. \quad (7.10)$$

Щоб визначити похідні $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ необхідно записати їх через похідні по ξ, η , оскільки функції N_i залежать саме від ξ, η .

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (7.11)$$

або у матричній формі

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

де \mathbf{I} – матриця Якобі

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

З виразу (7.12) маємо

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = (1 \ 0) \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = (0 \ 1) \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи (7.14) у (7.10), одержимо

$$B_i = \begin{bmatrix} (1 \ 0)\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (0 \ 1)\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ (0 \ 1)\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} & (1 \ 0)\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Для одержання матриці жорсткості використаємо формулу

$$\mathbf{K} = h \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx dy = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{I} \, d\xi d\eta. \quad (7.16)$$

Інтеграл обчислюється чисельним способом. Розрахункова формула має вигляд

$$\mathbf{K} = h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j \mathbf{f}(\xi_i, \eta_j), \quad (7.17)$$

де $\mathbf{f}(\xi_i, \eta_j)$ – значення підінтегрального виразу для точки $\xi = \xi_i$, $\eta = \eta_j$;

H_i, H_j – вагові коефіцієнти, які залежать від способу обчислення інтеграла [6].

Для досягнення необхідної точності інтегрування треба вибрати кількість точок інтегрування у відповідності з формою елемента.

На рис. 7.5 показано розміщення точок інтегрування в елементі для двоточкового правила інтегрування (а), триточкового (б) і чотириточкового (в).

Для прямокутних елементів при чисельному інтегруванні доцільно скористатись формулою Гауса, яка має вигляд

$$\int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j \mathbf{f}(\xi_j), \quad (7.18)$$

де для $n=2$ $\xi_1 = \pm 0.57735$, $H_1 = 1.0000$, $H_2 = 1.0000$;

для $n=3$ $\xi_1 = -0.774596$, $H_1 = 0.5555$, $H_1 = \frac{5}{9}$,

$$\xi_2 = 0, \quad H_2 = 0.8888, \quad H_2 = \frac{8}{9},$$

$$\xi_2 = 0.774596, \quad H_3 = 0.5555, \quad H_3 = \frac{5}{9};$$

для $n = 4$ $\xi_4 = -\xi_1 = 0.86113631, \quad H_4 = H_1 = 0.86113631,$

$$\xi_3 = -\xi_2 = 0.33998104, \quad H_2 = H_3 = 0.32607258.$$

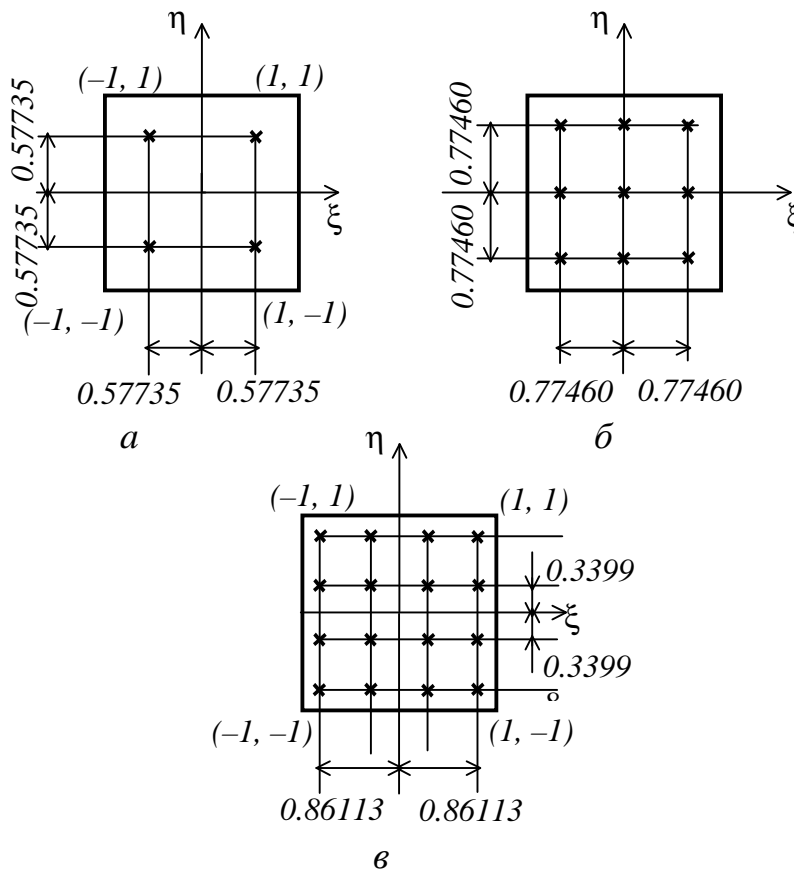


Рис. 7.5. Розміщення точок інтегрування

Наведемо приклад обчислення подвійного інтеграла для $n = 3$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi. \quad (7.19)$$

Застосуємо формулу Гауса для обчислення зовнішнього інтеграла

$$I = \frac{5}{9} \int_{-1}^1 f(\xi_1, -\eta_1) d\xi + \frac{8}{9} \int_{-1}^1 f(\xi_1, 0) d\xi + \frac{5}{9} \int_{-1}^1 f(\xi_1, \eta_1) d\xi,$$

де $|\xi_1| = |\eta_1| = 0.77469667$.

Обчислюємо далі внутрішні інтеграли

$$I = \frac{5}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, -\eta_1) + \frac{8}{9} f(0, -\eta_1) + \frac{5}{9} f(\xi_1, -\eta_1) \right] +$$

$$+ \frac{8}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, 0) + \frac{8}{9} f(0, 0) + \frac{5}{9} f(\xi_1, 0) \right] +$$

$$+ \frac{5}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, \eta_1) + \frac{8}{9} f(0, \eta_1) + \frac{5}{9} f(\xi_1, \eta_1) \right].$$

Якщо інтервалом інтегрування є відрізок $a \leq x \leq b$, координати точок інтегрування у (7.18) обчислюються за формулою

$$\frac{(b-a)\xi_i + b + a}{2},$$

а перед інтегралом вводиться множник $\frac{b-a}{2}$.

Вузлові сили для ізопараметричного елемента обчислюються за формулою

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{N}_S^T \mathbf{p}_S dS, \quad (7.20)$$

де \mathbf{N}_S – матриці функцій форми для відповідної сторони елемента

(наприклад, $\eta = 1$), $\mathbf{p}_S = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ – компоненти поверхневих сил, направлених у напрямку осей x і y .

Диференціал dS у локальній системі координат ξ, η шукаємо так:

$$dS = h \cdot dl, \text{ де } dl \text{ – диференціал довжини}$$

$$dl = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

Похідні $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$ були визначені раніше.

При чисельному інтегруванні [2, с.122]

$$\mathbf{F} = h \sum_i^n H_i \mathbf{N}_{S_i}^T \mathbf{p}_{S_i},$$

(h – товщина елемента, i – точки інтегрування).

Нагадаємо що всі величини під знаком суми обчислюються у точках, що залежать від H_i . Інтегрування проводиться по одній координаті ξ , оскільки $\eta = 1$.

7.2. Застосування ізопараметричних елементів у об'ємних задачах

Наведемо коротко основні залежності, які використовуються при побудові матриць жорсткості ізопараметричних елементів для осесиметричних і об'ємних тіл [6, 35].

Напруження і деформації в осесиметричному тілі зображено на рис. 7.6.

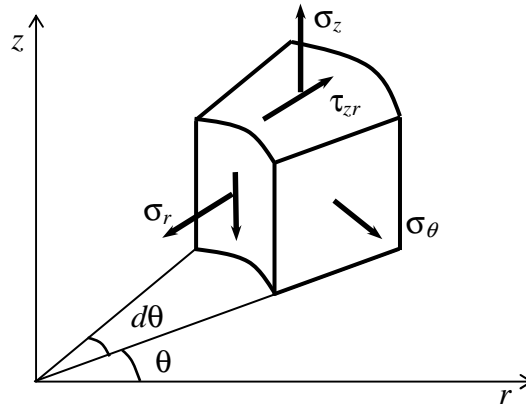


Рис. 7.6. Напруження і деформації в осесиметричному тілі

Залежність між деформаціями і переміщеннями для осесиметричної задачі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Для апроксимації переміщень у перерізі кільцевого елемента використовуються наведені вище функції апроксимації для плоского елемента

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (7.22)$$

Деформації

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} = (\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \dots \ \mathbf{B}_n)\mathbf{q}, \quad (7.23)$$

де

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{N_i}{r} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Напруження пов'язане з деформаціями такою залежністю:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_\theta \quad \tau_{rz})^T, \quad (7.25)$$

$$\mathbf{D} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_2 & 0 \\ a_2 & 1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

$$a_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad a_2 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad a_3 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Матриці жорсткості визначаються інтегралом

$$\mathbf{K} = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} R \det \mathbf{I} d\xi d\eta. \quad (7.27)$$

У даному випадку

$$dV = 2\pi R \det \mathbf{I} d\xi d\eta. \quad (7.28)$$

Для розв'язку осесиметричних задач може бути використаний ізопараметричний 8-вузловий елемент, розглянутий вище.

Розглянемо ізопараметричні елементи, які можуть бути використані при розрахунках об'ємного напруженого стану. Найбільш часто використовуються 8-вузловий і 20-вузловий елементи (рис. 7.7).

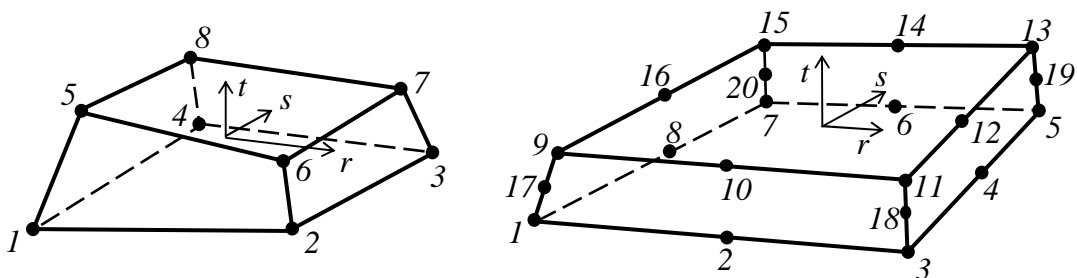


Рис. 7.7. 8-вузловий і 20-вузловий ізопараметричні елементи

Поле переміщень для ізопараметричних об'ємних елементів приймається у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i,$$

u_i, v_i, w_i – вузлові переміщення;

n – кількість вузлів;

N_i – функції форми скінченного елемента.

Функції форми для 8-вузлового елемента [2]

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t), & N_2 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t), & N_4 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t), \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t), & N_6 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t), \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t), & N_8 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t). \end{aligned}$$

Для 20-вузлового елемента

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)(-r-s-t-2), & N_2 &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)(1-t), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)(r-s-t-2), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)(1-t), \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)(r+s-t-2), & N_6 &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s)(1-t), \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)(-r+s-t-2), & N_8 &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)(1-t), \\ N_9 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)(-r-s+t-2), & N_{10} &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)(1+t), \\ N_{11} &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)(r-s+t-2), & N_{12} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)(1+t), \\ N_{13} &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)(r+s+t-2), & N_{14} &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s)(1+t), \\ N_{15} &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)(-r+s+t-2), & N_{16} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)(1+t), \\ N_{17} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1-r)(1-s), & N_{18} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1+r)(1+s), \\ N_{19} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1+r)(1+s), & N_{20} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1-r)(1+s). \end{aligned}$$

Матриці жорсткості аналогічно попередньому визначаються інтегралами

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} R \det \mathbf{I} dr ds dt,$$

де

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n),$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^T.$$

Матриця пружних модулів для ізотропного матеріалу

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 2G + \lambda,$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G,$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda,$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Вектор вузлових сил, обумовлених поверхневим навантаженням, направлений по нормалі до кожної грані

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_S^T \mathbf{p} \det \mathbf{I}_S \, dr \, ds,$$

де \mathbf{N}_S – двовимірні функції форми у локальній системі для кожної грані скінченного елемента;

\mathbf{I}_S – матриця Якобі для відповідної грані.

Докладніше про використання об'ємних ізопараметричних елементів можна прочитати у [6].

ПРИКЛАД 7.1. Визначити переміщення для пластини, навантаженої у її площині (рис. 7.8)

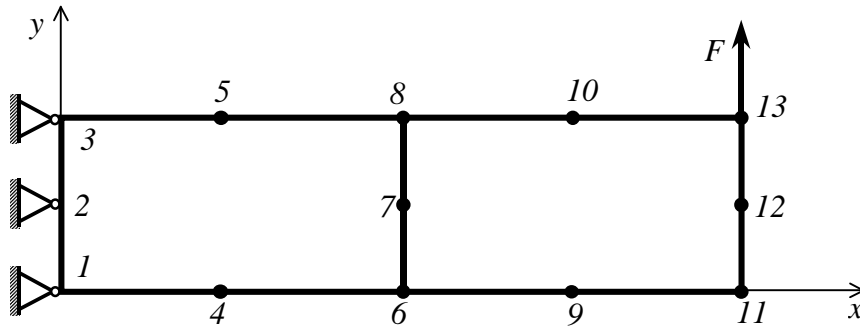


Рис. 7.8. Схема розділення пластини на ізопараметричні елементи

Координати вузлів

$$\text{Nodes} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 12 & 13 & 10 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{nel} &:= \text{rows}(\text{Top}) & \text{nel} &= 2 & \text{ie} &:= (1 \dots \text{nel}) \\ \text{nnd} &:= \text{cols}(\text{Top}) & \text{nnd} &= 8 & \text{j} &:= (1 \dots \text{nnd}) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} X_{n_j, \text{ie}} \\ Y_{n_j, \text{ie}} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \text{Nodes}_{1, (\text{Top}_{\text{ie}, j})} \\ \text{Nodes}_{2, (\text{Top}_{\text{ie}, j})} \end{bmatrix}$$

Матриці функцій апроксимації та їх похідні

$$N(r, s) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(-1+r) \cdot (-1+s) \cdot (r+s+1) \\ 2 \cdot (-1+r^2) \cdot (-1+s) \\ (1+r) \cdot (-1+s) \cdot (-r+s+1) \\ -2 \cdot (1+r) \cdot (-1+s^2) \\ (1+r) \cdot (1+s) \cdot (r+s-1) \\ -2 \cdot (-1+r^2) \cdot (1+s) \\ -(-1+r) \cdot (1+s) \cdot (-r+s-1) \\ 2 \cdot (-1+r) \cdot (-1+s^2) \end{bmatrix}$$

$$dNds(r, s) := \frac{d}{ds} N(r, s) \quad dNdr(r, s) := \frac{d}{dr} N(r, s)$$

Параметризація координат

$$x(r, s, Xn) := N(r, s)^T \cdot Xn \quad y(r, s, Yn) := N(r, s)^T \cdot Yn$$

Матриця Якобі

$$dN1(r, s) := dNdr(r, s)^T \quad dN2(r, s) := dNds(r, s)^T \quad v := (1..8)$$

$$J(r, s, ie) := \begin{bmatrix} \sum_v dNdr(r, s)_v \cdot (Xn^{ie})_v & \sum_v dNdr(r, s)_v \cdot (Yn^{ie})_v \\ \sum_v dNds(r, s)_v \cdot (Xn^{ie})_v & \sum_v dNds(r, s)_v \cdot (Yn^{ie})_v \end{bmatrix}$$

Визначник матриці Якобі

$$\det J(r, s, ie) := |J(r, s, ie)|$$

Обернена матриця Якобі

$$JJ(r, s, ie) := J(r, s, ie)^{-1}$$

Похідні у глобальних координатах

$$dNdx(r, s, ie) := (JJ(r, s, ie)_{1,1} \cdot dNdr(r, s) + JJ(r, s, ie)_{1,2} \cdot dNds(r, s))$$

$$dNdy(r, s, ie) := (JJ(r, s, ie)_{2,1} \cdot dNdr(r, s) + JJ(r, s, ie)_{2,2} \cdot dNds(r, s))$$

$$Nul_8 := 0 \quad dN3(r, s, ie) := dNdx(r, s, ie)^T \quad dN4(r, s, ie) := dNdy(r, s, ie)^T$$

$$B1(r, s, ie) := \text{augment}(dN3(r, s, ie), Nul^T) \quad B2(r, s, ie) := \text{augment}(Nul^T, dN4(r, s, ie))$$

$$B3(r, s, ie) := \text{augment}(dN4(r, s, ie), dN3(r, s, ie))$$

$$BT(r, s, ie) := \text{augment}(\text{augment}(B1(r, s, ie)^T, B2(r, s, ie)^T), B3(r, s, ie)^T)$$

$$B(r, s, ie) := BT(r, s, ie)^T$$

$$E := 2 \cdot 10^4 \quad \mu := 0.3 \quad h := 0.2$$

Матриця модулів пружності

$$D := E \cdot \frac{h}{1 - \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{pmatrix}$$

Матриця індексів

$$mi_{ie, j} := (2 \cdot Top_{ie, j} - 1) \quad mi_{ie, j+8} := 2 \cdot Top_{ie, j}$$

$$mi = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & 7 & 11 & 13 & 16 & 10 & 6 & 4 & 2 & 8 & 12 & 14 \\ 11 & 17 & 21 & 23 & 25 & 19 & 15 & 13 & 12 & 18 & 22 & 24 & 26 & 20 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

Обчислення матриці жорсткості елемента

$$M1(r, s, ie) := BT(r, s, ie) \cdot D \quad M2(r, s, ie) := M1(r, s, ie) \cdot B(r, s, ie)$$

$$M3(r, s, ie) := M2(r, s, ie) \cdot \det J(r, s, ie)$$

$$r1 := 0.774597 \quad r2 := 0 \quad r3 := -0.774597$$

$$s1 := 0.774597 \quad s2 := 0 \quad s3 := r3$$

$$a1 := 0.55555555555556 \quad a3 := 0.55555555555556 \quad a2 := 0.88888888888889$$

$$Kel(ie) := \begin{pmatrix} a1 \cdot a1 \cdot M3(r1, s1, ie) + a1 \cdot a2 \cdot M3(r1, s2, ie) + a2 \cdot a1 \cdot M3(r2, s1, ie) \dots \\ + a2 \cdot a2 \cdot M3(r2, s2, ie) + a1 \cdot a3 \cdot M3(r1, s3, ie) + a1 \cdot a3 \cdot M3(r3, s1, ie) \dots \\ + a2 \cdot a3 \cdot M3(r2, s3, ie) + a2 \cdot a3 \cdot M3(r3, s2, ie) \dots \\ + a3 \cdot a3 \cdot M3(r3, s3, ie) \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості системи елементів

$$q := (1..16) \quad p := (1..16)$$

$$KK_{(26, 26)} := 0$$

$$KK_{(mi_{ie,q}, mi_{ie,p})} := [KK_{(mi_{ie,q}, mi_{ie,p})} + Kel(ie)_{q,p}]$$

$$K := \text{submatrix}(KK, 7, 26, 7, 26)$$

$$F_{20} := 10$$

$$\text{Переміщення вузлів} \quad U := K^{-1} \cdot F$$

$$U = \begin{pmatrix} 0.011 \\ 0.024 \\ -0.011 \\ 0.024 \\ 0.021 \\ 0.091 \\ -3.585 \times 10^{-6} \\ 0.091 \\ -0.021 \\ 0.091 \\ 0.026 \\ 0.188 \\ -0.026 \\ 0.188 \\ 0.029 \\ 0.301 \\ -1.769 \times 10^{-5} \\ 0.301 \\ -0.029 \\ 0.301 \end{pmatrix}$$

7.3. Використання перетворень координат для побудови сітки скінченних елементів

Розділення на елементи, тобто побудова сітки скінченних елементів є першим етапом розрахунку МСЕ. У зв'язку зі складністю конструкцій задача побудови сітки є одним із найскладніших етапів алгоритму МСЕ. Необхідність автоматизації процесу введення інформації у МСЕ обумовила появу великої кількості алгоритмів розділення на елементи. Короткий огляд методів розділення можна знайти у [14].

Зазначимо, що всі універсальні програми, які використовують МСЕ, мають у своєму складі підпрограми, які забезпечують мінімум інформації

для виконання алгоритму і, зокрема, підпрограми побудови сітки скінченних елементів.

У розділі 4 наведено програму триангуляції плоскої області, основувану на послідовному заповненні заданої області трикутними елементами. Більш універсальними є алгоритми, які базуються на розглянутому вище ізопараметричному перетворенні.

Область попередньо розбивають на зони, які нумерують у довільній послідовності. Від послідовності нумерації залежить ширина стрічки глобальної матриці жорсткості. Кожна зона – це квадратичний 8-вузловий чотирикутник. Для кожної зони вводять локальну систему координат $\xi\eta$ (рис. 7.9, а).

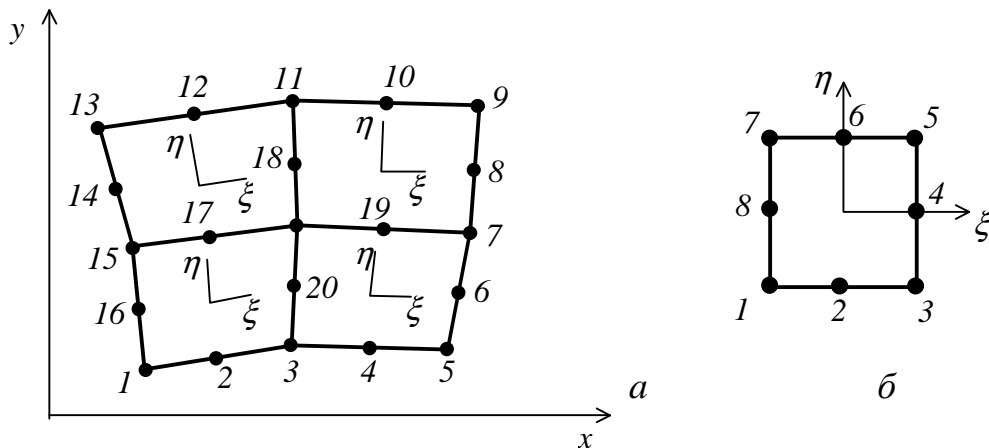


Рис. 7.9. Схема розділення області на зони (а); елемент у локальній системі координат (б)

Зона у локальній системі координат – це квадрат (рис. 7.9, б) з вісьмома вузлами. Для розділення кожної зони на скінченні елементи спочатку таке розділення проводять на елементі у локальних координатах, розбиваючи сторони елемента на частини (як правило, однакові) $\Delta\xi$ і $\Delta\eta$. Після цього обчислюють локальні координати вузлів одержаної сітки і переходять від локальної системи координат $\xi\eta$ до глобальної за формулами

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i,$$

де x_i, y_i – глобальні координати вузлів квадратичного елемента (зони); N_i – функції форми для плоского квадратичного елемента

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi),$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta),$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi).$$

Таким чином, перетворення координат дозволяє одержати глобальні координати вузлів у кожній підобласті, які відповідають координатам прямокутної сітки у локальній системі координат (рис. 7.10)

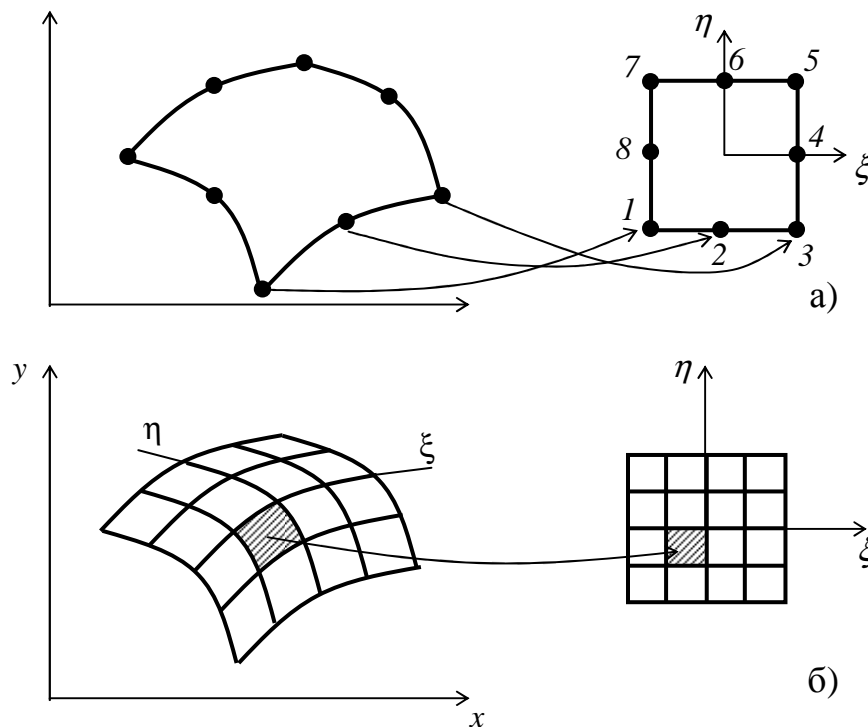


Рис. 7.10. Схеми відображень: пряме(а); обернене (б)

Важливими етапами у генерації сітки вузлів є нумерація вузлів і графічне відображення сітки. Для реалізації цих етапів розробляють спеціальні підпрограми перенумерації вузлів і візуалізації сітки.

У наведеному нижче прикладі для ілюстрації методу побудови сітки використовуються особливості пакета MathCAD, у зв'язку з чим автоматизація побудови не є повною і потребує введення додаткової інформації у вигляді топологічних матриць.

ПРИКЛАД 7.2. Використання перетворення координат для побудови сітки скінченних елементів.

Вибрану область необхідно попередньо розділити на базові восьмивузлові елементи, після чого задати кількість поділок на кожній зі сторін цих елементів (однакову для протилежних сторін). У даному випадку використаємо рівномірне розділення (п'ять вузлів на кожній зі сторін трьох восьмивузлових (базових) елементів). Взагалі, розміщення вузлових точок на кожній зі сторін може бути довільним. Початкове розділення області на три восьмивузлові скінченні елементи має такий вигляд (рис. 7.11):

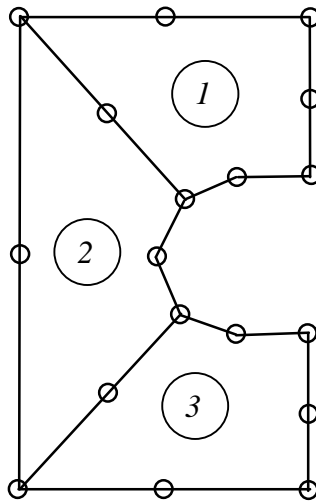


Рис. 7.11. Початкове розділення області на елементи

Матриця координат вузлів у глобальній системі координат

$$\text{Nod} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2.2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 2.3 & 3 & 4 & 1.3 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2.4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3.7 & 4 & 4 & 4.7 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 18 & 17 & 16 & 14 & 11 & 12 & 13 & 15 \\ 16 & 9 & 1 & 4 & 6 & 10 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Кількість елементів

$$\text{nel} := \text{rows}(\text{Top}) \quad \text{nel} = 3 \quad \text{ie} := (1.. \text{nel})$$

Кількість вузлів у елементі

$$\text{mnd} := \text{cols}(\text{Top}) \quad \text{mnd} = 8 \quad \text{j} := (1.. \text{mnd})$$

Координати вузлів кожного елемента

$$\begin{pmatrix} X_{n,j,ie} \\ Y_{n,j,ie} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \text{Nod}_{1,(\text{Top}_{ie,j})} \\ \text{Nod}_{2,(\text{Top}_{ie,j})} \end{bmatrix}$$

Матриця функцій інтерполяції

$$N(r,s) := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(-1+r) \cdot (-1+s) \cdot (r+s+1) \\ 2 \cdot (-1+r^2) \cdot (-1+s) \\ (1+r) \cdot (-1+s) \cdot (-r+s+1) \\ -2 \cdot (1+r) \cdot (-1+s^2) \\ (1+r) \cdot (1+s) \cdot (r+s-1) \\ -2 \cdot (-1+r^2) \cdot (1+s) \\ -(-1+r) \cdot (1+s) \cdot (-r+s-1) \\ 2 \cdot (-1+r) \cdot (-1+s^2) \end{bmatrix}$$

Початковий восьмивузловий скінченний елемент у локальних координатах (рис. 7.12)

```
s_node := (-1 -1 -1 0 1 1 1 0 -1)T
r_node := (-1 0 1 1 1 0 -1 -1 -1)T
kk := (1..nnd + 1)
```

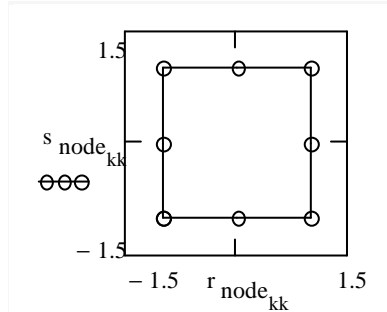


Рис. 7.12. Початковий 8-вузловий скінченний елемент

Координати вузлів у локальній системі після додаткового поділу

```
r := (
  (-1 -0.5 0 0.5 1)
  (-1 -0.5 0 0.5 1)
  (-1 -0.5 0 0.5 1)
  (-1 -0.5 0 0.5 1)
  (-1 -0.5 0 0.5 1)
)T
s := rT
s = (
  (-1 -1 -1 -1 -1)
  (-0.5 -0.5 -0.5 -0.5 -0.5)
  (0 0 0 0 0)
  (0.5 0.5 0.5 0.5 0.5)
  (1 1 1 1 1)
)
```

Восьмивузловий скінченний елемент у локальних координатах після поділу (рис. 7.13)

```
m := 1..5    n := 1..5
```

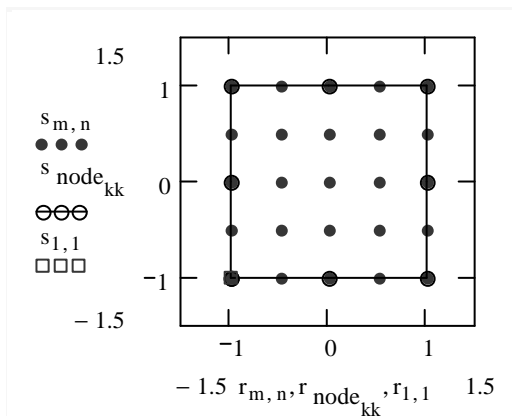


Рис.7.13. Восьмивузловий скінченний елемент у локальних координатах

Масиви координат вузлів елементів у локальних координатах

```
k := 1..cols(r)    i := 1..rows(r)
```


$$X_{[(ie-1) \cdot 5 + i], k} := \sum_j \left[N(r_{i,k}, s_{i,k})_j \cdot (X_n^{(ie)})_j \right]$$

$$Y_{[(ie-1) \cdot 5 + i], k} := \sum_j \left[N(r_{i,k}, s_{i,k})_j \cdot (Y_n^{(ie)})_j \right]$$

cols(X) = 5 rows(X) = 15

Вузлові точки нової сітки (рис.7.14)

$$x_{\min} := (\min(X_n) - 2) \quad x_{\max} := (\max(X_n) + 2)$$

$$y_{\max} := (\max(Y_n) + 2)$$

$$ip := (1..rows(X)) \quad k := (1..nnd)$$

$$y_{\min} := (\min(Y_n) - 2)$$

Координати вузлів у глобальній системі координат

$$XV(X) := \begin{cases} v \leftarrow (X^T)^{(1)} \\ \text{for } j \in 2..cols((X^T)) \\ v \leftarrow \text{stack}[v, (X^T)^{(j)}] \\ v^T \end{cases}$$

$$YV(Y) := \begin{cases} v \leftarrow (Y^T)^{(1)} \\ \text{for } j \in 2..cols((Y^T)) \\ v \leftarrow \text{stack}[v, (Y^T)^{(j)}] \\ v^T \end{cases}$$

$$NOD := \text{stack}(XV(X), YV(Y))$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NOD = 1	4	3	2	1	0	4	3.144	2.306	1.488	0.688
2	6	6	6	6	6	5.5	5.481	5.444	5.388	5.313

$$iv := 1..cols(NOD)$$

$$cols(NOD) = 75$$

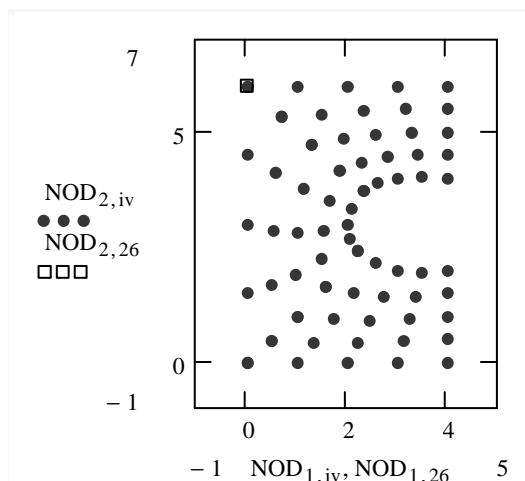


Рис. 7.14. Вузлові точки сітки

Локальні координати після поділу знаходяться у масивах s і r

Топологічна матриця для елемента у локальних координатах

$$T1 := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 9 & 3 \\ 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad T2 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 3 \\ 8 & 4 & 9 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 4 \\ 9 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

TOP1 := stack(T, T + 5, T + 10, T + 15)

TOP3 := stack(T2, T2 + 5, T2 + 10, T2 + 15)

TOP2 := stack(T1, T1 + 5, T1 + 10, T1 + 15)

Топологічна матриця для усіх трьох елементів

TOP := stack(TOP1, TOP2 + 25, TOP3 + 50)

ies := 1..rows(TOP)

j := 1..cols(TOP)

Координати вузлів трикутних елементів

last(TOP^{<1>}) = 96

$$\begin{pmatrix} XN_{j,ies} \\ YN_{j,ies} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} NOD_{1,(TOP_{ies,j})} \\ NOD_{2,(TOP_{ies,j})} \end{bmatrix}$$

last[(NOD^T)^{<1>}] = 75

Побудова сітки скінченних елементів (рис. 7.15, а).

J_{ies} := 10⁶ JT := J^T

XNd := stack(XN, JT)^T YNd := stack(YN, JT)^T

p := 1..rows(XNd) rows(XNd) = 96

q := 1..cols(XNd) cols(XNd) = 5

Аналогічно можна побудувати сітку з чотирикутних елементів (рис. 7.15, б).

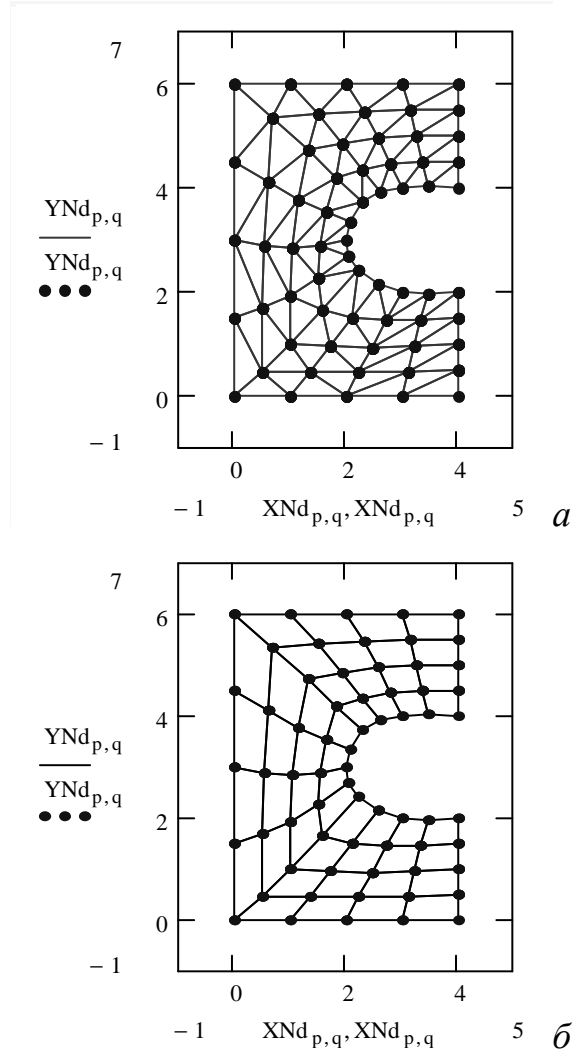


Рис. 7.15. Побудова сітки скінченних елементів

Як видно, при використанні відображення для побудови сітки на заданій площі фігури використовується попередній поділ початкових елементів у локальній системі координат, після чого одержані точки переносяться на задану фігуру (у глобальну систему координат). Спрощення побудови сітки для деталей складної форми обумовлене порівняно простою процедурою її побудови для елементів у локальній системі координат.

РОЗДІЛ 8

СТІЙКІСТЬ

Під стійкістю розуміють здатність системи зберігати незмінним свій стан при зовнішніх збуреннях. Якщо не розглядати системи принципово нестійкі за своєю природою, то для всіх інших нестійких систем можна зафіксувати момент переходу від стійкого стану до нового, як правило, нестійкого, при якому розвиваються значні деформації, що порушують умови нормальної експлуатації системи. Параметри, які характеризують такий перехід, називаються критичними. Якщо перехід до нестійкого стану залежить від зовнішнього навантаження, то узагальнена сила, перевищення якої приводить до цього переходу, називається критичною силою. Звичайно робоче навантаження призначається як n -на частина критичного, де n – коефіцієнт запасу за стійкістю.

Існують три основні методи для визначення критичних сил:

1) Статичний метод, що ґрунтується на рівняннях рівноваги деформованої системи. Згідно з цим методом критичне навантаження системи визначають як найменше навантаження, при якому відбувається розгалуження форм рівноваги, тобто разом із початковим існує й суміжне положення рівноваги.

2) Енергетичний метод, оснований на аналізі потенціальної енергії системи, яка в положенні стійкої рівноваги є мінімальною. Відхилення системи від положення рівноваги збільшує її потенціальну енергію. При цьому критичне навантаження визначається як таке, при якому можна відхилити систему від стану рівноваги, не збільшуючи її потенціальної енергії.

3) Загальним методом визначення стійкості системи є динамічний метод, згідно з яким розглядається рух системи біля положення рівноваги та її реакції на невеликі збурення. Якщо в результаті незначного початкового відхилення (або надання невеликої швидкості) система рухатиметься так, що набуде істотних переміщень, вона вважається нестійкою. Якщо ж невеликим початковим збуренням відповідають малі переміщення біля положення рівноваги і малі швидкості, то система стійка.

Далі розглянемо лише два перші методи, як найчастіше вживані в статистиці стержневих систем.

8.1. Стійкість прямолінійного стержня під дією статичних сил

Нехай стержень прямий, матеріал його ідеально пружний, а стискаючі сили діють по осі стержня. При малому навантаженні стержень перебуває в положенні рівноваги і зберігає прямолінійну форму. Знайдемо найменше значення стискаючої сили, при якій можливе існування суміжного з початковим стану рівноваги (рис. 8.1).

Диференціальні рівняння для кривої прогинів $w(x)$ при плоскому згині

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = p_z, \quad (8.1)$$

де EI_y – жорсткість стержня на згин у площині xOz ;

w – прогин;

M_y – згинаючий момент у довільному перерізі.

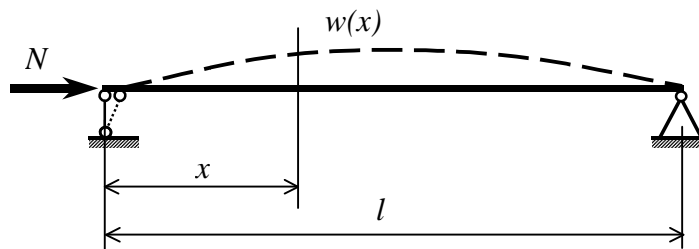


Рис. 8.1. Дія стискаючої сили на стержень

У загальному випадку

$$M_y = \iint p_z dx^2 + Cx + D + Nw, \quad (8.2)$$

де p_z – розподілене навантаження, $H/м$;

C, D – сталі інтегрування;

N – поздовжня стискаюча сила.

Підставивши (8.2) у (8.1), після дворазового диференціювання запишемо

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 w}{dx^2} = p_z. \quad (8.3)$$

Рівняння стійкості стержня постійного перерізу, стиснутого лише силами N , дістанемо з (8.3) при $EI_y = const$ і $p_z = 0$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \left(k^2 = \frac{N_k}{EI_y} \right). \quad (8.4)$$

З цього рівняння можна знайти критичну силу N_k при довільних граничних умовах. Розв'язок рівняння (8.4)

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx, \quad (8.5)$$

де $k = \sqrt{N_k/EI_y}$; C_1, C_2, C_3, C_4 – сталі, що відповідають частинним розв'язкам рівняння (8.1).

Розглянемо стержень із шарнірними опорами на кінцях (рис. 8.1). Граничні умови

$$\text{при } x=0, \quad w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

$$\text{при } x=l, \quad w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Підставляючи в ці умови розв'язок (8.3), маємо

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 0 & \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} = 0. \quad (8.6)$$

Звідси знаходимо $\sin kl = 0$, або $kl = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$.

Урахувавши позначення $k^2 = N_k/EI_y$, дістанемо значення критичної сили, при якій можливий згин стержня,

$$N_k = \frac{\pi^2 n^2 EI_y}{l^2}. \quad (8.7)$$

Форма лінії згину при цьому

$$w = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.8)$$

Значенням $n = 2, 3, 4, \dots$ відповідають інші форми кривої згину (рис. 8.2) і більші значення критичної сили.

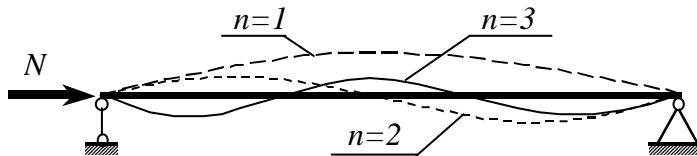


Рис. 8.2. Форми кривої згину

Розглянемо стержень, один кінець якого жорстко закріплений (рис. 8.3). Граничні умови

$$\text{при } x=0, \quad w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

$$\text{при } x=l, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \frac{EI_y d^3 w}{dx^3} = -N_k \frac{dw}{dx}. \quad (8.9)$$

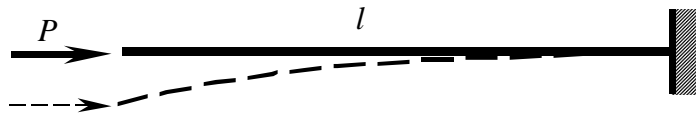


Рис. 8.3. Дія поздовжньої сили на консольний стержень

Остання умова записана відносно поперечної сили в перерізі $x=l$ ($N_k \frac{dw}{dx}$ – проекція сили N на площину поперечного перерізу).

Із записаних умов випливає $C_1 = C_4$, $C_2 = C_3 = 0$, $\cos kl = 0$. Таким чином, $kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$, критична сила $N_k = \frac{\pi^2 EI_y}{4l^2}$, а форма втрати стійкості при $C_1 = 1$ $w = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$.

Як видно з двох розглянутих прикладів, амплітуди переміщень $w(x)$ залишаються невизначеними. Невідомо також, як поводить себе стержень після втрати стійкості. Для вирішення цих питань треба поставити і розв'язати рівняння стійкості в геометрично нелінійній постановці.

Критичні напруження в стержні можна визначити як напруження від стиску, не враховуючи згин

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (8.10)$$

де λ – гнучкість стержня ($\lambda = l/i$, $i = \sqrt{I_y/A}$).

Отже, алгоритм визначення критичної сили для однопрольотного стержня такий:

- 1) формулюють граничні умови (їх повинно бути чотири);
- 2) записують визначник системи рівнянь відносно невідомих;
- 3) розкривають визначник, отримуючи трансцендентне рівняння щодо критичного параметра;
- 4) знаходять найменший ненульовий корінь рівняння;
- 5) визначають вираз для критичної сили і критичного напруження $\sigma_k = N_k/A$.

Зауважимо, що знайдений вираз для критичної сили можна використати, коли напруження в перерізі не перевищуватимуть границі пропорційності. В інших випадках потрібно розглядати задачу з урахуванням пластичних деформацій.

8.2. Енергетичний метод визначення критичних сил

Розглянемо розрахунок на стійкість, побудований на використанні принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа). Згідно з енергетичним принципом, система перебуває в стійкій рівновазі, якщо її потенціальна енергія найменша порівняно з енергією суміжних форм рівноваги. Критична сила відповідає найменшому з усіх тих значень, при яких приріст потенціальної енергії стержня у відхиленому положенні буде стаціонарним. У цьому разі справедливою є умова

$$\delta U_1 = 0, \quad (8.11)$$

де δU_1 – варіація потенціальної енергії деформації, пов'язаної з відхиленням від положення рівноваги.

Варіація потенціальної енергії стиснутого стержня при стиску зі згином

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon \sigma dV, \quad (8.12)$$

де деформація (з урахуванням стиску і згину стержня)

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad (8.13)$$

а напруження визначаються за законом Гука $\sigma = E\varepsilon$.

Після підстановки (8.13) у (8.12) і перетворень запишемо

$$\delta U = \int_V \sigma \frac{d}{dx} (\delta u) dV - \int_V \sigma z \frac{d^2}{dx^2} (\delta w) dV + \int_V \sigma \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx} (\delta w) dV.$$

Враховавши позначення

$$N = \int_S \sigma dS, \quad M = \int_S \sigma z dS, \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \delta U = \delta U_0 + \delta U_1,$$

одержимо

$$\delta U_0 = \int_0^l N \frac{d}{dx} (\delta u) dx, \quad \delta U_1 = \int_0^l EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} (\delta w) dx - \int_0^l N \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx} (\delta w) dx. \quad (8.14)$$

Таким чином, рівняння стійкості в енергетичному варіанті має вигляд

$$\int_0^l EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} (\delta w) dx - \int_0^l N \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx} (\delta w) dx = 0. \quad (8.15)$$

Для визначення критичної сили необхідно задати форму втрати стійкості. Наприклад, якщо для стержня на двох шарнірних опорах взяти форму $w = f \sin \frac{\pi x}{l}$ і підставити її в рівняння (8.15), дістанемо

$$\left(EI \frac{\pi^4}{l^4} - N_k \frac{\pi^2}{l^2} \right) \delta f = 0, \text{ звідки } N_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Якщо вибрана функція є наближеною, значення критичної сили також буде наближеним. Водночас, навіть при наближеній функції прогину розв'язок для критичної сили не набагато відрізнятиметься від точного, якщо ця функція задовольнятиме умови закріплення стержня. Саме ця властивість розв'язку енергетичним методом і забезпечила йому широке застосування на практиці.

Алгоритм визначення критичних сил енергетичним методом:

- 1) складають варіаційне рівняння (8.15);
- 2) для заданого стержня добирають вірогідну функцію $w(x)$, за якою стержень може зігнутись так, щоб задовольнялись умови закріплення на опорах. Функція $w(x)$ може мати n невідомих параметрів, і до неї ставляться ті самі вимоги, що і у методі Рітца [20];
- 3) після підстановки наближеного розв'язку у варіаційне рівняння і прирівнювання нулю коефіцієнтів при варіаціях невідомих параметрів дістають однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно цих параметрів;
- 4) записують визначник системи рівнянь і прирівнюють його нулю, що є умовою існування ненульових розв'язків системи;
- 5) знаходять корені характеристичного рівняння, утвореного після розкриття визначника. З найменшим коренем і пов'язане значення критичної сили. Очевидно, що інші корені непотрібні, їх можна не шукати.

8.3. Застосування методу скінченних елементів

Якщо умови закріплення складні, як, наприклад, для стержня з багатьма опорами, дібрати “хорошу” функцію досить важко. У такому разі доцільно скористатися кусково-неперервною функцією, забезпечивши умови закріплення і з'єднання ділянок між собою. Таким чином, приходимо до методу скінченних елементів, який саме і полягає в тому, що система розбивається на прості елементи, для яких легко вибрати правдоподібні функції, що апроксимують точний розв'язок.

Розглянемо стійкість стержня довжиною l . Розіб'ємо всю довжину на деяку кількість елементів однакової довжини і для кожного елемента (рис. 8.4) функцію прогину візьмемо у вигляді полінома^{*)}

$$w = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 + N_4 q_4 = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (8.16)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4], \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T,$$

^{*)} Зверніть увагу, що поліноми Ерміта мають дещо інший вигляд порівняно з використаними у розділі 3 у зв'язку з прийнятими у цьому розділі напрямками вузлових моментів.

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, \quad N_2 = -x + 2\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}, \quad (8.17)$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, \quad N_4 = \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}.$$



Рис. 8.4. Скінченний елемент стержня

Підставивши (8.16) у варіаційне рівняння, одержимо

$$(\mathbf{K} - N_k \mathbf{R})\mathbf{q} = 0, \quad (8.18)$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості елемента

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & -6a & -12 & -6a \\ -6a & 4a^2 & 6a & 2a^2 \\ -12 & 6a & 12 & 6a \\ -6a & 2a^2 & 6a & 4a^2 \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Матриця \mathbf{R} називається матрицею геометричної жорсткості

$$\mathbf{R} = \frac{1}{30a} \begin{bmatrix} 36 & -3a & -36 & -3a \\ -3a & 4a^2 & 4a & -a^2 \\ -36 & 4a & 36 & 3a \\ -3a & -a^2 & 3a & 4a^2 \end{bmatrix}. \quad (8.20)$$

Рівняння (8.18) для всієї системи складається з матриць елементів так, як і при звичайному згині, за допомогою матриці індексів, і має такий самий вигляд, як і для одного елемента

$$(\mathbf{K} - N_k \mathbf{R})\mathbf{q} = 0, \quad (8.21)$$

де \mathbf{K}, \mathbf{R} – відповідні матриці для системи у цілому.

Критичну силу одержують, прирівнюючи визначник системи нулю і визначаючи найменший корінь характеристичного рівняння.

Розглянемо задачу визначення критичної сили для стержня, стиснутого силою N_k . Спочатку візьмемо випадок, коли стержень складається з одного елемента (рис. 8.4).

Рівняння рівноваги

$$\left(\frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & -6a & -12 & -6a \\ -6a & 4a^2 & 6a & 2a^2 \\ -12 & 6a & 12 & 6a \\ -6a & 2a^2 & 6a & 4a^2 \end{bmatrix} - \frac{N_k}{30a} \begin{bmatrix} 36 & -3a & -36 & -3a \\ -3a & 4a^2 & 4a & -a^2 \\ -36 & 4a & 36 & 3a \\ -3a & -a^2 & 3a & 4a^2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (8.22)$$

Далі треба врахувати граничні умови. Для стержня на шарнірних опорах переміщення на кінцях дорівнюють нулю, тобто $q_1 = q_3 = 0$ (рис. 8.5).



Рис. 8.5. Граничні умови для стержня на шарнірних опорах

Закреслюючи в матрицях рівнянь (8.22) перші й треті рядки і стовпці, одержимо два рівняння з двома невідомими q_2 і q_4 . Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} \left(4 - \frac{2}{15}ka^2\right) & \left(2 + \frac{1}{30}ka^2\right) \\ \left(2 + \frac{1}{30}ka^2\right) & \left(4 - \frac{2}{15}ka^2\right) \end{vmatrix} = 0, \quad \left(k = \frac{N_k}{EI}\right). \quad (8.23)$$

Звідси критична сила $N_k = \frac{12EI}{a^2}$. Це значення відрізняється від точного, оскільки функція прогину є дуже наближеною. Точніший результат дістанемо, розбиваючи стержень на два елементи.

Рівняння (8.21) матиме вигляд

$$\left(\frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} 12 & -6a & -12 & -6a & 0 & 0 \\ -6a & 4a^2 & 6a & 2a^2 & 0 & 0 \\ -12 & 6a & 24 & 0 & -12 & -6a \\ -6a & 2a^2 & 0 & 8a^2 & 6a & 2a^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6a & 12 & 6a \\ 0 & 0 & -6a & 2a^2 & 6a & 4a^2 \end{bmatrix} - \right.$$

$$-\frac{N_k}{30a} \begin{bmatrix} 36 & -3a & -36 & -3a & 0 & 0 \\ -3a & 4a^2 & 3a & -a^2 & 0 & 0 \\ -36 & 3a & 72 & 0 & -36 & -3a \\ -3a & -a^2 & 0 & 8a^2 & 3a & -a^2 \\ 0 & 0 & -36 & 3a & 36 & 3a \\ 0 & 0 & -3a & -a^2 & 3a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = 0,$$

де $a = l/2$, (переміщення q_i вказане на рис. 8.5).

Граничні умови формулюються так: $q_1 = 0$, $q_3 = 0$, $q_5 = 0$. Останню умову обумовлено симетрією прогинів відносно середини стержня (рис. 8.6).

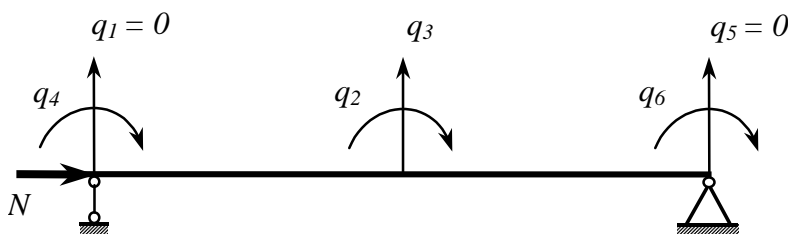


Рис. 8.6. Стержень з двох елементів

Після врахування цих умов визначник системи набуде вигляду

$$\begin{vmatrix} \left(4 - \frac{2}{15}ka^2\right) & \left(6 - \frac{1}{10}ka^2\right) & 0 \\ \left(6 - \frac{1}{10}ka^2\right) & \left(24 - \frac{12}{5}ka^2\right) & \left(-6 + \frac{1}{10}ka^2\right) \\ 0 & \left(-6 + \frac{1}{10}ka^2\right) & \left(4 - \frac{2}{15}ka^2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\left(24 - \frac{1}{10}ka^2\right)^2 - \left(8 - \frac{1}{15}ka^2\right)\left(96 - \frac{12}{5}ka^2\right) = 0.$$

Критична сила, знайдена з цього рівняння $\left(N_k = 9.94 \frac{EI}{l^2}\right)$, є майже

точною.

Розв'язування задач стійкості методом скінченних елементів є особливо ефективним в складніших випадках: для багатоопорних балок, для рам та інших стержневих систем, де класичні методи практично незастосовні.

Алгоритм розрахунків на стійкість методом скінченних елементів:

- 1) систему розбивають на скінченні елементи вибраного типу;
- 2) складають матриці жорсткості і геометричної жорсткості;
- 3) нумерують глобальні переміщення і складають матрицю індексів;

4) за допомогою матриці індексів складають відповідні матриці для системи в цілому;

5) враховують граничні умови і відповідно змінюють матриці системи. (Граничні умови можна врахувати за допомогою матриці індексів);

6) знаходять найменший корінь характеристичного рівняння і визначають критичну силу.

ПРИКЛАД 8.1. Визначити критичну силу для стержня, зображеного на рис. 8.7.

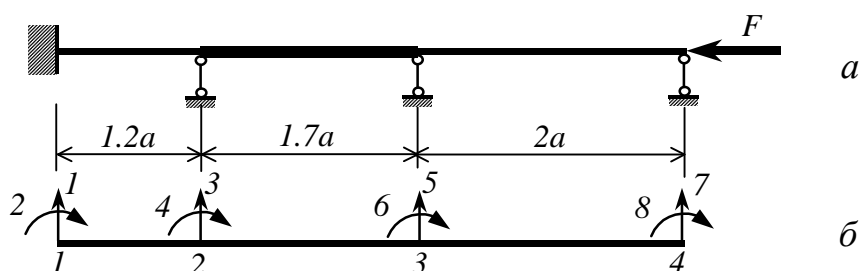


Рис. 8.7. Статично-невизначуваний стержень, навантажений поздовжньою силою (а); скінченно-елементна модель стержня (б)

$E1 := 2 \cdot 10^{11}$ Модуль пружності матеріалу, Па
 $I1 := 1 \cdot 10^{-8}$ Момент інерції площі поперечного перерізу, м⁴
 $a := 1$ Довжина ділянки
 $i := 1..3$ Кількість елементів

$E_i :=$ $I_i :=$ $l_i :=$

E1
E1
E1

I1
I1·2
I1

a·1.2
a·1.7
a·2.0

Довжини ділянок

Матриці жорсткості і геометричної жорсткості скінченного елемента

$$K1(i) := \begin{bmatrix} E_i \cdot \frac{I_i}{(l_i)^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -6 \cdot l_i & -12 & -6 \cdot l_i \\ -6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 & 6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \\ -12 & 6 \cdot l_i & 12 & 6 \cdot l_i \\ -6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$K2(i) := \left(\frac{1}{30 \cdot l_i} \right) \cdot \begin{bmatrix} 36 & -3 \cdot l_i & -36 & -3 \cdot l_i \\ -3 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 & 3 \cdot l_i & -(l_i)^2 \\ -36 & 3 \cdot l_i & 36 & 3 \cdot l_i \\ -3 \cdot l_i & -(l_i)^2 & -3 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Матриця індексів}$$

Формування матриць жорсткості і геометричної жорсткості для стержня

$$j := 1..4 \quad k := 1..4 \quad KK1_{8,8} := 0 \quad KK2_{8,8} := 0$$

$$KK2_{mi,j,mi,k} := KK2_{mi,j,mi,k} + K2(i)_{j,k}$$

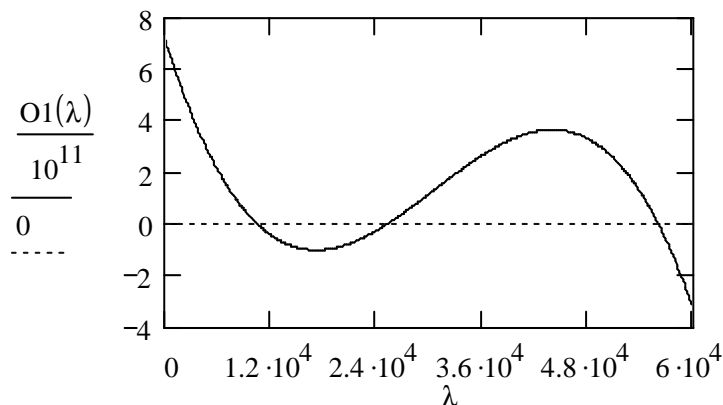
$$KK1_{mi,j,mi,k} := KK1_{mi,j,mi,k} + K1(i)_{j,k}$$

Граничні умови: $u1=0, u2=0, u3=0, u5=0, u7=0$

$$mr := 4 \ 6 \ 8^T \quad m := 1..3 \quad n := 1..3$$

$$KR_{m,n} := KK1_{mr_m, mr_n} \quad KG_{m,n} := KK2_{mr_m, mr_n}$$

$$KR = \begin{pmatrix} 1.608 \times 10^4 & 4.706 \times 10^3 & 0 \\ 4.706 \times 10^3 & 1.341 \times 10^4 & 2 \times 10^3 \\ 0 & 2 \times 10^3 & 4 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad KG = \begin{pmatrix} 0.387 & -0.057 & 0 \\ -0.057 & 0.493 & -0.067 \\ 0 & -0.067 & 0.267 \end{pmatrix}$$



Використання функції `root()`

$$\Omega := 1 \quad N := \text{root}(|KR - \Omega \cdot KG|, \Omega) \quad N = 1.042 \times 10^4$$

$$\Omega := 2 \cdot 10^4 \quad N := \text{root}(|KR - \Omega \cdot KG|, \Omega) \quad N = 2.521 \times 10^4$$

$$\Omega := 10^5 \quad N := \text{root}(|KR - \Omega \cdot KG|, \Omega) \quad N = 5.593 \times 10^4$$

Використання функцій `eigenvals()` і `eigenvecs()`

$$KS := KG^{-1} \cdot KR \quad sv := \text{eigenvecs}(KS) \quad ev := \text{eigenvals}(KS)$$

$$sv = \begin{pmatrix} 0.782 & -0.5 & 0.179 \\ 0.551 & 0.515 & -0.406 \\ 0.289 & 0.696 & 0.896 \end{pmatrix} \quad ev = \begin{pmatrix} 5.593 \times 10^4 \\ 2.521 \times 10^4 \\ 1.042 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Критичній силі відповідає найменший з коренів.

РОЗДІЛ 9

РОЗРАХУНКИ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Під динамічними розуміють навантаження, які змінюються з часом так, що надають елементам конструкції прискорення і приводять до появи сил інерції. Динамічні навантаження викликають у конструкції напруження, деформації та переміщення, що змінюються з часом. Залежно від закону зміни розрізняють такі види навантажень:

а) періодичні, які змінюються з часом за періодичним законом (рис. 9.1, *а*). Ці навантаження виникають в механізмах, що мають неврівноважені обертові маси;

б) імпульсні, які характеризуються швидким наростанням і значною тривалістю (рис. 9.1, *б*); спостерігаються при вибухах;

в) ударні, що виникають при контактній взаємодії тіл (рис. 9.1, *в*);

г) рухомі, які змінюють положення на конструкції. Виникають у мостових, кранових та інших конструкціях;

д) випадкові, при яких закон зміни з часом випадковий. Такі навантаження виникають при землетрусах (короткочасні), при дії звукового тиску реактивних двигунів (довготривалі) (рис. 9.1, *г*);

е) інерційні, які виникають в механізмах і конструкціях, що рухаються зі сталим прискоренням. У цьому разі постійні інерційні сили не відрізняються за характером дії від статичних.

Розрахунок на динамічні навантаження полягає у визначенні власних частот і форм коливань (вільні коливання), а також напружень і переміщень конструкції (вимушені коливання).

9.1. Метод скінченних елементів у теорії коливань

Щоб одержати основні залежності методу, скористаємося варіаційним рівнянням Гамільтона-Остроградського [9]

$$\int_0^t (\delta U + \delta T + \delta W) dt = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^t, \quad (9.1)$$

де $\delta U, \delta T, \delta W$ – варіації відповідно потенціальної енергії системи, її кінетичної енергії та роботи зовнішніх сил; $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ – вектор узагальнених переміщень і швидкостей; t – час.

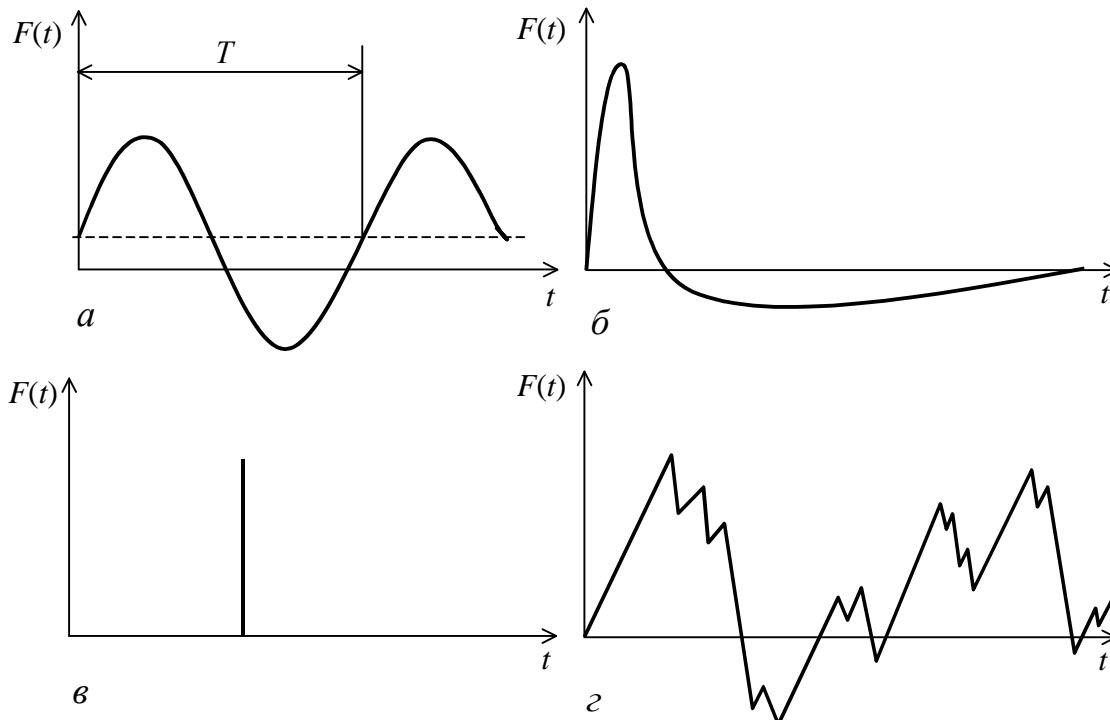


Рис. 9.1. Види навантажень: періодичні (а); імпульсні (б); ударні (в); випадкові (г)

Розглянемо скінченний елемент стержня при плоскому згині (рис. 9.2). Переміщення точок стержня

$$w = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (9.2)$$

де \mathbf{N} – матриця інтерполяційних функцій, \mathbf{q} – вузлові переміщення (узагальнені координати).

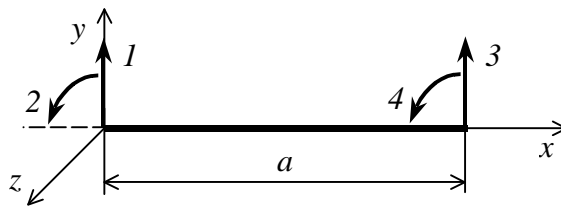


Рис. 9.2. Елемент стержня при плоскому згині

Матриця інтерполяційних функцій

$$\mathbf{N} = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4),$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, & N_2 &= x - 2\frac{x^2}{a} + 2\frac{x^3}{a^3}, \\ N_3 &= 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, & N_4 &= -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^3}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Вузлові переміщення в цьому разі будуть прогинами і кутами повороту на кінцях стержня (рис. 9.2).

Деформації та напруження в перерізах стержня

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{q},\end{aligned}\quad (9.4)$$

де

$$\mathbf{A} = -z \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathbf{C} = E, \quad \mathbf{B} = -z \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}$$

(E – модуль пружності матеріалу).

З урахуванням (9.2), (9.4) варіації потенціальної та кінетичної енергії набувають вигляду

$$\begin{aligned}\delta U &= -\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = -\int_V \delta (\mathbf{B} \mathbf{q})^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{q} dV = \\ &= -\delta \mathbf{q}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{q} = -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},\end{aligned}\quad (9.5)$$

$$\begin{aligned}\delta T &= \int_V \delta \dot{\mathbf{w}}^T \rho \dot{\mathbf{w}} dV = \int_V \delta (\mathbf{N} \dot{\mathbf{q}})^T \rho \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} dV = \\ &= \delta \dot{\mathbf{q}}^T \left(\int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{q}} = \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}.\end{aligned}\quad (9.6)$$

У (9.5), (9.6) матриці \mathbf{K} і \mathbf{M} називаються відповідно матрицями жорсткості і мас (ρ – густина матеріалу).

Підставивши варіації енергії δU і δT у (9.1), запишемо

$$\int_0^t (-\delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \delta W) dt = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^t, \quad (9.7)$$

а далі проінтегруємо частинами другий інтеграл в (9.7)

$$\int_0^t \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} dt = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^t - \int_0^t \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} dt.$$

З урахуванням цього інтеграла, одержимо варіаційне рівняння

$$\delta \mathbf{q}^T \int_0^t \left(\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \frac{\delta W}{\delta \mathbf{q}^T} \right) dt = 0. \quad (9.8)$$

Звідси, враховуючи незалежність варіацій $\delta \mathbf{q}^T$, запишемо рівняння руху елемента

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \frac{\delta W}{\delta \mathbf{q}^T} = 0, \quad (9.9)$$

або

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \quad (9.10)$$

де $\mathbf{Q}(t)$ – вектор зовнішніх сил.

Рівняння (9.10) і вирази для матриць жорсткості та мас (9.5), (9.6) є універсальними, прийнятними для довільних скінченних елементів

Для системи, складеної з багатьох скінченних елементів, рівняння (9.10) записується за методикою, яка розглядалась вище для задач стійкості. Матриці жорсткості, мас і зовнішніх навантажень складаються для системи в цілому з урахуванням топології системи.

Матриці жорсткості і мас для елемента, зображеного на рис. 9.2, мають вигляд

$$\mathbf{K1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \text{сим.} & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (9.11)$$

$$\mathbf{M1} = m \begin{bmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{9}{70}l & -\frac{13}{420}l^2 \\ & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 \\ & & \frac{13}{35}l & -\frac{11}{210}l^2 \\ \text{сим.} & & & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

де $m = \rho A$, A – площа поперечного перерізу елемента.

Розглянемо матриці жорсткості і мас для складніших елементів. Для елемента, що працює на згин з розтягом-стиском (рис. 3.9, розд.3), маємо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M2} = m \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}.$$

Для елемента, що працює на згин із крученням,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{GI_k}{l} & -\frac{GI_k}{l} \\ -\frac{GI_k}{l} & \frac{GI_k}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}\mathbf{z} = I_m \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}$$

(G – модуль зсуву, I_k – момент інерції площі поперечного перерізу при крученні, I – осьовий момент інерції, I_m – момент інерції маси елемента відносно поздовжньої осі).

9.2. Вільні коливання

Основним питанням аналізу вільних коливань є визначення власних частот і форм коливань системи. Розглянемо постановку задачі у цьому випадку.

Рівняння вільних коливань одержимо з (9.10) при $\mathbf{Q}(t) = 0$.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (9.13)$$

Розв'язок рівняння (9.13), який відповідає гармонічним коливанням з частотою ω і початковою фазою ψ

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \sin(\omega t + \psi), \quad (9.14)$$

де \mathbf{w}_0 – вектор ординат – переміщень мас системи, відповідний частоті ω .

Після підстановки (9.14) у (9.13) одержимо рівняння

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \quad (9.15)$$

яке еквівалентне системі n лінійних алгебраїчних рівнянь щодо компонент вектора \mathbf{w}_0 . Умова існування ненульових розв'язків приводить до характеристичного рівняння

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] = 0. \quad (9.16)$$

Корені рівняння (9.16) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ називаються власними частотами (спектром частот) системи. Можна показати, що для існування n дійсних коренів достатньо, щоб матриці \mathbf{M} і \mathbf{K} були симетричні, а \mathbf{M} – додатньо визначеною [36].

Визначивши корені рівняння (9.16), знайдемо відповідні вектори \mathbf{w} . Остаточний розв'язок задачі дає n власних значень і n відповідних векторів. Останні можна подати у вигляді матриці, кожний стовпець якої є власним вектором:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

Матрицю \mathbf{W} називають модальною матрицею задачі власних значень рівняння (9.15). Такі значення можна подати у вигляді діагональної матриці $\mathbf{\Omega}^2$, яку називають спектральною матрицею задачі власних значень рівняння (9.15)

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Можна показати, що власні вектори, які відповідають різним власним значенням, задовольняють умови ортогональності при $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i = 0, \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i = 0. \quad (9.19)$$

Ортогональність власних векторів відносно \mathbf{K} і \mathbf{M} означає, що матриці $\mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W}$ і $\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W}$ є діагональними.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} &= \text{diag}(\mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i), \\ \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} &= \text{diag}(\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Кожне власне значення можна знайти як частку

$$\omega_i^2 = \mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i / \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i.$$

Умовами ортогональності (9.19) можна скористатися для спрощення рівнянь (9.13). Увівши в (9.13) заміну

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} \mathbf{q}, \quad (9.21)$$

де \mathbf{q} – новий вектор переміщень, \mathbf{W} – модальна матриця, дістанемо

$$\mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = 0.$$

Помножимо рівняння зліва на матрицю \mathbf{W}^T

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = 0.$$

Врахувавши (9.20), запишемо

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \mathbf{q} = 0. \quad (9.22)$$

У рівнянні (9.31) матриці \mathbf{M}_d і \mathbf{K}_d є діагональними

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W}, \quad \mathbf{K}_d = \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W},$$

тобто окремі рівняння в (9.22) для кожної компоненти вектора не пов'язані між собою. Розв'язок для таких рівнянь значно простіший.

Заміна (9.21) звичайно називається розкладенням за власними формами коливань. Вона широко використовується при аналізі вимушених коливань.

Розв'язок рівнянь (9.13) для вільних коливань при заданих початкових умовах

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(0), \quad \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(0) \quad (9.23)$$

де $\mathbf{w}(0), \dot{\mathbf{w}}(0)$ – стовпці заданих початкових переміщень і швидкостей, подається у вигляді розкладення за власними формами коливань

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \quad (9.24)$$

(\mathbf{w}_i – власні вектори, ω_i – власні частоти, a_i, b_i – сталі інтегрування).

Підставляючи розв'язок у граничні умови, дістаємо систему $2n$ рівнянь для визначення невідомих

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i a_i = \mathbf{w}(0), \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \omega_i a_i = \dot{\mathbf{w}}(0). \quad (9.25)$$

Помноживши ліву і праву частини цих рівнянь на добуток $\mathbf{w}_i^T \mathbf{M}$ і врахувавши умови ортогональності (9.27), запишемо

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i a_i &= \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}(0), \\ \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i \omega_i b_i &= \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}}(0), \end{aligned} \quad (9.26)$$

звідки

$$a_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}(0)}{\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}_i}, \quad b_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{w}}(0)}{\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}_i \omega_i}. \quad (9.27)$$

Таким чином, розв'язок рівняння (9.21) при вільних коливаннях із заданими початковими переміщеннями і швидкостями за всіма координатами (9.23) матиме вигляд

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{M}}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i} \left(\mathbf{w}(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{\mathbf{w}}(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t \right). \quad (9.28)$$

9.3. Вимушені коливання без демпфірування

Рівняння вимушених коливань системи з n ступенями вільності при гармонічному навантаженні має вигляд

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{R} \cos \omega t. \quad (9.29)$$

Розв'язок рівняння можна знайти у вигляді $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \cos \omega t$. Після підстановки в рівняння і скорочення множника $\cos \omega t$ запишемо систему алгебраїчних рівнянь

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}_0 = \mathbf{R}. \quad (9.30)$$

Якщо $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \neq 0$, то розв'язок рівняння подається у вигляді

$$\mathbf{w}_0 = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{R}. \quad (9.31)$$

Якщо частота зовнішнього навантаження ω збігається з однією з власних частот, то визначник системи дорівнює нулю. Тоді виникає резонанс на відповідній власній частоті. Таким чином, у загальному випадку система з n ступенями вільності має n резонансів [42].

Коли зовнішнє навантаження є довільною функцією часу $f(t)$, можна скористатися методом розкладення за власними формами вільних коливань системи [3]

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} \mathbf{q}. \quad (9.32)$$

Підставивши (9.32) у рівняння (9.10), одержимо

$$\mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t). \quad (9.33)$$

Помножимо (9.33) зліва на \mathbf{W}^T

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{W}^T \mathbf{Q}(t).$$

Це рівняння можна записати в такій формі

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (9.34)$$

Матриці \mathbf{M}_d і \mathbf{K}_d є діагональними

$$\mathbf{M}_d = \text{diag} \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i \right],$$

$$\mathbf{K}_d = \text{diag} \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i \right],$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}^T \mathbf{Q}.$$

Оскільки рівняння системи (9.26) не пов'язані між собою, розв'язок кожного з них можна знайти незалежно від інших в такому самому вигляді, як і для системи з одним ступенем вільності.

Докладніше питання вимушених коливань розглядається в [10].

Розглянемо приклади використання методу скінченних елементів для аналізу вільних коливань стержнів і стержневих систем.

ПРИКЛАД 9.1. Визначити власні форми і частоти коливань стержня з ідеально-пружного матеріалу (рис. 9.3).

Вхідні дані:

$E_1 := 2 \cdot 10^{11}$ - модуль пружності матеріалу

$I_1 := 1 \cdot 10^{-5}$ - момент інерції площі поперечного перерізу

$M := 20$ - маса $A := 10^{-2}$ - площа поперечного перерізу

$\rho := 7.8 \cdot 10^3$ - густина матеріалу

$m := \rho \cdot A$ - маса одиниці довжини стержня

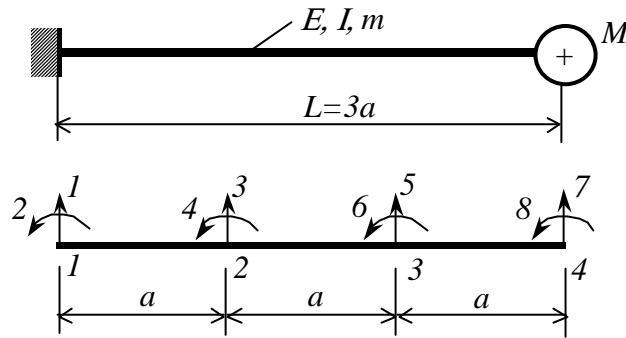


Рис. 9.3. Консольний стержень із масою і його скінченно-елементна модель

$$a := 1 \quad i := 1..3$$

$$E_i := \quad I_i := \quad l_i :=$$

E1
E1
E1

I1·2
I1·1.5
I1

a
a
a

Параметри кожного скінченного елемента

$$K1(i) := \begin{bmatrix} E_i \cdot \frac{I_i}{(l_i)^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l_i & -12 & 6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \\ -12 & -6 \cdot l_i & 12 & -6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{Матриця жорсткості елемента}$$

$$K2(i) := \left(m \cdot \frac{l_i}{210} \right) \cdot \begin{bmatrix} 78 & 11 \cdot l_i & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ 27 & 6.5 \cdot l_i & 78 & -11 \cdot l_i \\ -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{Матриця мас}$$

$$m_i := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Матриця індексів}$$

Формування матриць жорсткості і мас стержня

$$j := 1..4 \quad k := 1..4 \quad KK1_{8,8} := 0 \quad KK2_{8,8} := 0$$

$$KK1_{m_i,j, m_i,k} := KK1_{m_i,j, m_i,k} + K1(i)_{j,k} \quad Km_{8,8} := M$$

$$KK2 := KK2 + Km$$

$$KK2_{m_i,j, m_i,k} := KK2_{m_i,j, m_i,k} + K2(i)_{j,k}$$

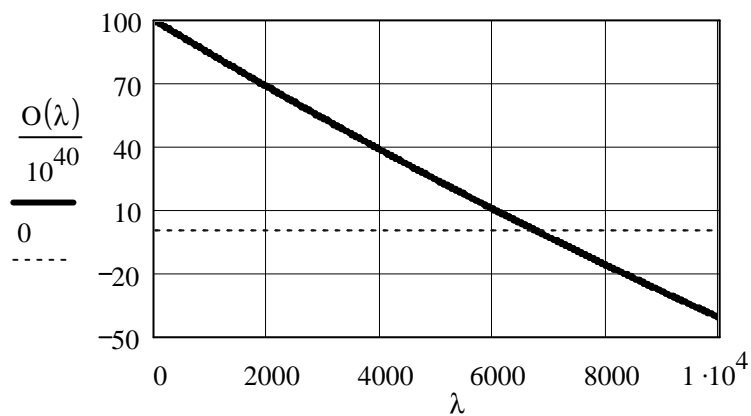
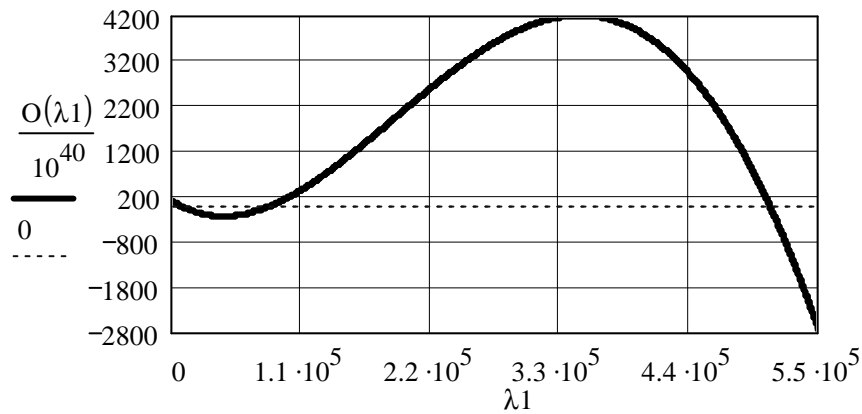
Умови закріплення: $u1=0, u2=0$

$$KR := \text{submatrix}(KK1, 3, 8, 3, 8) \quad KM := \text{submatrix}(KK2, 3, 8, 3, 8)$$

Графічне визначення власних частот

$$O(\lambda) := |KR - \lambda \cdot KM|$$

$$\lambda_1 := 0, 10^2 .. (0.55 \cdot 10^6) \quad \lambda := 0, 10 .. 10^4$$



$$ww := \text{eigenvals}(KM^{-1} \cdot KR)$$

$$ww = \begin{pmatrix} 4.445 \times 10^7 \\ 1.22 \times 10^7 \\ 2.69 \times 10^6 \\ 5.083 \times 10^5 \\ 8.395 \times 10^4 \\ 6.735 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad w := \sqrt{\vec{ww}} \quad w = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^3 \\ 3.493 \times 10^3 \\ 1.64 \times 10^3 \\ 712.942 \\ 289.749 \\ 82.065 \end{pmatrix}$$

Використання функцій `eigenvecs` і `eigenvals`

$$vv := \text{eigenvecs}(KM^{-1} \cdot KR)$$

$$vv = \begin{pmatrix} 0.041 & 0.048 & -0.478 & -0.362 & -0.162 & 0.108 \\ 0.687 & -0.656 & 0.403 & -0.315 & -0.227 & 0.198 \\ -0.033 & 0.057 & 0.53 & -0.098 & -0.258 & 0.381 \\ 0.722 & 0.741 & 0.058 & 0.718 & 0.109 & 0.327 \\ -0.055 & -0.116 & -0.525 & 0.283 & 0.244 & 0.742 \\ 8.24 \times 10^{-3} & 0.024 & 0.223 & -0.405 & 0.886 & 0.381 \end{pmatrix}$$

Перші дві форми коливань, відповідні частотам $\omega_1 = 82.245 \frac{1}{c}$ і $\omega_2 = 289.749 \frac{1}{c}$, зображено на рис. 9.4.

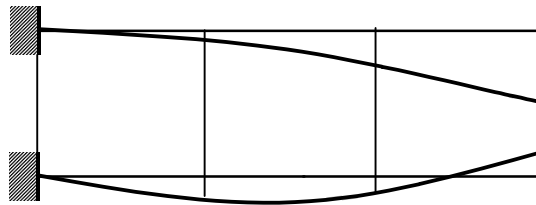


Рис. 9.4. Перші дві форми коливань

ПРИКЛАД 9.2. Визначити форми і частоти стержня з демпфіруванням. Розсіяння енергії враховується введенням комплексного модуля у другому скінченному елементі (рис. 9.5).

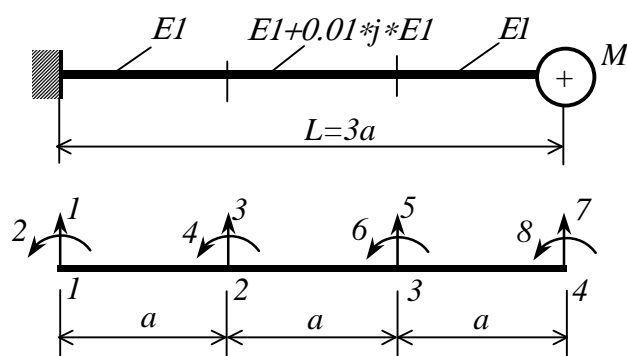


Рис. 9.5. Стержень із демпфіруючим елементом і його скінченно-елементна модель

Вхідні дані:

$E1 := 2 \cdot 10^{11}$ - модуль пружності
 $I1 := 1 \cdot 10^{-5}$ - момент інерції поперечного перерізу
 $A := 10^{-2}$ - площа поперечного перерізу
 $M := 20$ - маса $a := 1$ - довжина елемента
 $\rho := 7.8 \cdot 10^3$ - густина матеріалу
 $m := \rho \cdot A$ - погонна маса
 $i := 1..3$ $j := \sqrt{-1}$
 $E_i :=$ $I_i :=$ $l_i :=$

E1
$E1 + j \cdot 0.01 \cdot E1$
E1

$I1 \cdot 2$
$I1 \cdot 1.5$
I1

a
a
a

- параметри скінченних елементів

$$K1(i) := \begin{bmatrix} E_i \cdot \frac{I_i}{(l_i)^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l_i & -12 & 6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \\ -12 & -6 \cdot l_i & 12 & -6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{- матриця жорсткості}$$

$$K2(i) := \begin{pmatrix} m \cdot \frac{l_i}{210} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 78 & 11 \cdot l_i & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ 27 & 6.5 \cdot l_i & 78 & -11 \cdot l_i \\ -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{- матриця мас}$$

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{- матриця індексів}$$

Формування матриць жорсткості і мас стержня

$$\begin{aligned}
j &:= 1..4 & k &:= 1..4 & KK1_{8,8} &:= 0 & KK2_{8,8} &:= 0 \\
KK1_{mi_j, j, mi_i, k} &:= KK1_{mi_i, j, mi_i, k} + K1(i)_{j, k} & & & & & Km_{8,8} &:= M \\
KK2_{mi_j, j, mi_i, k} &:= KK2_{mi_i, j, mi_i, k} + K2(i)_{j, k} & & & & & KK2 &:= KK2 + Km
\end{aligned}$$

Врахування граничних умов $u1=0, u2=0$

$$KR := \text{submatrix}(KK1, 3, 8, 3, 8) \quad KM := \text{submatrix}(KK2, 3, 8, 3, 8)$$

Власні форми і частоти скінченно-елементної моделі стержня

$$vv := \text{eigenvecs}(KM^{-1} \cdot KR) \quad ww := \text{eigenvals}(KM^{-1} \cdot KR)$$

$$ww = \begin{pmatrix} 4.445 \times 10^7 + 2.967i \times 10^5 \\ 1.22 \times 10^7 + 3.148i \times 10^4 \\ 2.69 \times 10^6 + 7.5i \times 10^3 \\ 5.083 \times 10^5 + 1.79i \times 10^3 \\ 8.396 \times 10^4 + 169.641i \\ 6.735 \times 10^3 + 16.266i \end{pmatrix} \quad w := \sqrt{\frac{\overrightarrow{ww}}{ww}} \quad w = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^3 + 22.248i \\ 3.493 \times 10^3 + 4.506i \\ 1.64 \times 10^3 + 2.287i \\ 712.946 + 1.255i \\ 289.751 + 0.293i \\ 82.066 + 0.099i \end{pmatrix}$$

$$vv^{(4)} = \begin{pmatrix} -0.362 - 6.064i \times 10^{-4} \\ -0.314 + 1.013i \times 10^{-3} \\ -0.098 - 4.621i \times 10^{-4} \\ 0.718 \\ 0.283 + 1.035i \times 10^{-3} \\ -0.405 + 4.071i \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad vv^{(5)} = \begin{pmatrix} -0.162 + 4.847i \times 10^{-4} \\ -0.227 + 9.17i \times 10^{-4} \\ -0.258 + 5.619i \times 10^{-4} \\ 0.109 - 1.504i \times 10^{-3} \\ 0.244 - 1.951i \times 10^{-4} \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

$$vv^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.108 + 3.095i \times 10^{-4} \\ 0.198 + 5.617i \times 10^{-4} \\ 0.381 + 3.201i \times 10^{-4} \\ 0.327 - 3.952i \times 10^{-4} \\ 0.742 \\ 0.381 - 2.803i \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$d := 2 \cdot \pi \cdot \frac{\overrightarrow{\operatorname{Im}(w)}}{\operatorname{Re}(w)} \quad d = \begin{pmatrix} 0.021 \\ 8.104 \times 10^{-3} \\ 8.761 \times 10^{-3} \\ 0.011 \\ 6.348 \times 10^{-3} \\ 7.588 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{- декремент коливань стержня на кожній формі}$$

ПРИКЛАД 9.3. Визначити власні частоти і форми коливань плоскої рами (рис. 9.6).

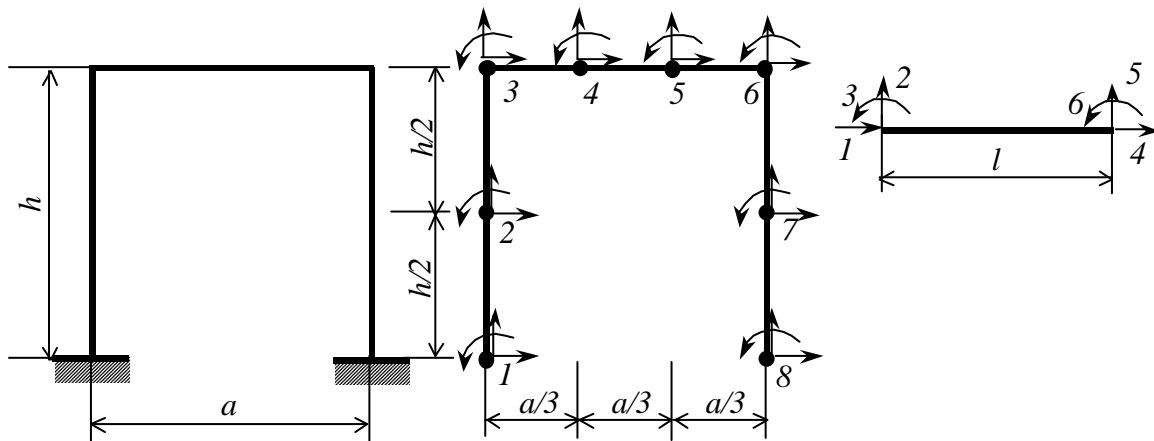


Рис. 9.6. Рама, скінченно-елементна модель рами, скінченний елемент

Вхідні дані:

$a := 3$ $h := 2$

Модуль пружності (Па): $E := 2 \cdot 10^{11}$

Площа поперечного перерізу стержнів (м**2): $A := 1 \cdot 10^{-2}$

Момент інерції площі A (м**4): $I := 1 \cdot 10^{-4}$

Розбиваємо раму на сім скінченних елементів

Матриця координат вузлів:

$$N_c := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 2 \cdot \frac{a}{3} & a & a & a \\ 0 & \frac{h}{2} & h & h & h & h & \frac{h}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Матриця, яка показує послідовність з'єднання елементів (топологічна матриця):

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$ke := \text{rows}(\text{Top})$ - кількість елементів $ke = 7$

$kn := \text{cols}(\text{Top})$ - кількість вузлів у кожному елементі

$kn = 2$

Обчислюємо координати вузлів кожного елемента
у глобальній системі координат

$$i := 1..ke \quad jj := 1..kn$$

$$X_{njj,i} := Nc_{1,(Top_i,jj)} \quad Y_{njj,i} := Nc_{2,(Top_i,jj)}$$

Довжини елементів

$$l_i := \sqrt{(X_{n2,i} - X_{n1,i})^2 + (Y_{n2,i} - Y_{n1,i})^2}$$

Елементи матриці направляючих косинусів

$$s(i) := \frac{Y_{n2,i} - Y_{n1,i}}{l_i} \quad c(i) := \frac{X_{n2,i} - X_{n1,i}}{l_i}$$

Матриця направляючих косинусів

$$T(i) := \begin{pmatrix} c(i) & s(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(i) & c(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(i) & s(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(i) & c(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів

$$m_{i,(3 \cdot jj - 2)} := 3 \cdot Top_{i,jj} - 2$$

$$m_{i,(3 \cdot jj - 1)} := 3 \cdot Top_{i,jj} - 1$$

$$m_{i,3 \cdot jj} := 3 \cdot Top_{i,jj}$$

Матриця індексів:

$$m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента

$$Ke(i) := \frac{E}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix}$$

Матриця мас елемента

$$m := A \cdot 7.85 \cdot 10^3$$

$$Me(i) := \begin{bmatrix} \frac{210}{3} & 0 & 0 & \frac{210}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 11 \cdot l_i & 0 & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 0 & 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 0 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ \frac{210}{6} & 0 & 0 & \frac{210}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 6.5 \cdot l_i & 0 & 78 & -11 \cdot l_i \\ 0 & -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & 0 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \cdot \left(m \cdot \frac{l_i}{210} \right)$$

Обчислення компонент матриць жорсткості і мас елемента у глобальній системі координат

$$Ke\alpha(i) := T(i)^T \cdot Ke(i) \cdot T(i)$$

$$Me\alpha(i) := T(i)^T \cdot Me(i) \cdot T(i)$$

Побудова матриць жорсткості і мас для рами:

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0 \quad M_{\max(mi), \max(mi)} := 0 \quad k := 1..6 \quad ik := 1..6$$

$$K_{mi, ik, mi, k} := K_{mi, ik, mi, k} + Ke\alpha(i)_{ik, k} \quad M_{mi, ik, mi, k} := M_{mi, ik, mi, k} + Me\alpha(i)_{ik, k}$$

Будуємо редуційовані матриці жорсткості і мас рами, виключаючи рядки і стовпці з номерами переміщень, що не допускаються накладеними на раму в'язями.

$$m := 1..(\max(mi) - 6) \quad n := 1..(\max(mi) - 6)$$

$$mr := (4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21)$$

$$KR_{m, n} := K_{mr1, m, mr1, n} \quad MR_{m, n} := M_{mr1, m, mr1, n} \quad j := \sqrt{-1}$$

$$ww := \text{eigenvals}(MR^{-1} \cdot KR) \quad vv := \text{eigenvecs}(MR^{-1} \cdot KR)$$

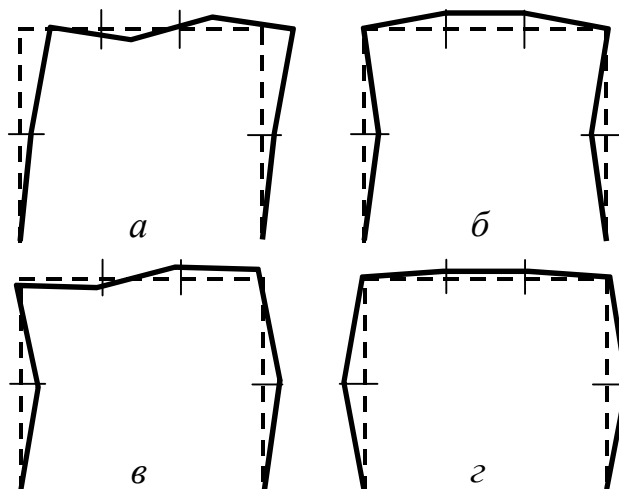


Рис. 9.7. Власні форми, відповідні частотам коливань: $\omega_{13}^2 = 1.124 \cdot 10^5$ (а); $\omega_{14}^2 = 6.949 \cdot 10^5$ (б); $\omega_{15}^2 = 7.88 \cdot 10^6$ (в); $\omega_{16}^2 = 5.165 \cdot 10^6$ (г)

РОЗДІЛ 10

МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ У НЕІДЕАЛЬНО-ПРУЖНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

10.1. Метод аналізу нестационарних коливань у конструкціях із частотно-залежним розсіянням енергії

При аналізі одночастотних коливань залежність модулів пружності і демпфіруючої властивості матеріалів від частоти не складає істотних труднощів, оскільки частота входить у рівняння як параметр. При багаточастотних коливаннях, імпульсних і ударних навантаженнях задача значно ускладнюється, у зв'язку з чим, звичайно, вважають, що розсіяння енергії в матеріалі не залежить від частоти. Для полімерних матеріалів, якими у більшості випадків являються демпфіруючі композиції, таке припущення може виявитися надто грубим.

Визначальні рівняння полімерних матеріалів можна записати у вигляді рівнянь Больцмана-Вольтерра, де функції повзучості і релаксації визначаються з відповідних випробувань. При цьому параметри функцій, одержані за результатами статичних випробувань, виявляються, як правило, неприйнятними для опису динамічної поведінки цих матеріалів. При динамічних же випробуваннях легше визначити дійсну й уявну частини комплексного модуля, які є відповідно косинус- і синус-перетвореннями Фур'є функцій релаксації матеріалу. Очевидно, що зовсім нераціонально визначати функції релаксації за одержаною залежністю комплексного модуля від частоти за допомогою оберненого перетворення Фур'є, щоб потім використовувати їх у динамічному розрахунку у вигляді прямого перетворення Фур'є. Більш природним було б безпосереднє використання комплексних модулів. Разом із тим введення комплексного модуля у диференціальні рівняння руху є некоректним прийомом, який, проте, приводить до правильних результатів при моногармонічних коливаннях, що, власне, і стало причиною широкого використання квазірівнянь із комплексними членами. Коректне введення комплексних модулів для будь-яких динамічних процесів можливе тільки після переходу до простору перетворень Фур'є [11].

Розглянемо диференціальне рівняння коливань системи з одним ступенем вільності, з демпфіруючим елементом спадкового типу

$$m\ddot{x} + C^* x = p(t), \quad (10.1)$$

де C^* – оператор Больцмана

$$C^* = C_0 + \int_{-\infty}^t R(t-t') \frac{d(\quad)}{dt'} dt'. \quad (10.2)$$

Виконаємо перетворення Фур'є, для чого помножимо обидві частини на $e^{-i\omega t}$ і проінтегруємо від $-\infty$ до ∞ . З урахуванням властивостей перетворення Фур'є одержимо при нульових початкових умовах алгебраїчне рівняння з комплексними коефіцієнтами відносно зображень переміщення

$$m(i\omega)^2 \tilde{X} + (C'(\omega) + iC''(\omega)) \tilde{X} = \tilde{P}(i\omega), \quad (10.3)$$

$$\text{де } \tilde{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \tilde{P}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$C' = C_0 + \omega \int_{-\infty}^{\infty} R(\eta) \sin \omega \eta d\eta,$$

$$C'' = \omega \int_{-\infty}^{\infty} R(\eta) \cos \omega \eta d\eta. \quad (10.4)$$

Розв'язком рівняння (10.3) є вираз

$$\tilde{X} = \tilde{P}(i\omega) (C'(\omega) + iC''(\omega) - m\omega^2)^{-1}. \quad (10.5)$$

Застосовуючи до (10.5) обернене перетворення Фур'є, одержимо розв'язок у часовому просторі

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (10.6)$$

В загальному випадку одержання як прямого, так і оберненого перетворення Фур'є можливе тільки чисельними методами. Дискретні аналоги прямого і оберненого перетворення Фур'є для деякої комплексної функції $x(j)$ ($j=0, 1, \dots, N-1$) записуються у вигляді [27]

$$X(k) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} jk\right), \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (10.7)$$

$$x(k) = \Delta f \sum_{j=0}^{N-1} X(j) \exp\left(i \frac{2\pi}{N} jk\right), \quad (10.8)$$

де $X(j) = X(j\Delta t)$; T – часовий інтервал, у якому розглядається процес ($T = N\Delta t$); N – кількість точок у часовому інтервалі; $\Delta f = 1/T$ – крок по частоті.

Вирази дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) справедливі, якщо $x(t)$ є періодичною функцією. Якщо функція $x(t)$ не періодична, то ДПФ поводиться з нею як з періодичною, що має період $T = N\Delta t$. Для зменшення помилок, пов'язаних із неперіодичністю функції $x(t)$, інтервал T повинен збільшуватись за рахунок додаткового інтервалу нульового навантаження. Основними параметрами, які використовуються при дискретному перетворенні Фур'є, є: N – кількість точок, в яких задані значення функції $x(t)$ на інтервалі часу реалізації T ($N = T/\Delta t$); $f_{\max} = \Delta f N/2$ – частотний діапазон (максимальна частота, яка враховується при дискретному перетворенні); $\Delta f = 1/T$ – крок по частоті (мінімальна частота, яка враховується при дискретному перетворенні); $T = 1/\Delta f = N\Delta t$ – тривалість реалізації.

Як правило, при застосуванні дискретного перетворення Фур'є задають N та ще який-небудь із параметрів, наприклад, тривалість процесу T .

Основна похибка ДПФ пов'язана з обмеженістю спектра врахованих частот і для сигналів з широкою смугою дії може виявитися значною. Для зменшення цієї похибки f_{\max} повинна бути досить великою. Найбільш ефективним алгоритмом ДПФ є алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [27].

Методика визначення реакцій системи на дію імпульсного навантаження довільної форми є такою:

– за допомогою підпрограми ЩПФ визначається пряме перетворення Фур'є силового навантаження $\mathbf{F}\{p(t)\} = P(\omega)$;

– визначається частотна передаточна функція системи

$$H(\omega) = \left(-m\omega^2 + C'(\omega) + iC''(\omega)\right)^{-1}; \quad (10.9)$$

– за допомогою підпрограми ШПФ визначається обернене перетворення Фур'є добутку $P(\omega)$ і частотної передаточної функції $H(\omega)$

$$x(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H(\omega)P(\omega)\}. \quad (10.10)$$

Для одержання частотної передаточної функції необхідно підставити у праву частину диференціального рівняння руху системи дельта-функцію, виконати для обох частин перетворення Фур'є; в результаті зліва одержимо перетворення Фур'є однорідного диференціального рівняння, а справа – одиницю. Розв'язок одержаного алгебраїчного рівняння відносно перетворення змінної $X(\omega)$ дасть частотну передаточну функцію.

Перевагою методу є можливість урахування зовнішнього імпульсного навантаження довільного спектрального складу і врахування реальної залежності комплексного модуля від частоти. При цьому можуть безпосередньо використовуватись експериментальні дані визначення комплексного модуля в діапазоні частот, що розглядається.

Наведена вище методика легко узагальнюється на більш складні системи [5]. Рівняння руху системи з n ступенями вільності можуть бути подані у вигляді

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}^* \mathbf{x} = \mathbf{P}(t), \quad (10.11)$$

де \mathbf{x} – вектор-стовпець координат системи; \mathbf{P} – вектор зовнішніх навантажень; \mathbf{M} – матриця мас; \mathbf{K}^* – матриця спадкових операторів. Виконавши перетворення Фур'є рівнянь (10.12), одержимо^{*)}

$$\left(\mathbf{K}'(\omega) + i\mathbf{K}''(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{P}(\omega), \quad (10.12)$$

де $\mathbf{K}'(\omega)$ – матриця жорсткості; $\mathbf{K}''(\omega)$ – матриця демпфірування; $\mathbf{P}(\omega)$ – зображення Фур'є правої частини рівнянь (10.12). Розв'язуючи систему рівнянь (10.12) відносно вектора зображень координат $\mathbf{X}(\omega)$ для ряду значень частоти у частотному діапазоні, який нас цікавить, отримаємо послідовність комплексних векторів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$.

Обернене перетворення Фур'є кожного рядка матриці

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nN} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

приводить до матриці

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nN} \end{bmatrix}, \quad (10.14)$$

кожний рядок якої визначає зміну відповідної узагальненої координати у заданому проміжку часу. При необхідності можна обмежитись одержанням реакцій системи тільки по одній з координат.

Амплітудно-частотну характеристику на k -му виході одержимо як розв'язок системи рівнянь (10.11) з вектором $\mathbf{P}(\omega)$, який складається з нулів, окрім k -ї компоненти, де стоїть одиниця.

Необхідно зазначити, що трудомісткість розв'язку визначається, в основному, необхідністю багаторазового розв'язку системи рівнянь (10.11) для одержання матриці (10.13).

Застосування методу для розрахунку нестационарних коливань розглянуто у монографії [5].

^{*)} При нульових початкових умовах.

10.2. Використання скінченно-елементних моделей для аналізу нестационарних коливань стержнів і стержневих систем

Використаємо метод інтегральних перетворень для розрахунку нестационарних коливань однорідного стержня. Скінченно-елементну модель однорідного стержня зображено на рис. 10.1. Матриці жорсткості і мас скінченного елемента стержня прийняті такими [5]:

$$\mathbf{K} = \frac{2EJ}{a} \begin{bmatrix} 6/a^2 & 3/a & -6/a^2 & 3/a \\ 3/a & 2 & -3/a & 1 \\ -6/a^2 & -3/a & 6/a^2 & -3/a \\ 3/a & 1 & -3/a & 2 \end{bmatrix}, \quad (10.15)$$

$$\mathbf{M} = \frac{ma}{35} \begin{bmatrix} 13 & 11a/6 & 9/2 & -13a/12 \\ 11a/6 & a^2/3 & 13a/12 & -a^2/4 \\ 9/2 & 13a/12 & 13 & -11a/6 \\ -13a/12 & -a^2/4 & -11a/6 & a^2/3 \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

Матриці скінченно-елементної моделі стержня матимуть розмір 20×20 .

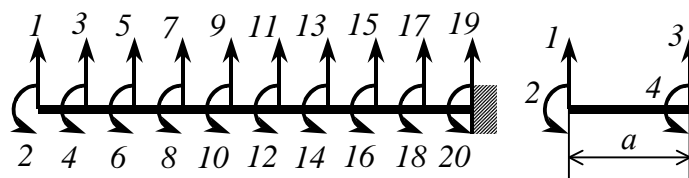


Рис. 10.1. Скінченно-елементна модель однорідного стержня

На рис. 10.2-10.5 зображено лінійні переміщення перерізів 1 і 19 при дії дельта-імпульсу в напрямку координати 1, а також при дії двох дельта-імпульсів, зміщених у часі на 5 с і прикладених у напрямку координат 1 та 11.

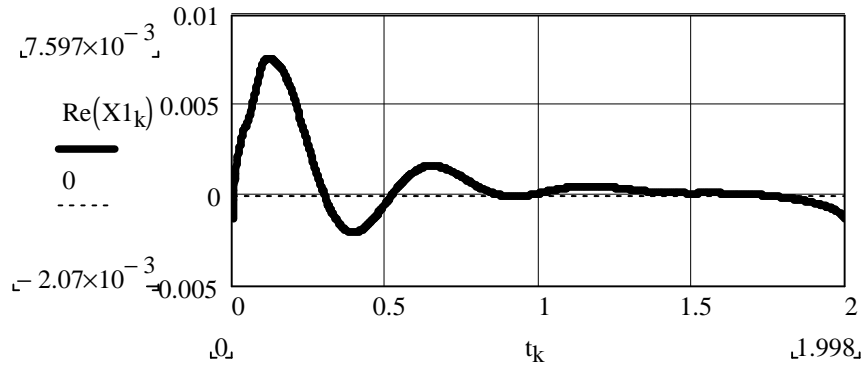


Рис. 10.2. Лінійне переміщення в напрямку координати 1 при дії дельта-імпульсу навантаження в тому ж напрямку

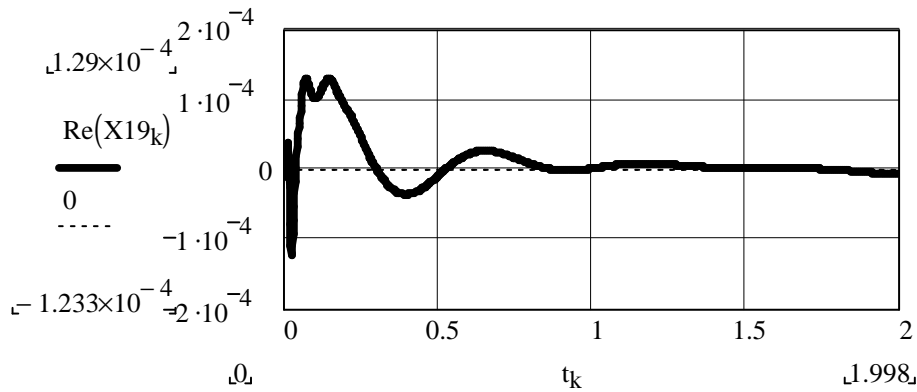


Рис. 10.3. Лінійне переміщення в напрямку координати 19 при дії дельта-імпульсу навантаження в напрямку координати 1

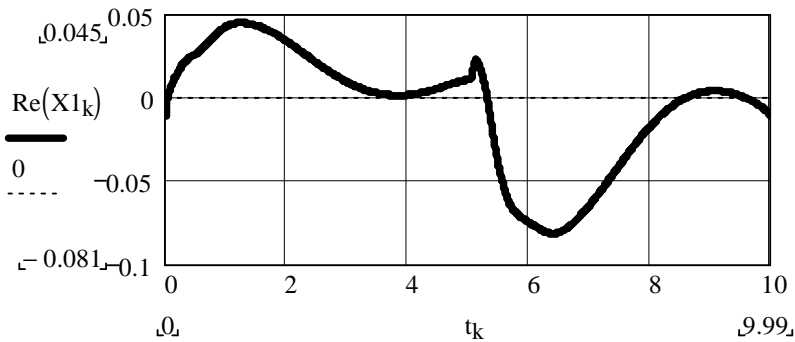


Рис. 10.4. Лінійне переміщення в напрямку координати 1 при дії двох імпульсів навантаження

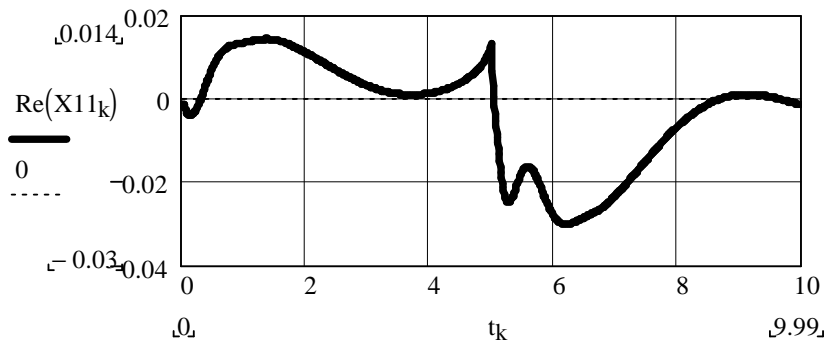


Рис. 10.5. Лінійне переміщення в напрямку координати 11 при дії двох імпульсів навантаження

Параметри стержня прийняті такими: довжина стержня $l=1\text{ м}$; кількість скінченних елементів $n=10$; розміри поперечного перерізу $h=0.1\text{ м}$, $b=0.02\text{ м}$; питома вага матеріалу $g=10^4\text{ Н/м}^3$; модуль пружності матеріалу $E=10^6(1+i)\text{ МПа}$, ($i=\sqrt{-1}$). Параметри чисельного перетворення Фур'є: час процесу $T=10\text{ с}$; кількість інтервалів $N=1024$.

Метод розрахунку нестационарних коливань у просторі перетворень Фур'є є високоефективним способом аналізу коливань в'язкопружних систем з частотно-залежним розсіянням енергії. Суттєвим є те, що ускладнення частотної залежності і форми діючого імпульсного навантаження (як у просторі, так і у часі) не приводить до ускладнення розрахунку. До переваг методу треба також віднести можливість безпосереднього використання в розрахунках експериментальних залежностей комплексних модулів від частоти.

Зазначимо, що трудомісткість розв'язку визначається, в основному, необхідністю багаторазового розв'язку системи рівнянь (10.13). У зв'язку з цим, значний інтерес викликають методи зменшення кількості узагальнених координат, а також можливість використання паралельних методів розв'язку систем алгебраїчних рівнянь на ЕОМ.

Використаний метод інтегральних перетворень може бути застосований для визначення передаточних характеристик більш складних конструкцій. Нижче наведено приклади реалізації методу у системі MathCAD.

Приклад 10.1. Визначити реакцію ферми на імпульсне навантаження (рис. 10.6)

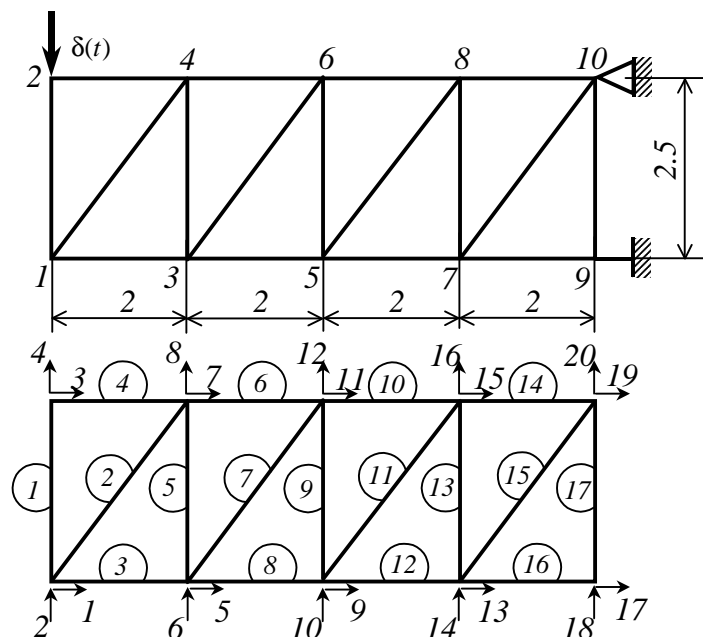


Рис. 10.6. Ферма і її скінченно-елементна модель

Параметри швидкого перетворення Фур'є

$$N := 2048 \quad k := 1..N \quad i := \sqrt{-1} \quad TT := 40 \quad df := \frac{1}{TT} \quad dt := \frac{TT}{N}$$

$$f_k := df \cdot (k - 1) \quad t_k := dt \cdot (k - 1) \quad \omega_k := 2 \cdot \pi \cdot f_k \quad f_{2048} = 51.175$$

Модуль пружності і декремент коливань матеріалу

$$E02 := 10^6 \quad E12 := \left((0.2 \cdot 10^6) \right) \quad E := E02 + E12 \cdot i \quad E1 := 2 \cdot 10^{11}$$

$$d := \left(\frac{\text{Im}(E)}{\text{Re}(E)} \right) \cdot \pi \quad d = 0.628$$

Площа і момент інерції площі поперечного перерізу

$$A := 4 \cdot 10^{-4} \quad \text{м}^{**2} \quad I := 10^{-5} \quad \text{м}^{**4}$$

$$g := 7.8 \cdot 10^3 \quad \text{- густина, кг/м}^{**3}$$

$$ne := 4 \quad \text{- кількість узагальнених координат у елементі}$$

$$ke := 17 \quad \text{- кількість елементів} \quad nv := 2 \quad \text{- кількість вузлів у елементі}$$

$$kk := 1..ne \quad jj := 1..ne \quad j := 1..nv \quad ie := 1..ke$$

$$A_{ie} := A \quad E_{ie} := E$$

Координати вузлів

$$\text{Nodes} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 5 & 6 & 5 & 5 & 7 & 8 & 7 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 & 5 & 6 & 8 & 8 & 7 & 8 & 10 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}^T$$

Координати вузлів кожного елемента згідно з матрицею Top

$$X_{n,j,ie} := \text{Nodes}_{1, \text{Top}_{ie,j}} \quad Y_{n,j,ie} := \text{Nodes}_{2, \text{Top}_{ie,j}}$$

$$X_n = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$Y_n = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ \hline 2 & 2.5 & 2.5 & 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 0 & 2.5 & 2.5 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Довжини стержнів} \quad l_{ie} := \sqrt{(X_{n2,ie} - X_{n1,ie})^2 + (Y_{n2,ie} - Y_{n1,ie})^2}$$

$$\text{Синус і косинус кутів нахилу стержнів до осі x} \quad s(ie) := \frac{Y_{n2,ie} - Y_{n1,ie}}{l_{ie}} \quad c(ie) := \frac{X_{n2,ie} - X_{n1,ie}}{l_{ie}}$$

Матриця направляючих косинусів для переводу елемента у глобальну систему координат

$$T(ie) := \begin{pmatrix} c(ie) & s(ie) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(ie) & s(ie) \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів з використанням матриці T_{or}

$$m_{ie, 2j} := 2 \cdot T_{or_{ie, j}}$$

$$m_{ie, (2j-1)} := 2 \cdot T_{or_{ie, j-1}}$$

Матриці жорсткості і мас скінченного елемента

$$K_e(ie) := E_{ie} \cdot \frac{A_{ie}}{l_{ie}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_e(ie) := g \cdot \frac{A_{ie} \cdot l_{ie}}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$m_i =$

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	7	8
3	1	2	5	6
4	3	4	7	8
5	5	6	7	8
6	7	8	11	12
7	5	6	11	12
8	5	6	9	10
9	9	10	11	12
10	11	12	15	16
11	9	10	15	16
12	9	10	13	14
13	13	14	15	16
14	15	16	19	20
15	13	14	19	20
16	13	14	17	18

Матриці жорсткості і мас елемента у глобальній системі координат

$$K\alpha(ie) := T(ie)^T \cdot K_e(ie) \cdot T(ie)$$

$$M\alpha(ie) := T(ie)^T \cdot M_e(ie) \cdot T(ie)$$

Формування матриць жорсткості і мас ферми

$$KS_{\max(mi), \max(mi)} := 0 \quad MS_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$KS_{m_{ie, jj}, m_{ie, kk}} := KS_{m_{ie, jj}, m_{ie, kk}} + K\alpha(ie)_{jj, kk}$$

$$MS_{m_{ie, jj}, m_{ie, kk}} := MS_{m_{ie, jj}, m_{ie, kk}} + M\alpha(ie)_{jj, kk}$$

Умови закріплення ферми: $u_{17}=u_{19}=u_{20}=0$

Відповідна редукція матриць жорсткості і вузлових сил

$$m := 1..17 \quad n := 1..17$$

$$mr := (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 18)$$

$$KR_{m, n} := KS_{(mr_{1, m}, mr_{1, n})} \quad MR_{m, n} := MS_{(mr_{1, m}, mr_{1, n})}$$

$$Z(k) := KR + (i \cdot \omega_k)^2 \cdot MR \quad - \text{матриця динамічної жорсткості}$$

Вектор навантажень

$$FF(k) := (0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Вектори переміщень у частотній області для кожного значення k

$$XF1^{(k)} := Z(k)^{-1} \cdot FF(k) \quad XF := XF1^T$$

$$\text{cols}(XF) = 17 \quad \text{rows}(XF) = 2.048 \times 10^3$$

Кожен стовпець матриці XF відповідає зміні переміщень у напрямку відповідної з сімнадцяти узагальнених координат. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до кожного стовпця, одержимо зміну відповідної координати у часі. Зокрема, переміщення точки прикладення імпульсу сили у напрямку її дії (рис. 10.7)

$$X1 := \text{Re}\left(\frac{2}{TT} \cdot \text{ICFFT}(XF^{(1)})\right)$$

$$X2 := \text{Re}\left(\frac{2}{TT} \cdot \text{ICFFT}(XF^{(2)})\right)$$

$$X3 := \text{Re}\left(\frac{2}{TT} \cdot \text{ICFFT}(XF^{(3)})\right)$$

$$X4 := \text{Re}\left(\frac{2}{TT} \cdot \text{ICFFT}(XF^{(4)})\right)$$

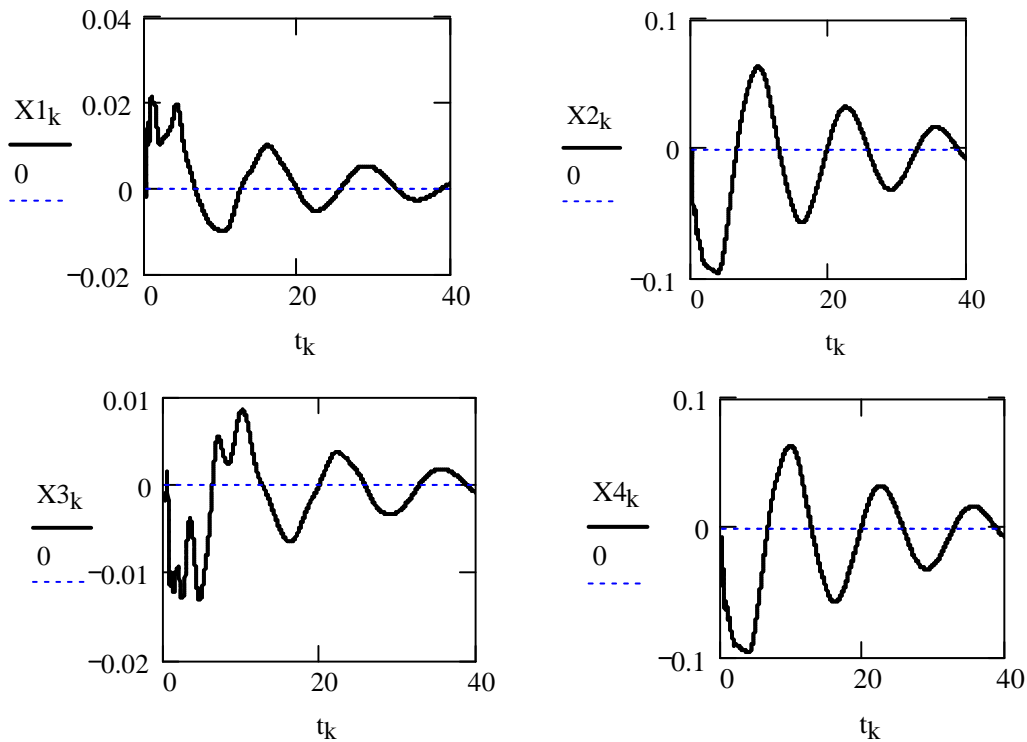


Рис. 10.7. Переміщення у напрямку узагальнених координат 1, 2, 3, 4

Програми-функції для визначення зусиль у перерізах стержнів ферми

```

UE(k) := [
    Z ← KR + (i · ok)2 · MR
    XF ← Z-1 · FF(k)
    XF1 ← submatrix(XF, 1, 16, 1, 1)
    XF2 ← submatrix(XF, 17, 17, 1, 1)
    UFK1 ← stack(XF1, 0 + i · 0)
    UFK2 ← stack(UFK1, XF2)
    UFK ← stack(UFK2, 0 + i · 0)
    UFK ← stack(UFK, 0 + i · 0)
    for ie ∈ 1..17
        for kk ∈ 1..4
            UEie, kk ← UFK(mie, kk)
    UE
]
    
```

```

R := [
    for k ∈ 1..N
        UE ← UE(k)T
        for ie ∈ 1..17
            ZE ← Kα(ie) + (i · ok)2 · Mα(ie)
            UES ← UE⟨ie⟩
            Rel ← ZE · UES
            RR ← T(ie) · Rel
            RU⟨ie⟩ ← RR
            RU
            RF1 ← (RU)T
            RF⟨k⟩ ← RF1⟨1⟩
        RF ← (RF)T
        for ie ∈ 1..17
            R⟨ie⟩ ← Re [ (  $\frac{2}{TT}$  ) · ICFFT ( RF⟨ie⟩ ) ]
    R
]
    
```

Побудуємо графіки внутрішніх сил у стержнях з номерами 1, 5, 13, 16 (рис. 10.8).

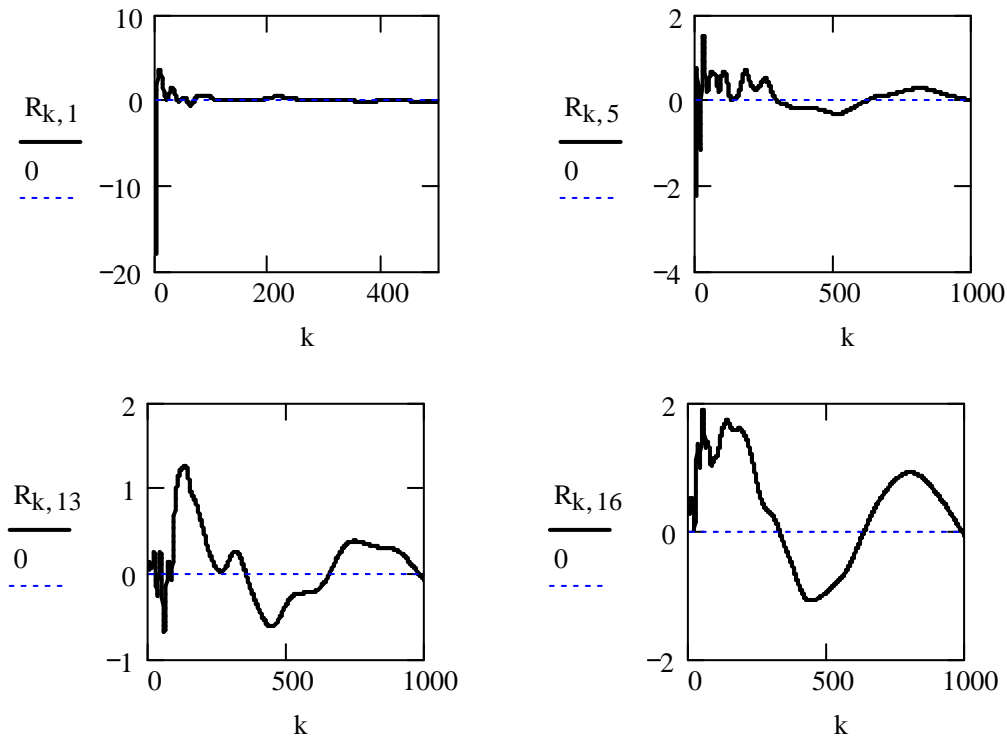


Рис. 10.8. Внутрішні сили у стержнях ферми

Приклад 10.2. Визначити переміщення стержня при кінематичному збудженні (рис. 10.9).

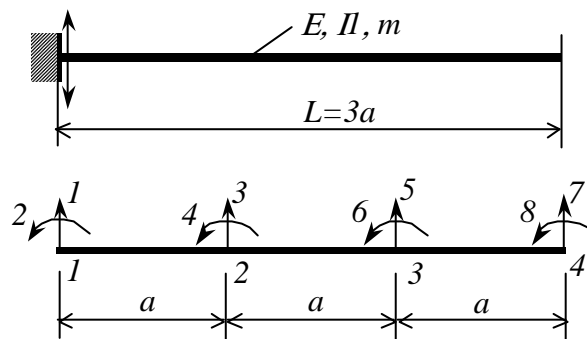


Рис. 10.9. Консольний стержень і його скінченно-елементна модель

Параметри швидкого перетворення Фур'є

$$N := 2048 \quad k := 1..N \quad i := \sqrt{-1} \quad T := 18 \quad df := \frac{1}{T} \quad dt := \frac{T}{N}$$

$$f_k := df \cdot (k - 1) \quad t_k := dt \cdot (k - 1) \quad \omega_k := 2 \cdot \pi \cdot f_k \quad f_{2048} = 113.722$$

Модуль пружності матеріалу і декремент коливань

$$E02 := 10^6 \quad E12 := ((0.2 \cdot 10^6)) \quad E1 := E02 + E12 \cdot i$$

$$d := \left(\frac{\text{Im}(E1)}{\text{Re}(E1)} \right) \cdot \pi \quad d = 0.628 \quad \rho := 7.8 \cdot 10^3 \quad \text{- густина матеріалу}$$

$A1 := 10^{-2}$ - площа (м**2) і момент інерції (м**4) поперечного перерізу
 $I1 := 10^{-5}$ перерізу
 $a := 1$ - довжина елемента, м $ie := 1..3$ - кількість елементів

$E_{ie} :=$ $l_{ie} :=$ $I_{ie} :=$ $m := \rho \cdot A1$ - погонна маса

E1
E1
E1

a
a
a

I1 · 2
I1 · 1.5
I1

$$Ke(ie) := \left[E_{ie} \cdot \frac{I_{ie}}{(l_{ie})^3} \right] \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l_{ie} & -12 & 6 \cdot l_{ie} \\ 6 \cdot l_{ie} & 4 \cdot (l_{ie})^2 & -6 \cdot l_{ie} & 2 \cdot (l_{ie})^2 \\ -12 & -6 \cdot l_{ie} & 12 & -6 \cdot l_{ie} \\ 6 \cdot l_{ie} & 2 \cdot (l_{ie})^2 & -6 \cdot l_{ie} & 4 \cdot (l_{ie})^2 \end{bmatrix} \quad \text{- матриця жорсткості елемента}$$

$$Me(ie) := \left(m \cdot \frac{l_{ie}}{210} \right) \cdot \begin{bmatrix} 78 & 11 \cdot l_{ie} & 27 & -6.5 \cdot l_{ie} \\ 11 \cdot l_{ie} & 2 \cdot (l_{ie})^2 & 6.5 \cdot l_{ie} & -1.5 \cdot (l_{ie})^2 \\ 27 & 6.5 \cdot l_{ie} & 78 & -11 \cdot l_{ie} \\ -6.5 \cdot l_{ie} & -1.5 \cdot (l_{ie})^2 & -11 \cdot l_{ie} & 2 \cdot (l_{ie})^2 \end{bmatrix} \quad \text{- матриця мас елемента}$$

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{- матриця індексів}$$

Формування глобальних матриць жорсткості і мас

$$j := 1..4 \quad kk := 1..4 \quad K1_{g,8} := 0 \quad M1_{g,8} := 0$$

$$K1_{mi_{ie,j}, mi_{ie,kk}} := K1_{mi_{ie,j}, mi_{ie,kk}} + Ke(ie)_{j,kk}$$

$$M1_{mi_{ie,j}, mi_{ie,kk}} := M1_{mi_{ie,j}, mi_{ie,kk}} + Me(ie)_{j,kk}$$

$$Z1(k) := K1 + (i \cdot \omega_k)^2 \cdot M1 \quad \text{- матриця динамічної жорсткості балки}$$

Редукція динамічної матриці балки і формування правої частини системи рівнянь відносно переміщень у просторі перетворень Фур'є

$$Z2(k) := \text{submatrix}(Z1(k), 3, 8, 1, 8) \quad Z01(k) := \text{submatrix}(Z2(k), 1, 6, 1, 1)$$

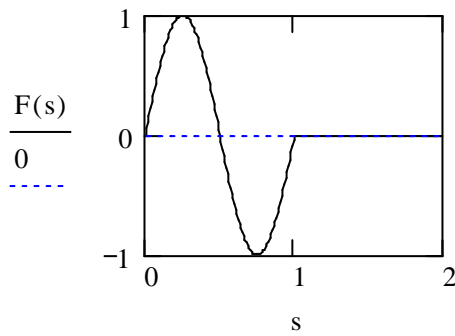
$$Z02(k) := \text{submatrix}(Z2(k), 1, 6, 2, 2) \quad Z(k) := \text{submatrix}(Z2(k), 1, 6, 3, 8)$$

$$T1 := 0.5 \quad s := 0, \frac{T}{N-1} .. T \quad F1(s) := \sin\left(\pi \cdot \frac{s}{T1}\right)$$

$$HH(t, A, B) := \Phi(t - A) \cdot \Phi(B - t) \quad F(t) := F1(t) HH(t, 0, 2T1)$$

$$F_k := F(t_k)$$

$$FF := CFFT(F) \cdot T$$



Форма імпульсу переміщення опори

$$F_k := -Z01(k) \cdot FF_k \quad \text{- навантаження, обумовлене зміщенням опори}$$

$$XF1^{(k)} := Z(k)^{-1} \cdot F_k \quad XF := XF1^T \quad \text{- зображення переміщень}$$

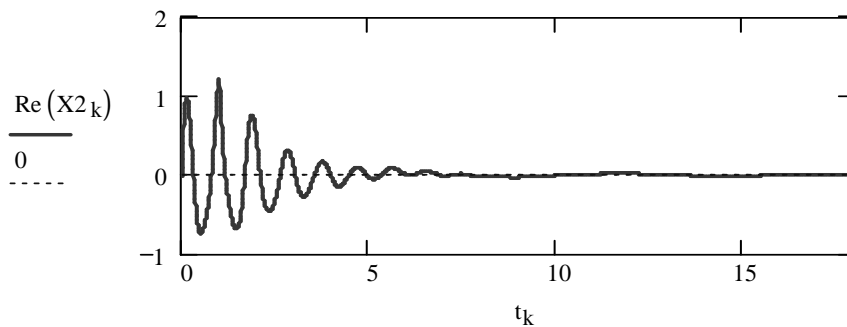
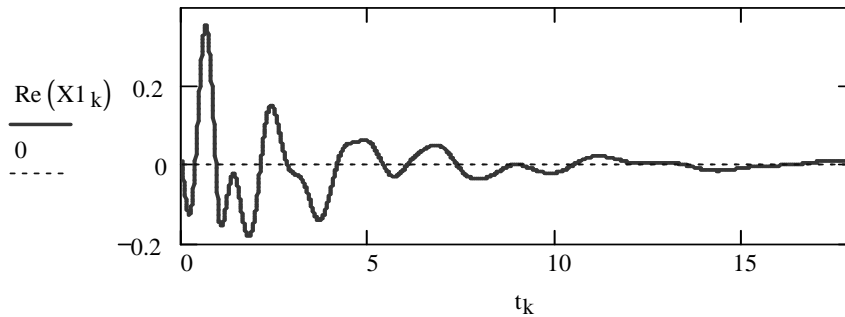
Визначення переміщень за допомогою швидкого перетворення Фур'є

$$X1 := \frac{1}{T} ICFFT(XF^{(1)}) \quad X2 := \frac{1}{T} ICFFT(XF^{(2)})$$

$$X3 := \frac{1}{T} ICFFT(XF^{(3)}) \quad X4 := \frac{1}{T} ICFFT(XF^{(4)})$$

$$X5 := \frac{1}{T} ICFFT(XF^{(5)}) \quad X6 := \frac{1}{T} ICFFT(XF^{(6)})$$

Графіки переміщень



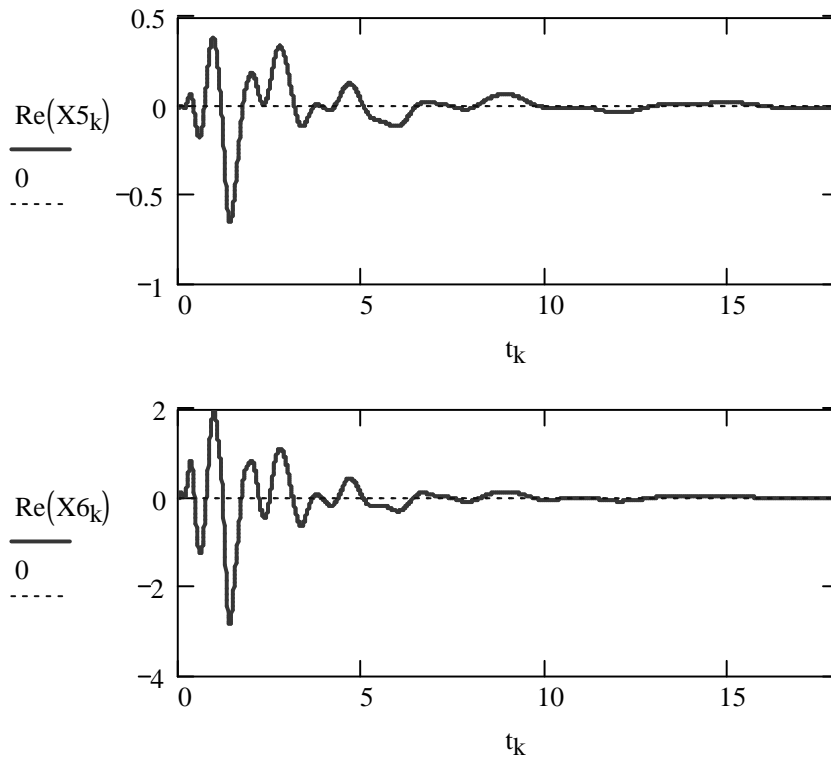


Рис. 10.10. Переміщення у напрямках узагальнених координат 3, 4, 7, 8

Приклад 10.3. Визначити переміщення у рамі при кінематичному навантаженні – переміщенні опор за заданим законом (рис. 10.11).

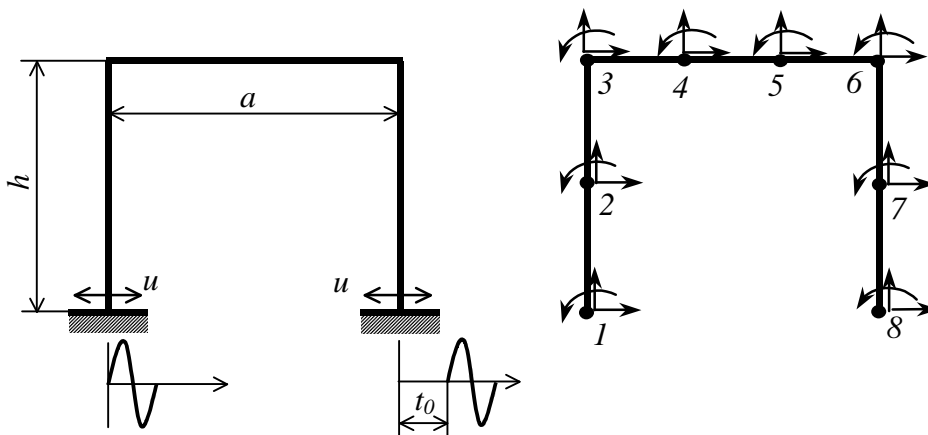


Рис. 10.11. Переміщення опор рами за заданим законом і скінченно-елементна модель рами

Вхідні дані:

$a := 3$ $h := 2$ - габаритні розміри рами, м

Модуль пружності (Па):

$$E := 2 \cdot 10^{11}$$

Площа поперечного перерізу стержнів (м**2):

$$A := 1 \cdot 10^{-2}$$

Момент інерції площі A (м**4):

$$I := 1 \cdot 10^{-4}$$

Параметри для швидкого перетворення Фур'є

$$N := 2048 \quad k := 1..N \quad j := \sqrt{-1} \quad T := 40 \quad df := \frac{1}{T} \quad dt := \frac{T}{N}$$

$$f_k := df \cdot (k - 1) \quad t_k := dt \cdot (k - 1) \quad \omega_k := 2 \cdot \pi \cdot f_k \quad f_{2048} = 51.175$$

Комплексний модуль пружності і декремент коливань

$$E02 := 10^6 \quad E12 := \left((0.2 \cdot 10^6) \right) \quad E1 := 2 \cdot 10^{11} \quad E := E02 + E12 \cdot j$$

$$d := \left(\frac{\text{Im}(E)}{\text{Re}(E)} \right) \cdot \pi \quad d = 0.628$$

Розбиваємо раму на сім скінченних елементів

Матриця координат вузлів:

$$Nc := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 2 \cdot \frac{a}{3} & a & a & a \\ 0 & \frac{h}{2} & h & h & h & h & \frac{h}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Матриця, яка показує послідовність з'єднання елементів (топологічна матриця):

$$Top := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T$$

ke := rows(Top) - кількість елементів ke = 7

kn := cols(Top) - кількість вузлів у кожному елементі kn = 2

Обчислюємо координати вузлів кожного елемента у глобальній системі координат

$$i := 1..ke \quad jj := 1..kn$$

$$Xn_{jj,i} := Nc_{1,(Top_i,jj)} \quad Yn_{jj,i} := Nc_{2,(Top_i,jj)}$$

Довжини елементів $l_i := \sqrt{(Xn_{2,i} - Xn_{1,i})^2 + (Yn_{2,i} - Yn_{1,i})^2}$

Елементи матриці направляючих косинусів

$$s(i) := \frac{Yn_{2,i} - Yn_{1,i}}{l_i} \quad c(i) := \frac{Xn_{2,i} - Xn_{1,i}}{l_i}$$

Матриця направляючих косинусів

$$TT(i) := \begin{pmatrix} c(i) & s(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(i) & c(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(i) & s(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(i) & c(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів

$$m_{i, (3 \cdot jj - 2)} := 3 \cdot \text{Тор}_{i, jj} - 2$$

$$m_{i, (3 \cdot jj - 1)} := 3 \cdot \text{Тор}_{i, jj} - 1$$

$$m_{i, 3 \cdot jj} := 3 \cdot \text{Тор}_{i, jj}$$

Матриця індексів:

$$m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента

$$K_e(i) := \frac{E}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix}$$

Матриця мас елемента

$$m := A \cdot 7.85 \cdot 10^3$$

$$M_e(i) := \begin{bmatrix} \frac{210}{3} & 0 & 0 & \frac{210}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 11 \cdot l_i & 0 & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 0 & 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 0 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ \frac{210}{6} & 0 & 0 & \frac{210}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 6.5 \cdot l_i & 0 & 78 & -11 \cdot l_i \\ 0 & -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & 0 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \cdot \left(m \cdot \frac{l_i}{210} \right)$$

Обчислення компонентів матриць жорсткості і мас елемента у глобальній системі координат

$$K_{e\alpha}(i) := \text{ТТ}(i)^T \cdot K_e(i) \cdot \text{ТТ}(i)$$

$$M_{e\alpha}(i) := \text{ТТ}(i)^T \cdot M_e(i) \cdot \text{ТТ}(i)$$

Побудова матриць жорсткості і мас для рами:

$$K_{\max(mi)}, \max(mi) := 0 \quad M_{\max(mi)}, \max(mi) := 0$$

$$kk := 1..6 \quad ik := 1..6 \quad \max(mi) = 24$$

$$K_{mi, ik, mi, kk} := K_{mi, ik, mi, kk} + Ke\alpha(i)_{ik, kk}$$

$$M_{mi, ik, mi, kk} := M_{mi, ik, mi, kk} + Me\alpha(i)_{ik, kk}$$

$$Z(k) := K + (j \cdot \omega_k)^2 \cdot M$$

$$Z0(k) := \text{submatrix}(Z(k), 4, 21, 4, 21) \quad Z01(k) := \text{submatrix}(Z(k), 4, 21, 1, 1)$$

$$Z02(k) := \text{submatrix}(Z(k), 4, 21, 22, 22) \quad Z03(k) := \text{submatrix}(Z(k), 4, 21, 3, 3)$$

$$Z04(k) := \text{submatrix}(Z(k), 4, 21, 24, 24)$$

Побудова імпульсу навантажень

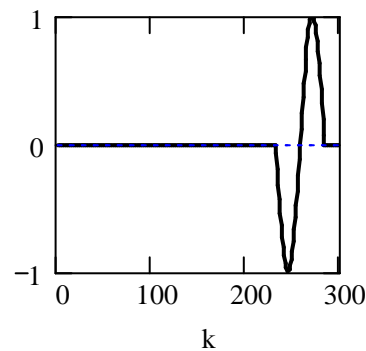
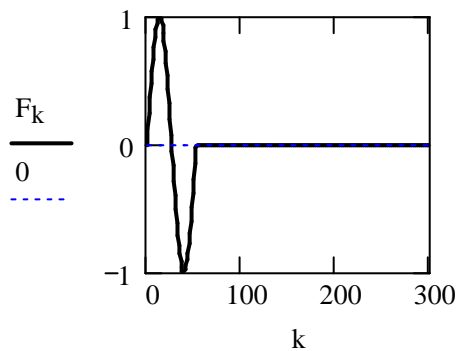
$$T1 := 0.5 \quad s := 0, \frac{T}{N-1} .. T \quad F1(s) := \sin\left(\pi \cdot \frac{s}{T1}\right)$$

$$HH(t, A, B) := \Phi(t - A) \cdot \Phi(B - t) \quad F(t) := F1(t) HH(t, 0, 2 \cdot T1)$$

$$F_k := F(t_k) \quad FF2 := \text{CFFT}(F) \cdot T \quad F3(t) := F1(t) HH(t, 9 \cdot T1, 11 \cdot T1)$$

$$F3_k := F3(t_k) \quad FF3 := \text{CFFT}(F3) \cdot T$$

Форма імпульсів, діючих на ліву і праву опори рами



$$F_k := -Z01(k) \cdot FF2_k - Z02(k) \cdot FF3_k \quad - \text{кінематичне навантаження}$$

$$XF1^{(k)} := Z0(k)^{-1} \cdot F_k \quad XF := XF1^T \quad - \text{розв'язок відносно зображень переміщень вузлів}$$

Переміщення у часовому просторі (обернене перетворення Фур'є для кожної узагальненої координати)

$$X4 := \frac{2}{T} \text{ICFFT}(XF^{(4)})$$

$$X14 := \frac{2}{T} \text{ICFFT}(XF^{(14)})$$

$$X5 := \frac{2}{T} \text{ICFFT}(XF^{(5)})$$

$$X13 := \frac{2}{T} \text{ICFFT}(XF^{(13)})$$

Переміщення вузлів рами у вказаних напрямках при горизонтальному переміщенні опор за заданим законом показано на рис. 10.12.

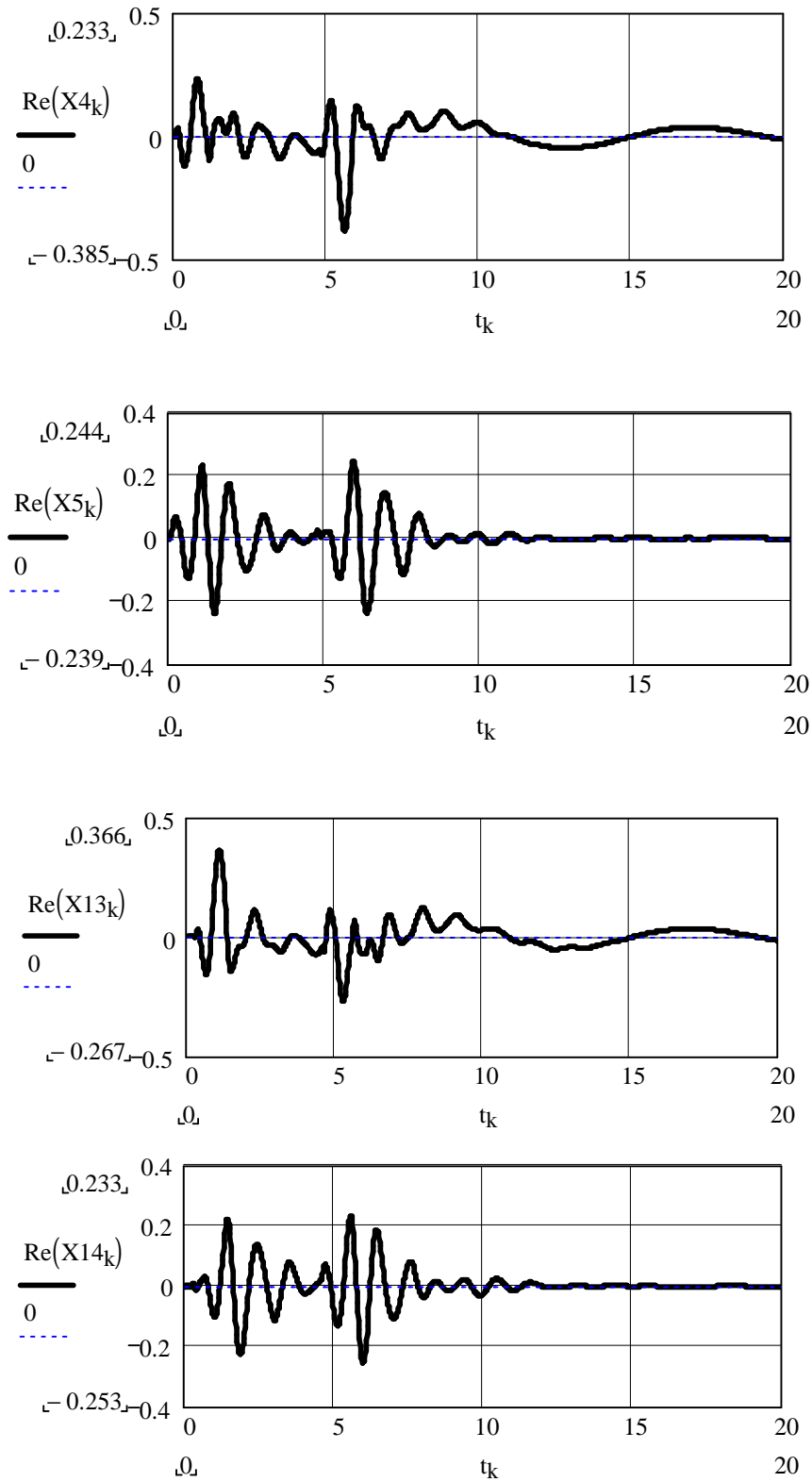


Рис. 10.12. Переміщення вузлів рами при горизонтальному переміщенні опор

РОЗДІЛ 11

МСЕ У ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

При контактуванні двох тіл, що мають різну температуру, відбувається обмін кінетичною енергією між структурними частинками (молекулами, атомами, вільними електронами), внаслідок чого одні збільшують інтенсивність руху, а інші – зменшують. Такий енергетичний обмін між тілами називають теплообміном або теплопередачею. У результаті одне з тіл нагрівається, а друге – охолоджується. Кількість енергії, переданої частинками більш нагрітого тіла частинкам менш нагрітого, називається кількістю теплоти, або просто теплотою. Такий процес передачі теплоти відбувається від більш до менш нагрітих об'ємів, а також у межах одного тіла. Процес передачі теплоти закінчується при вирівнюванні температури по об'єму.

Сукупність явищ, які приводять до переносу теплоти від одного об'єму до другого називають теплообміном. Для зручності перенос тепла розділяють на декілька простіших процесів: теплопровідність, конвекцію, теплообмін радіаційний.

Теплопровідність – процес переносу тепла між об'ємами, що контактують безпосередньо. Передача теплоти у металах відбувається внаслідок обміну енергією між електронами, у рідинах і діелектриках – через взаємодію хвиль, які викликані зміщеннями молекул і атомів від положень рівноваги.

Конвекція – передача теплоти внаслідок переміщення матеріальних частинок.

Радіаційний теплообмін – передача теплоти електромагнітними хвилями між тілами, що не контактують між собою.

У теорії теплопровідності абстрагуються від дискретної будови матерії і дійсних механізмів передачі теплової енергії і вважають середовище суцільним і неперервним, що дозволяє, як і у механіці деформівних твердих тіл, застосовувати методи математичного аналізу, використовуючи поняття неперервності і диференційованості.

Основними поняттями теорії теплопровідності є температурне поле, градієнт температури, вектор теплового потоку.

Температурне поле – це сукупність значень температури у точках даного об'єму у фіксований момент часу. Температура є скалярною функцією координат і часу

$$T = T(x, y, z, t). \quad (11.1)$$

Якщо функція T не залежить від часу, температурне поле називають стаціонарним.

Визначення залежності $T(x, y, z, t)$ є основною задачею теорії теплопровідності. Поверхні $T(x, y, z) = \text{const}$ називають ізотермічними, або поверхнями рівня.

Перетинаючи ізотермічні поверхні площиною, одержимо на цій площині сімейство ізотермічних ліній або ізотерм. У довільній точці ізотермічної поверхні можна побудувати вектор, направлений по нормалі до поверхні у бік збільшення температури. Абсолютна величина вектора дорівнює зміні температури на одиницю довжини переміщення у даному напрямку, тобто швидкості зростання температури у цьому напрямку. Цей вектор називають градієнтом температури у точці

$$\text{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}. \quad (11.2)$$

Довжина вектора $\text{grad} T$ дорівнює швидкості зростання температури у заданому вектором \vec{n} напрямку. Похідні $\partial T / \partial n$ і вектор $\text{grad} T$ пов'язані співвідношенням

$$\frac{\partial T}{\partial n} = n \text{grad} T, \quad |\text{grad} T| = \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (11.3)$$

Очевидно, для того, щоб у тілі відбувся перенос теплоти, температурний градієнт повинен не дорівнювати нулю, тобто співвідношення $\text{grad} T \neq 0$ є необхідною умовою виникнення у тілі теплового потоку. Тепловий потік, на відміну від температури, має напрямок, а саме: від точок тіла з більш високою до точок з більш низькою температурою. Тепловий потік можна розглядати як вектор, направлений у бік зменшення температур, а поле теплових потоків є векторним полем.

Для математичного описання поля теплових потоків вводиться вектор \vec{q} , який називають вектором густини теплового потоку, розуміючи під цим вектор, напрямок якого співпадає з напрямком переносу теплоти, а абсолютне значення означає інтенсивність переносу теплоти, або кількість теплоти, що проходить через одиницю площі поверхні, перпендикулярній напрямку потоку в даній точці.

Позначимо dQ – кількість теплоти, що проходить через ізотермічну поверхню площею ds за час dt . Тоді, згідно з визначенням, тепловий потік визначатиметься залежністю

$$q = dQ / (ds \cdot dt). \quad (11.4)$$

Поняття теплового потоку можна застосувати до довільної поверхні, а не тільки до ізотермічної, тобто можна говорити про густину теплового потоку вздовж довільного напрямку \vec{l} , відмінного від напрямку нормалі \vec{n} . У цьому випадку густина теплового потоку в напрямку \vec{l} є проекцією вектора \vec{q} на цей напрямок, тобто величина $q \cos(\vec{n}, \vec{l})$. Вектори густини

теплогового потоку і градієнта температурного поля направлені по нормалі до ізотермічної поверхні, але у протилежні сторони.

Згідно з гіпотезою Фур'є, яку часто називають законом Фур'є, тепловий потік є пропорційним градієнту температури

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad}T. \quad (11.5)$$

Коефіцієнт λ називають коефіцієнтом теплопровідності. Він є константою, яка характеризує теплопровідність даного матеріалу.

Одиницею виміру λ є $\frac{Вт}{м \cdot \text{град}}$. Коефіцієнт теплопровідності залежить від

стану середовища, температури, тиску, структури матеріалу тощо. Для різних матеріалів теплопровідність λ визначається експериментально. Найбільш суттєвою є залежність λ від температури, однак для полегшення розрахунків величина λ вважається константою.

З урахуванням (11.3) залежність (11.5) можна записати і у такому вигляді

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (11.6)$$

або, з урахуванням (11.4), у скалярній формі

$$dQ = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) ds dt. \quad (11.7)$$

Ця залежність визначає кількість теплоти, що проходить через ділянку ds ізотермічної поверхні за час dt у напрямку \vec{n} до площадки ds . Кількість теплоти, що проходить за час t через ізотермічну поверхню площею s

$$Q = -\int_0^t \iint_s \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) dt ds. \quad (11.8)$$

Цю формулу можна застосувати для довільної поверхні A

$$Q = -\int_0^t \iint_A \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) dt dA. \quad (11.9)$$

Якщо тепловий режим стаціонарний і температурний градієнт однаковий по площі поверхні A , можна записати

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l} A t. \quad (11.10)$$

Таким чином, для визначення кількості теплоти, що проходить через деяку площу поверхні твердого тіла, необхідно знати температурне поле у тілі, що складає основну задачу теорії теплопровідності.

Проекції теплового потоку на координатні осі

$$q_x = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad q_y = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad q_z = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (11.11)$$

Співвідношення між величинами, від яких залежить передача теплоти, встановлюється так званим рівнянням теплопровідності. В основу виводу рівняння покладено закон теплопровідності Фур'є і закон збереження енергії. Для ізотропного, однорідного тіла диференціальне рівняння теплопровідності має вигляд [9]

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + Q(x, y, z, t), \quad (11.12a)$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(x, y, z, t) + \frac{1}{c_p} Q(x, y, z, t), \quad (11.12б)$$

де $a = \frac{\lambda}{c_p}$ – коефіцієнт, який називають температуропровідністю ($m^2/год$);

c_p – об'ємна теплоємність $\left(\frac{Дж}{m^2 \cdot град} \right)$;

$\Delta T = \operatorname{div}(\operatorname{grad} T)$, (Δ – оператор Лапласа);

$Q(x, y, z, t)$ – функція, яку називають густиною теплових джерел. Це така функція, яка визначає кількість тепла, виділеного ($Q(x, y, z, t) > 0$) або поглинутого ($Q(x, y, z, t) < 0$) в елементарному об'ємі dV за час dt .

Теплота, виділена в елементі об'єму dV , визначається як добуток

$$dQ = Q(x, y, z, t) dV dt. \quad (11.13)$$

За проміжок часу dt в об'ємі V виділяється теплота

$$Q = dt \iiint_V Q(x, y, z, t) dV. \quad (11.14)$$

У декартовій системі координат рівняння (11.12а) набуває вигляду

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q(x, y, z, t). \quad (11.15)$$

Рівняння (11.15) відноситься до диференціальних рівнянь параболічного типу, і відповідно до цього вибираються методи його розв'язку. У зв'язку з тим, що температура залежить від часу, рівняння описує нестационарну теплопровідність.

Якщо температура у кожній точці об'єму залежить тільки від координат, тобто $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, рівняння (11.15) набуває вигляду

$$\lambda \Delta T(x, y, z) + Q(x, y, z) = 0, \quad (11.16)$$

де потужність теплових джерел $Q(x, y, z)$ не залежить від часу. Це рівняння називають рівнянням Пуассона.

Якщо в середині тіла немає теплових джерел і температура є стаціонарною, одержимо таке рівняння:

$$\Delta T(x, y, z) = 0. \quad (11.17)$$

Воно називається рівнянням Лапласа.

Якщо фізичні властивості матеріалу неоднакові у різних напрямках (анізотропний матеріал), коефіцієнт теплопровідності буде залежати від напрямків. Величина λ у цьому випадку є симетричним тензором другого рангу з матрицею

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}. \quad (11.18)$$

Рівняння (11.12а) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \text{ср} \frac{\partial T}{\partial t} &= \text{div}[\lambda \text{grad} T] + Q = \\ &= \text{div} \left[\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{k} \right] + Q. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Якщо λ не залежить від координат (однорідне тіло), рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} \text{ср} \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \\ &+ 2\lambda_{xy} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 2\lambda_{xz} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + 2\lambda_{yz} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + Q. \end{aligned} \quad (11.20)$$

У головних осях тензора λ рівняння (11.20) спрощується

$$\text{ср} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q. \quad (11.21)$$

З рівнянням (11.21) пов'язують граничні умови. Якщо на деякій частині поверхні тіла S_1 температура відома, то записують

$$T|_{S_1} = T_0. \quad (11.22)$$

Якщо на поверхні S_2 відбувається конвективний теплообмін, який визначається величиною $h(T - T_\infty)$,

де h – коефіцієнт тепловіддачі на поверхні;

T_∞ – температура середовища біля поверхні,

гранична умова матиме вигляд

$$h(T - T_\infty)|_{S_2} = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z\right), \quad (11.23)$$

де n_x, n_y, n_z – компоненти вектора нормалі до поверхні.

Якщо на поверхні S_3 задано потік тепла q , то гранична умова має вигляд

$$q|_{S_3} = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z\right), \quad (11.24)$$

При відсутності конвективного теплообміну і потоку тепла рівняння (11.23), (11.24) зводяться до такого:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (11.25)$$

яке висловлює умову існування теплоізованої поверхні (n – зовнішня нормаль).

Одним із шляхів розв'язання задачі теплопровідності, окрім безпосереднього аналізу рівняння теплопровідності, є мінімізація деякого функціоналу множини функцій, які задовольняють граничні умови.

З точки зору варіаційного обчислення розв'язання системи (11.21–11.24) є еквівалентним визначенню мінімуму функціоналу

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \int_V \left(\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) dV - \\ & - \int_V QT dV + \int_{S_2} h \left(\frac{1}{2} T - T_\infty \right) T dS + \int_{S_3} q T dS, \end{aligned} \quad (11.26)$$

або

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g} dV - \int_V QT dV + \int_{S_2} h \left(\frac{1}{2} T - T_\infty \right) T dS + \int_{S_3} q T dS, \quad (11.27)$$

де

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z), \quad \mathbf{g} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right)^T.$$

Умова мінімуму (або стаціонарності) функціоналу

$$\delta\Phi(T) = 0, \quad (11.28)$$

δ – знак варіації.

Після підстановки (11.27) у (11.28) одержимо

$$\delta\Phi = \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g} dV - \int_V \delta QT dV + \int_{S_2} h \delta T \left(\frac{1}{2} T - T_\infty \right) dS + \int_{S_3} q \delta T dS = 0. \quad (11.29)$$

Використаємо одержане варіаційне рівняння для побудови дискретного аналога. Для цього використаємо інтерполяційну залежність для одного скінченного елемента

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{U}, \quad (11.30)$$

де \mathbf{U} – вектор вузлових температур;

\mathbf{N} – матриця інтерполяційних функцій.

Підставляючи (11.30) у (11.29), одержимо з урахуванням незалежності варіацій δU

$$\mathbf{K}_\lambda \mathbf{U} + \mathbf{K}_h \mathbf{U} = \mathbf{F}_Q + \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_q, \quad (11.31)$$

$$\text{де } \mathbf{K}_\lambda = \int_V \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} dV \text{ – матриця теплопровідності,} \quad (11.32)$$

$$\mathbf{K}_h = \int_{S_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h dS \text{ – матриця конвекції,} \quad (11.33)$$

$$\mathbf{F}_Q = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{Q} dV, \quad (11.34)$$

$$\mathbf{F}_h = \int_{S_2} \mathbf{N}^T h T_\infty dS, \quad (11.35)$$

$$\mathbf{F}_q = \int_{S_1} \mathbf{N}^T q dS \quad (11.36)$$

\mathbf{F}_Q , \mathbf{F}_h , \mathbf{F}_q – вектори вузлових теплових сил, обумовлених дією відповідно внутрішніх джерел теплоти, теплової конвекції та розподіленого по поверхні S_1 теплового потоку q .

Рівняння дискретної моделі конкретної конструкції можна одержати традиційним для МСЕ шляхом.

11.1. Одновимірний випадок переносу тепла

Інтерполяційний поліном для одновимірного лінійного елемента (рис. 11.1) має вигляд

$$T = N_1 U_1 + N_2 U_2, \quad (11.37)$$

де

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_2 = \frac{x}{L}. \quad (11.38)$$

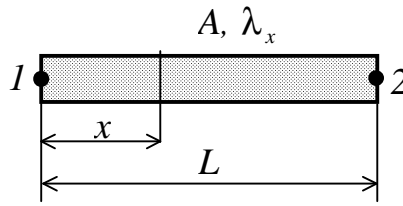


Рис. 11.1. Лінійний одновимірний елемент

Матриці у (11.31) матимуть вигляд

$$g = \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{L}T_1 + \frac{1}{L}T_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (11.39)$$

тобто

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (11.40)$$

Матриця λ зводиться до одного коефіцієнта

$$\lambda = \lambda_x.$$

Обчислимо матриці (11.32), (11.33) для $A = const$

$$\int_V \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} dV = \int_0^l \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \lambda_x \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} A dx = \frac{A\lambda_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.41)$$

$$\int_{S_2} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = hp \int_0^l \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{pmatrix} dx = \frac{hpL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (11.42)$$

де враховано $dS = p dx$; p – периметр, A – площа поперечного перерізу елемента.

Сума матриць теплопровідності та конвекції

$$\mathbf{K} = \frac{A\lambda_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hpL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (11.43)$$

Інтеграли (11.34 – 11.36)

$$\int_V \mathbf{N}^T Q dV = QA \int_0^l \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{pmatrix} dx = \frac{QAL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.44)$$

$$\int_{S_1} \mathbf{N}^T q dS = qp \int_0^l \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{pmatrix} dx = \frac{qpL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.45)$$

$$\int_{S_2} \mathbf{N}^T h T_\infty dS = \frac{h T_\infty p L}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.46)$$

Матриці (11.45), (11.46) враховують втрати тепла за рахунок конвекції (h – коефіцієнт теплообміну) і теплового потоку q по боковій поверхні елемента. Розглянемо співвідношення, які пов'язані з відводом тепла від торців елемента.

Припустимо, що тепло відводиться через поверхню правого кінця стержня (вузол 2, рис. 11.1). Відведення тепла відбувається або шляхом конвективного теплообміну, або завдяки наявності теплового потоку q .

Поверхневий інтеграл у матриці теплопровідності

$$\int_{S_2} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = \int_S h \begin{pmatrix} N_1(L) \\ N_2(L) \end{pmatrix} (N_1(L) \quad N_2(L)) dS = \int_S h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dS,$$

або

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = h A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.47)$$

Ця матриця додається до матриці теплопровідності, якщо на вільному кінці елемента відбувається відведення тепла.

Поверхневі інтегралі у матрицях (11.34), (11.36) будуть такими:

$$\int_S \mathbf{N}^T h T_\infty dS = h T_\infty A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\int_S \mathbf{N}^T q dS = q A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИКЛАД 11.1. Визначити розподілення температури у стержні (рис.11.2).

Вхідні дані:

- $T_c := 40$ - температура навколишнього середовища, град С
- $h := 10$ - коефіцієнт тепловіддачі з поверхні, Вт/(см**2*К)
- $\lambda := 72$ - коефіцієнт теплопровідності матеріалу, Вт/(см*К)
- $d := 2$ - діаметр стержня, см
- $l := 7.5$ - довжина стержня, см
- $ne := 5$ - кількість елементів
- $T_1 := 150$ - температура лівого кінця стержня, град С
- $a := 1.5$ - довжина скінченного елемента, см

$$i := 1..ne \quad p := \pi \cdot d \quad A := \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

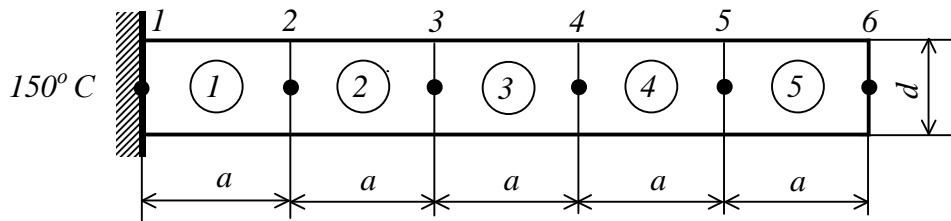


Рис. 11.2. Скінченно-елементна модель стержня

Сумарна матриця теплопровідності і конвекції для кожного з перших чотирьох елементів

$$Kel1 := A \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + h \cdot p \cdot \frac{a}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Сумарна матриця для п'ятого елемента

$$Kel5 := A \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + h \cdot p \cdot \frac{a}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + h \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця теплопровідності і конвекції для і-го елемента

$$Kel(i) := \text{if}(i < 5, Kel1, Kel5)$$

$$f1 := h \cdot T_c \cdot p \cdot \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f5 := f1 + h \cdot A \cdot T_c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f(i) := \text{if}(i < 5, f1, f5)$ Матриця навантажень і-го елемента

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{Матриця індексів}$$

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0 \quad n := 1..2 \quad m := 1..2$$

Формування матриць для стержня в цілому

$$K_{(mi,m, mi,n)} := [K_{(mi,m, mi,n)}] + Kel(i)_{m, n}$$

$$F_{\max(mi)} := 0 \quad F_{(mi,m)} := F_{(mi,m)} + f(i)_m$$

$$K = \begin{pmatrix} 182.212 & -135.088 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -135.088 & 213.628 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1.885 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.142 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Врахування граничної умови на правому торці стержня

$$KR := \text{submatrix}(K, 2, 5, 2, 5) \quad FR := \text{submatrix}(F, 2, 5, 1, 1)$$

$$KR = \begin{pmatrix} 364.425 & -135.088 & 0 & 0 \\ -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 \\ 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 \\ 0 & 0 & -135.088 & 364.425 \end{pmatrix} \quad FR = \begin{pmatrix} 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$FF := \begin{bmatrix} -(K_{2,1}) \cdot T1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad FR := FR + FF \quad UR := KR^{-1} \cdot FR$$

$$UR = \begin{pmatrix} 87.498 \\ 58.134 \\ 41.421 \\ 25.699 \end{pmatrix} \quad U := \text{stack}(150, UR)$$

$$U^T = (150 \ 87.498 \ 58.134 \ 41.421 \ 25.699)$$

Розглянемо інший варіант врахування граничних умов. Згідно з вхідними даними граничною умовою є задана температура на правому торці: $T_\infty = 150^\circ C$. Для врахування цієї умови викреслимо перший рядок і стовпець матриці теплопровідності і модифікуємо матрицю навантажень, віднявши від усіх компонент добутки $T_1 K_{i1}$, ($i = 2, 3, \dots, 6$).

Результати врахування граничних умов за другим варіантом

$$K_{1,1} := K_{1,1} \cdot 10^{12} \quad F_1 := 150 \cdot K_{1,1}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1.822 \times 10^{14} & -135.088 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -135.088 & 364.425 & -135.088 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -135.088 & 213.628 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2.733 \times 10^{16} \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.77 \times 10^3 \\ 3.142 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Значення температури у вузлах

$$U := K^{-1} \cdot F \quad U^T = (150 \ 88.836 \ 61.745 \ 49.824 \ 44.757 \ 43.008)$$

$$\text{Точний розв'язок} \quad U := (150 \ 89.9 \ 62.8 \ 50.5 \ 45.2 \ 43.3)$$

11.2. Двовимірний перенос тепла

11.2.1. Плоский трикутний елемент

Розглянемо трикутний елемент, заданий у системі координат xOy координатами вузлів (рис. 11.3). Інтерполяційний поліном, який описує залежність температури у точках елемента від координат x, y , має вигляд

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (11.48)$$

У вузлах виконуються умови

$$T = T_i, \text{ при } x = X_i, y = Y_i,$$

$$T = T_j, \text{ при } x = X_j, y = Y_j,$$

$$T = T_k, \text{ при } x = X_k, y = Y_k.$$

Підстановка цих умов у (11.48) приводить до системи рівнянь

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i,$$

$$T_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j, \quad (11.49)$$

$$T_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k.$$

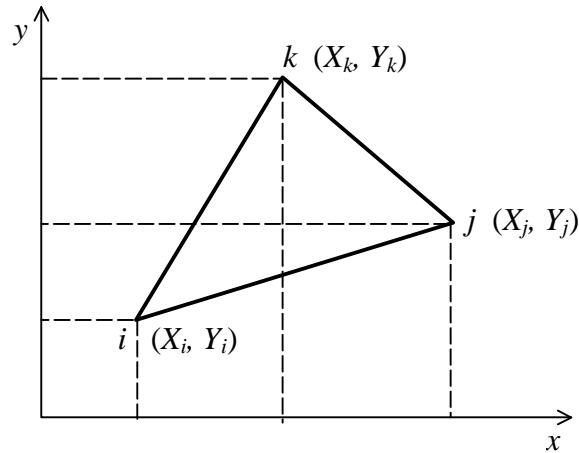


Рис. 11.3. Плоский скінченний елемент

Розв'язок цієї системи відносно коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} (a_i T_i + a_j T_j + a_k T_k), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} (b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} (c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k), \end{aligned} \quad (11.50)$$

де

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}, \quad (11.51)$$

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j, & a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k, & a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_i &= Y_j - Y_k, & b_j &= Y_k - Y_i, & b_k &= Y_i - Y_j, \\ c_i &= X_k - X_j, & c_j &= X_i - X_k, & c_k &= X_j - X_i. \end{aligned}$$

Підставляючи (11.50) у (11.48), одержимо

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k, \quad (11.52)$$

де N_i, N_j, N_k – функції форми

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \\ N_j &= \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y), \end{aligned} \quad (11.53)$$

$$N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y).$$

Матрицю градієнтів \mathbf{g} запишемо у вигляді

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{T}, \quad (11.54)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}.$$

Матриця властивостей матеріалу

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix}. \quad (11.55)$$

Матриця теплопровідності

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} dV &= \int_V \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV = \\ &= \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} \int_A dA = \mathbf{A} \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} = \\ &= \frac{\lambda_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{\lambda_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ b_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Другий інтеграл у матриці теплопровідності

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = h \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS. \quad (11.57)$$

(S – поверхня, на якій має місце конвективний теплообмін).

Якщо конвекція відбувається на одній із сторін елемента (рис. 11.4), де $N_k = 0$, інтеграл (11.57) набуває вигляду

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = h \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & 0 \\ N_j N_i & N_j N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS. \quad (11.58)$$

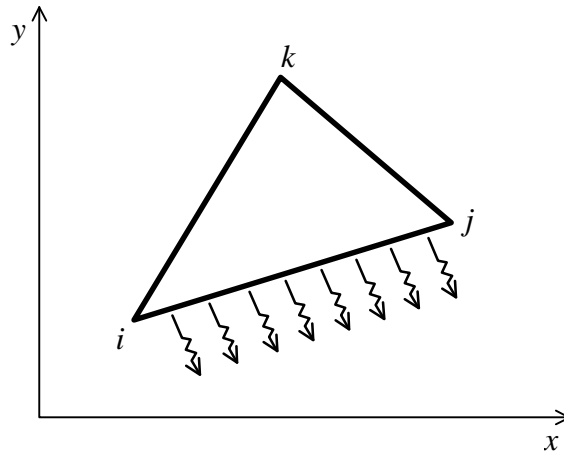


Рис. 11.4. Конвекція на одній стороні скінченного елемента

Якщо конвективний теплообмін відбувається на двох сторонах (рис. 11.5), – інтеграл (11.57) буде таким:

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = \int_{S_{ik}} h \begin{bmatrix} N_i N_i & 0 & N_i N_k \\ 0 & 0 & 0 \\ N_k N_i & 0 & N_k N_k \end{bmatrix} dS + \int_{S_{jk}} h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j N_j & N_j N_k \\ 0 & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS. \quad (11.59)$$

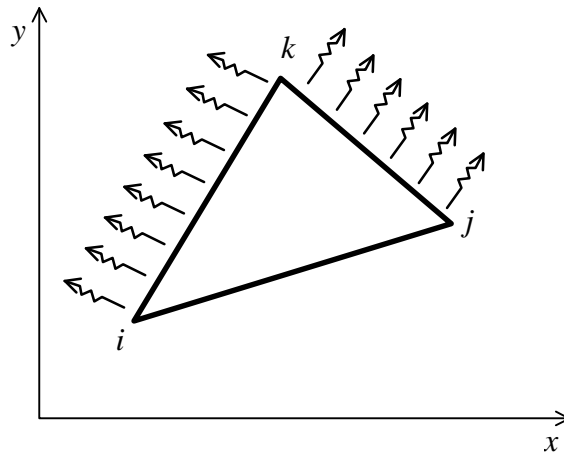


Рис. 11.5. Конвекція на двох сторонах скінченного елемента

Після інтегрування (11.58), (11.59) одержимо

$$\frac{hl_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{hl_{ik}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{hl_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (11.60)$$

Вектор навантажень у припущенні, що величина Q є сталою у межах елемента, визначається інтегралом (1.44)

$$Q \int_V \mathbf{N}^T dV = \frac{QV}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.61)$$

тобто тепло, яке генерується в елементі, розподіляється порівну між вузлами.

Якщо Q^* є точковим джерелом з координатами X_0, Y_0 , його можна врахувати за допомогою δ -функцій

$$Q = Q^* \delta(x - x_0) \delta(y - y_0); \quad (11.62)$$

тоді інтеграл (11.61) можна записати як

$$\int_V \mathbf{N}^T Q dV = Q^* \int_A \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy = Q^* \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix}_{\substack{x=X_0 \\ y=Y_0}}. \quad (11.63)$$

Як видно, точкове джерело розподіляється по вузлах пропорційно відповідним значенням величин N_i, N_j, N_k .

Якщо точкове джерело знаходиться безпосередньо у вузлі елемента, то воно вноситься у відповідний елемент матриці системи без змін.

Поверхневі інтеграли $\int_{S_1} \mathbf{N}^T q dS$ і $\int_{S_2} \mathbf{N}^T h T_\infty dS$ після інтегрування

матимуть такий вигляд:

При $q = const$

$$\int_{S_1} \mathbf{N}^T q dS = \frac{ql_{ij}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{ql_{jk}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{ql_{ki}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.64)$$

Нагадаємо, що товщина елемента приймається одиничною.

Аналогічно

$$\int_{S_2} \mathbf{N}^T h T_\infty dS = \frac{h T_\infty l_{ij}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h T_\infty l_{jk}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h T_\infty l_{ki}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.65)$$

ПРИКЛАД 11.2. Визначити розподілення тепла у прямокутній області масиву (рис. 11.6).

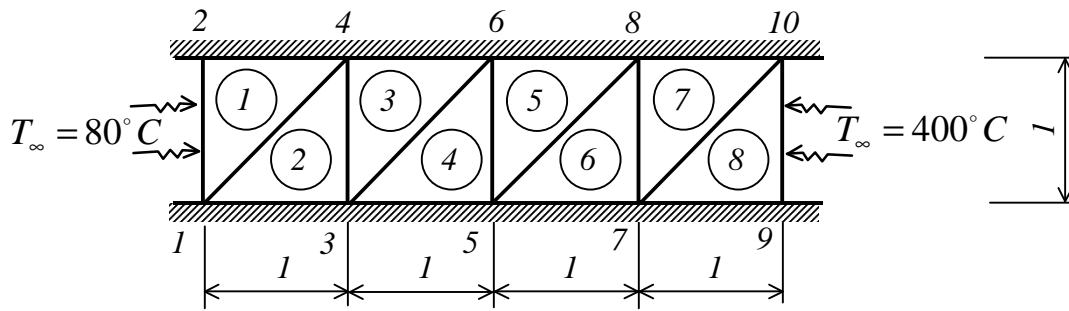


Рис. 11.6. Скінченно-елементна модель пластини

Вхідні дані:

$\lambda := 10$ Коефіцієнт теплопровідності матеріалу, Вт/(см*К)

$h := 5$ Коефіцієнт тепловіддачі з поверхні Вт/(см**2*К)

$T_{1c} := 80$ $T_{2c} := 400$ Температури на торцях пластини, град С

Координати вузлів скінченно-елементної моделі пластини

$X := (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4)$

$Y := (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$

$Nod := stack(X, Y)$

Nod =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Top :=

1	4	2
1	3	4
3	6	4
3	5	6
5	8	6
5	7	8
7	10	8
7	9	10

Топологічна матриця

$ne := rows(Top)$ Кількість елементів

$nve := cols(Top)$ Кількість вузлів у елементі

$i := 1..ne$ $j := 1..nve$

Координати вузлів елементів

$$x_{j,i} := \text{Nod}_{1, \text{Top}_{i,j}} \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$y_{j,i} := \text{Nod}_{2, \text{Top}_{i,j}} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$h_{23i} :=$

0
0
0
0
0
0
0
h

$h_{12g} := 0$

$h_{31_1} := h$ Коефіцієнти тепловіддачі сторін елементів

$h_{31g} := 0$

Визначення геометричних параметрів і матриці теплопровідності

$b1(i) := y_{2,i} - y_{3,i} \quad c1(i) := x_{3,i} - x_{2,i}$

$b2(i) := y_{3,i} - y_{1,i} \quad c2(i) := x_{1,i} - x_{3,i}$

$b3(i) := y_{1,i} - y_{2,i} \quad c3(i) := x_{2,i} - x_{1,i}$

$$A(i) := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_{1,i} & y_{1,i} \\ 1 & x_{2,i} & y_{2,i} \\ 1 & x_{3,i} & y_{3,i} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} e_{23}(i) &:= \sqrt{[(x_{2,i} - x_{3,i})^2 + (y_{2,i} - y_{3,i})^2]} \\ e_{31}(i) &:= \sqrt{[(x_{3,i} - x_{1,i})^2 + (y_{3,i} - y_{1,i})^2]} \\ e_{12}(i) &:= \sqrt{[(x_{1,i} - x_{2,i})^2 + (y_{1,i} - y_{2,i})^2]} \end{aligned}$$

$$Ke(i) := \frac{\lambda}{(4 \cdot A(i))} \cdot \begin{bmatrix} (b1(i) \cdot b1(i) + c1(i) \cdot c1(i)) & (b1(i) \cdot b2(i) + c1(i) \cdot c2(i)) & (b1(i) \cdot b3(i) + c1(i) \cdot c3(i)) \\ b1(i) \cdot b2(i) + c1(i) \cdot c2(i) & (b2(i) \cdot b2(i) + c2(i) \cdot c2(i)) & (b2(i) \cdot b3(i) + c2(i) \cdot c3(i)) \\ b1(i) \cdot b3(i) + c1(i) \cdot c3(i) & (b2(i) \cdot b3(i) + c2(i) \cdot c3(i)) & (b3(i) \cdot b3(i) + c3(i) \cdot c3(i)) \end{bmatrix} ..$$

$$+ h_{23i} \cdot \frac{e_{23}(i)}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + h_{31i} \cdot \frac{e_{31}(i)}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + h_{12i} \cdot \frac{e_{12}(i)}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначення матриць навантаження для елементів і сумарної матриці навантажень

$$f1 := h \cdot T1c \cdot \frac{e31(1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f8 := h \cdot T2c \cdot \frac{e31(1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f7 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матриця індексів $mi :=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \\ 7 & 10 & 8 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Сумарна матриця теплопровідності

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0 \quad p := 1..3 \quad q := 1..3$$

$$K_{(mi_i,p, mi_i,q)} := K_{(mi_i,p, mi_i,q)} + Ke(i)_{p,q}$$

Сумарна матриця навантажень

$$f(i) := (if(i = 1, f1, if(i = 2, f2, if(i = 3, f3, if(i = 4, f4, if(i = 5, f5, if(i = 6, f6, if(i = 7, f7, if(i = 8, f8, 0))))))))))$$

$$F_{\max(mi)} := 0 \quad F_{(mi_i,p)} := F_{(mi_i,p)} + f(i)_p$$

Розв'язок відносно вузлових температур

$$U := K^{-1} \cdot F$$

Середня температура в елементах

$$ii := 1..5$$

$$U_{Cii} := \frac{(U_{2 \cdot ii} + U_{2 \cdot ii - 1})}{2} \quad U_C = \begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 240 \\ 280 \\ 320 \end{pmatrix}$$

	1
1	160
2	160
3	200
4	200
5	240
6	240
7	280
8	280
9	320
10	320

11.3. Температурні деформації і напруження в стержнях

При наявності відомого температурного поля за допомогою МСЕ можна розрахувати розподілення напружень в об'ємі конструкції. Як відомо, температурні напруження виникають при нерівномірному нагріванні об'єму або у статично-невизначуваних конструкціях. Залежність між напруженнями і деформаціями матиме вигляд

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (11.66)$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ обумовлений температурною деформацією

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left(\alpha^\circ T \quad \alpha^\circ T \quad \alpha^\circ T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T. \quad (11.67)$$

Підставимо напруження (11.66) у рівняння принципу можливих переміщень

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS. \quad (10.68)$$

Одержимо

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV. \quad (10.69)$$

Використовуючи далі залежності між векторами деформацій і вузлових переміщень

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (10.71)$$

вектор вузлових сил запишемо у вигляді

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV. \quad (10.72)$$

Для стержня матриця \mathbf{B} має вигляд

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.73)$$

Компоненти вектора сил від нагрівання

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV = EA \alpha^\circ T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.74)$$

Методика розрахунку стержневих конструкцій, які працюють на розтяг-стиск, залишається незмінною, змінюються тільки елементи вектора навантажень \mathbf{F} згідно з (11.72), (11.74).

Аналогічно визначаються вузлові сили при нагріванні більш складних конструкцій.

Розглянемо приклад визначення деформації стержня, нерівномірно нагрітого по товщині. Температура змінюється згідно із залежністю

$$T(z) = T_0 + T_1 z \frac{2}{h},$$

де h – висота перерізу, T_0 і T_1 – відомі коефіцієнти: T_0 – значення температури на нейтральній лінії стержня, $T_0 + T_1$ – на зовнішній (верхній і нижній) поверхнях.

Вектор температурних сил для елемента стержня, який працює на згин, має вигляд

$$F = \int_V -z \begin{pmatrix} \frac{1}{l^2} \left(-6 + 12 \frac{x}{l} \right) \\ \frac{1}{l} \left(4 - 6 \frac{x}{l} \right) \\ \frac{1}{l^2} \left(6 - 12 \frac{x}{l} \right) \\ \frac{1}{l} \left(2 - 6 \frac{x}{l} \right) \end{pmatrix} E \left(\alpha^\circ T_0 + \alpha^\circ T_1 \frac{2}{h} z \right) dx = -\alpha^\circ T_1 \frac{2}{h} EI \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Як видно, нерівномірне нагрівання приводить також до появи додаткових вузлових згинаючих моментів. Ці додаткові сили необхідно враховувати у розрахунку переміщень стержня згідно з типовою методикою використання методу скінченних елементів.

РОЗДІЛ 12

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МСЕ

12.1. Поняття про метод суперелементів

Виняткова ефективність методу скінченних елементів при моделюванні конструкцій створює ілюзію його універсальності і необмеженості можливостей. Дійсно, конструкцію довільної складності можна скласти з простіших, типових елементів, побудувавши таким чином скінченно-елементну модель. Однак, зі збільшенням кількості елементів зростають об'єми вхідної інформації, розміри матриць жорсткості і мас, що приводить часто до неможливості одержання розв'язків або у зв'язку з суттєвим збільшенням часу розв'язання задачі, або з причини недостатньої потужності обчислювальної техніки. Не на останньому місці серед труднощів, які при цьому виникають, є і збільшення похибок розв'язку систем рівнянь великої розмірності.

Усе це привело до необхідності введення різних модифікацій методу скінченних елементів, серед яких найбільш ефективною виявилась модифікація, названа методом скінченних суперелементів (МССЕ). Ідея методу така ж проста, як і ідея базового МСЕ [19]. Послідовність побудови суперелементної моделі для деякої конструкції наведено на рис. 12.1.

Конструкцію (рис. 12.1, *a*) розділяють на підконструкції (рис. 12.1, *б*), які, у свою чергу, розділяються на менші (рис. 12.1, *в*) і т.д. до нижнього рівня, за який приймаються типові скінченні елементи з відомими матрицями жорсткості і навантажень.

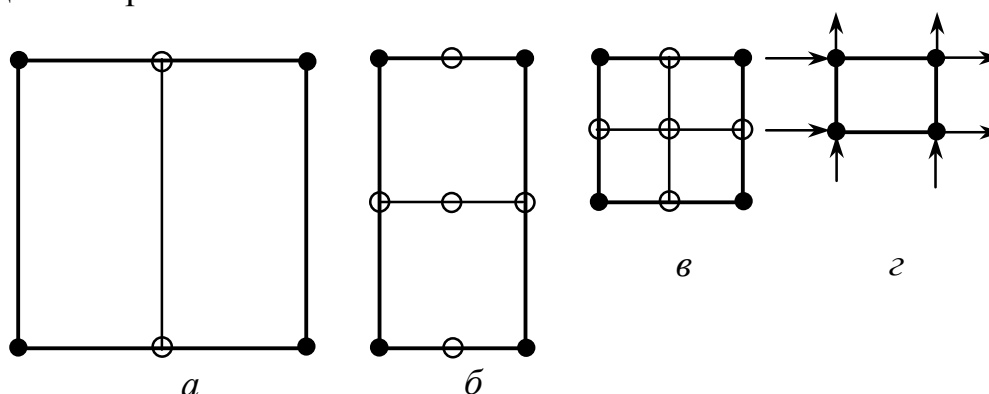


Рис. 12.1. Побудова суперелементної моделі: конструкція – 4 рівень (*a*); суперелемент – 3 рівень (*б*); суперелемент – 2 рівень (*в*); скінченний елемент – 1 рівень (*г*)

При розділенні на підконструкції враховують особливості форми, навантаження, структури конструкції, можливості обчислювальної техніки, яка використовується, тощо.

У загальному випадку не можна дати рецепт правильного розділення на підконструкції. Цей процес, як і побудова розрахункової схеми для довільної конструкції, є до деякої міри мистецтвом і залежить від рівня фундаментальної та інженерної підготовки фахівця.

Практика розрахунків підказує декілька рекомендацій щодо застосування методу суперелементів:

1) підконструкції на кожному етапі повинні розбиватися на типові елементи;

2) розміри підконструкцій повинні дозволяти формування і обробку матриць жорсткості на ЕОМ, які використовуються;

3) кількість рівнів визначається з порівняння трудомісткості розрахунку для декількох можливих варіантів;

4) кількість типів елементів першого рівня повинна бути якомога меншою.

Після умовного розділення конструкції на суперелементи переходять до одержання матриць жорсткості елементів на кожному з рівнів, поступово переходячи від нижніх рівнів до верхніх. При цьому враховуються умови об'єднання, які у варіанті методу переміщень зводяться до прирівнювання переміщень у спільних вузлах підконструкцій, що об'єднуються.

Тут необхідно зробити одне суттєве зауваження, яке, власне, і пояснює термін “суперелемент”. При переході від нижчих рівнів до вищих і об'єднанні підконструкцій кількість узагальнених координат конструкції в цілому не зменшується в порівнянні з їх кількістю при безпосередньому розділенні конструкції на елементи нижчого рівня. У зв'язку з цим здається незрозумілим, у чому ж полягають переваги розділення на підконструкції. Основною складовою алгоритму методу суперелементів є виключення частини узагальнених координат для підконструкцій на кожному рівні. Модель підконструкції, одержана після виключення деяких узагальнених координат, і є, власне, суперелементом. Як правило, виключають координати, пов'язані з переміщеннями внутрішніх вузлів, залишаючи необхідну кількість вузлових переміщень для об'єднання суперелементів на наступному етапі і виконання умов закріплення, а також умов навантаження.

Розмірність матриць на кожному етапі змінюється несуттєво, але збільшується кількість операцій визначення їх елементів. Саме ці два фактори визначають схему розділення на підконструкції-суперелементи.

Припустимо, що на деякому етапі для підконструкції можна виділити “внутрішні” і “зовнішні” вузли і відповідні переміщення (на рис. 12.1 “внутрішні” вузли зображені кружечками, а “зовнішні” – чорними

крапками^{*)}). Тоді матрицю жорсткості, навантажень і переміщень суперелемента можна розділити на блочні матриці

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rs} \\ \mathbf{K}_{sr} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (12.1)$$

Система рівнянь для такого елемента

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rs} \\ \mathbf{K}_{sr} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

Виключимо в (12.2) координати \mathbf{q}_s (“внутрішні”)

$$\left(\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rs} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sr} \right) \mathbf{q}_r = \mathbf{F}_r, \quad (12.3)$$

або

$$\mathbf{K}_p \mathbf{q}_r = \mathbf{F}_r.$$

Одержану редуційовану матрицю \mathbf{K}_p можна записати за допомогою матриці перетворень

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \quad (12.4)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sr} \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

Для багаторівневої схеми формула (12.4) застосовується для кожного рівня. Послідовність визначення матриць жорсткості від нижнього рівня до конструкції у цілому має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p^{(1)} &= \mathbf{T}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{T}_1, \\ \mathbf{K}_p^{(2)} &= \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{K}_p^{(n)} &= \mathbf{T}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{T}_n, \end{aligned} \quad (12.6)$$

де $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$ – матриці жорсткості підконструкцій на кожному з рівнів синтезу;

$\mathbf{K}_p^{(1)}, \mathbf{K}_p^{(2)}, \dots, \mathbf{K}_p^{(n)}$ – редуційовані матриці жорсткості підконструкцій – суперелементів на кожному з рівнів синтезу.

Наведена (редуційована) матриця конструкції $\mathbf{K}_p^{(n)}$ зберігає всі властивості повної скінченно-елементної моделі, хоча, на відміну від останньої, є більш заповненою і не завжди явно стрічковою.

^{*)} У дійсності “зовнішні” – це вузли, які залишаються, а “внутрішні” – які виключаються. Як видно з рис. 12.1, “внутрішніми” можуть бути і вузли на границях елементів. Як правило, навантаження у “внутрішніх” вузлах відсутне.

Значно складнішою є побудова суперелементів у задачах динаміки конструкцій. Іноді використовують матрицю перетворень \mathbf{T} і для одержання редуційованої матриці мас, однак одержана таким чином матриця мас є наближеною і не відображає правильно інерційні властивості конструкції.

Коректну редукцію матриць суперелементів для задач динаміки можна виконати, записуючи рівняння динаміки у просторі перетворень Фур'є [5]. При цьому редукція, проведена для матриці динамічної жорсткості

$$\mathbf{Z}(i\omega) = \mathbf{K}(i\omega) + (i\omega)^2 \mathbf{M} \quad (12.7)$$

за схемою, наведеною вище, дозволяє зберегти всі інерційні властивості конструкції.

Найбільш повно методика суперелементного підходу описується у роботах [18, 19].

12.2. Джерела похибок

Дослідження точності наближеного розв'язку складається з вивчення джерел похибок, аналізу величин похибок, умов збіжності і швидкості збіжності.

Похибка розв'язку складається з похибок, які не можна усунути, похибок, пов'язаних із методом, і похибок обчислення.

Похибки, які не можна усунути, виникають внаслідок невідповідності розрахункової схеми і конструкції. Цю невідповідність обумовлено неточністю вхідних даних, а також спрощеннями, які вносяться при побудові розрахункової схеми. Ці похибки не контролюються у процесі чисельного розв'язку і можуть бути зменшені тільки за рахунок більш точного описання конструкції.

Похибки математичної моделі МСЕ (похибки методу) виникають внаслідок апроксимації розшукуваних функцій наближеними виразами. У МСЕ функції апроксимації (координатні функції) є локально визначеними, і тому похибки методу залежать як від якісної відповідності координатних функцій розшукуваного розв'язку, так і від розмірів елементів. Якість координатних функцій оцінюється за повнотою координатних функцій і виконанням умов сумісності для сусідніх скінченних елементів на їх спільних границях. Для МСЕ у варіанті методу переміщень доведено, що при зменшенні кроку сітки в області, зайнятій тілом, збіжність розв'язку МСЕ до точного можна гарантувати тільки у тому випадку, якщо набір координатних функцій буде повним, а самі вони забезпечують виконання умов сумісності для суміжних скінченних елементів.

Похибки обчислень складаються з похибок округлення при арифметичних діях зі скінченною кількістю розрядів. Похибки зростають

зі збільшенням розмірності задачі у зв'язку зі збільшенням кількості арифметичних дій.

Вплив похибок округлення на похибки обчислень суттєво залежить від обумовленості системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зводиться розв'язок у МСЕ. Ці похибки обумовлюються такими причинами:

1) наявність похибок, які не можуть бути усунутими, у зв'язку з чим замість системи $\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{F}$ розв'язується система $(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{U} = \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}$, де $\Delta\mathbf{K}$ і $\Delta\mathbf{F}$ – похибки при визначенні матриць \mathbf{K} і \mathbf{F} ;

2) похибки округлення чисел при виконанні алгебраїчних дій на ЕОМ.

Вплив цих джерел похибок залежить від такої фундаментальної властивості матриці \mathbf{K} , як обумовленість. Мірою обумовленості матриці є число обумовленості, яке визначається як відношення $C(\mathbf{K}) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$, де λ_{\max} і λ_{\min} – відповідно найбільше і найменше власні числа матриці \mathbf{K} , які визначаються з характеристичного рівняння

$$|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E}| = 0.$$

Якщо $\lambda_{\min} = 0$ і $C(\mathbf{K}) = \infty$, то матриця є виродженою. Чим більше число обумовленості, тим гірша обумовленість матриці \mathbf{K} .

Роль числа обумовленості можна проілюструвати таким прикладом [40]. Розглянемо дві системи, які відрізняються на величини, пов'язані з наявністю похибок

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{U} = (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}).$$

Для невиродженої матриці \mathbf{K} має місце відношення

$$\frac{\|\Delta\mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|} < C(\mathbf{K}) \frac{\|\Delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|},$$

де $\frac{\|\Delta\mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|}$ – відносна похибка у розв'язку, обумовлена наявністю похибок

($\|\dots\|$ – норма вектора або матриці).

Нерівність показує, що число обумовленості є коефіцієнтом пропорційності у виразі для відносної похибки розв'язку. Чим більше $C(\mathbf{K})$, тим більше зростає похибка, обумовлена похибками визначення матриць.

Аналогічно впливає число обумовленості на зростання похибки, пов'язаної з округленням чисел у ЕОМ. Відносна похибка може бути визначена згідно із залежністю

$$\delta \approx 10^{-S} \cdot C(\mathbf{K}),$$

де S – число десяткових цифр у відповідності з розрядною сіткою ЕОМ.

У МСЕ число обумовленості можна зв'язати з параметрами сітки. При нерівномірній сітці

$$C(\mathbf{K}) = A \left(\frac{a}{l} \right)^{-2m},$$

де A – число, яке залежить від степеня p апроксимуючого полінома;

a, l – характерні розміри елемента і конструкції;

m – порядок вищої похідної у варіаційному рівнянні задачі.

Таким чином, задачі більш високого порядку більш чутливі до числа обумовленості.

Зменшення кроку сітки скінченних елементів, тобто відношення $\frac{a}{l}$,

приводить до зменшення похибки методу, але збільшує похибку обчислень, тому у практичних розрахунках сітки необхідно вибирати на основі компромісного рішення.

Існує зв'язок між числом обумовленості та формою скінченного елемента. Наприклад, при зменшенні кута у трикутних скінченних елементах обумовленість значно погіршується. Таким чином, необхідно уникати таких варіантів сітки, в яких з'являються скінченні елементи з малим гострим кутом або з одним розміром, значно більшим за інші габаритні розміри (у плоских і об'ємних елементах).

12.3. Збіжність методу скінченних елементів

Теоретична збіжність розв'язку до точного визначається похибками методу. Важливою характеристикою є також швидкість збіжності. Якщо швидкість збіжності висока, то хороші результати можна одержати на достатньо грубій сітці.

Як вказувалося вище, метод скінченних елементів у переміщеннях є варіантом методу Рітца зі специфічними (локальними) координатними функціями.

Збіжність методу Рітца вивчена з достатньою повнотою, і ці результати можна поширити і на метод скінченних елементів.

Будемо вважати, що номер наближення пов'язано з числом скінченних елементів. Тоді зі збільшенням номера наближення крок сітки зменшується. Граничним варіантом скінченно-елементної моделі буде такий, у якому число скінченних елементів, рівномірно розподілених по області тіла, безмежно зростає.

Розв'язок МСЕ збігається до точного, якщо виконуються такі умови:

1. На спільних границях суміжних елементів координатні функції повинні забезпечувати неперервність функції переміщень і усіх її похідних, порядок яких хоча б на одиницю менше порядку старших похідних, які входять у варіаційне рівняння задачі. Цією умовою встановлюються необхідні вимоги до гладкості координатних функцій у відповідності з принципом можливих переміщень.

Наприклад, у задачах теорії пружності варіаційне рівняння разом із функцією переміщень вміщує її перші похідні. Координатні функції у цьому випадку повинні забезпечувати тільки неперервність самих функцій. Перші похідні при цьому матимуть розриви першого роду. У задачах згину пластин у варіаційне рівняння входять другі похідні від переміщень. У цьому випадку необхідною є неперервність переміщень і перших похідних.

Взагалі, для задач, що описуються рівняннями $2m$ порядку, варіаційне рівняння вміщує похідні m порядку, і розв'язок необхідно шукати у класі функцій, що забезпечують на границях скінченних елементів неперервність похідних до $m-1$ порядку включно. Скінченні елементи, для яких виконується ця вимога, називають сумісними. В інших випадках маємо несумісні елементи.

2. Координатні функції повинні забезпечувати як переміщення елемента як твердого тіла, так і сталу по об'єму деформацію. Стала частина деформації є основним компонентом поля деформацій, – при зменшенні розмірів елементів змінна частина деформації (тобто залежна від координат) у межах елемента зменшується порівняно із сталою складовою. Ця умова відображає властивість координатних функцій створювати повну систему функцій. Умову повноти системи функцій задовольняють, зокрема, функції у вигляді повних поліномів відповідного степеня.

Для оцінки збіжності встановлено залежність похибки розв'язку від характерних параметрів задачі та її скінченно-елементної моделі. Нехай для координатних функцій використовується повний поліном степеня p . Тоді, згідно з теоремою Тейлора [38], похибка апроксимації функції

переміщень є пропорційною величині $\left(\frac{a}{l}\right)^{p+1}$, де a – характерний розмір –

крок сітки, l – характерний розмір тіла. Якщо диференціальні рівняння мають порядок $2m$, вираз для енергії деформації і, відповідно, варіаційне рівняння вміщують похідні m порядку. Ці похідні апроксимуються вже з

похибкою, пропорційною величині $\left(\frac{a}{l}\right)^{p+1-m}$. Оскільки у вирази для

енергії входять квадрати похідних (див. розд. 2), похибка у визначенні енергії, а значить і усього розв'язку, дорівнює

$$\delta = k \left(\frac{a}{l}\right)^{2(p+1-m)},$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Звідси випливає, що швидкість збіжності залежить від параметра p .

Оскільки $\left(\frac{a}{l}\right) < 1$, то чим більше p , тим вище швидкість збіжності. При вибраному параметрі p точність розв'язку регулюється за допомогою кроку сітки. Зменшуючи крок сітки, можна досягнути необхідної точності.

3. Ще однією умовою збіжності є умова геометричної апроксимації змінної на елементі при ортогональних перетвореннях системи координат. Геометрична інваріантність або геометрична ізотропія є гарантією повноти поліноміальної апроксимації вздовж границь скінченного елемента того ж порядку, що й у самому елементі.

Ця вимога є суттєвою при використанні переходу від локальної до глобальної системи координат, зокрема при використанні ізопараметричних елементів.

Якщо пробною функцією є повний поліном, то елемент відповідає геометричній ізотропії. Якщо деякі члени виключаються, то це необхідно робити так, щоб не порушувалась геометрична ізотропія. Зокрема, можна відкидати симетричні пари змінних, наприклад, x^3 і y^3 , x^5y^2 і x^2y^5 , не зменшуючи порядок полінома.

12.4. Програмна реалізація МСЕ

Програми МСЕ можуть мати різне призначення: від програм, що виконують порівняно прості розрахунки елементів конструкцій з невеликою кількістю невідомих, до універсальних програмних комплексів із потужним програмним забезпеченням усіх етапів алгоритму МСЕ. Саме різноманітність задач, де використовується МСЕ, привела до появи універсальних програмних комплексів із бібліотеками скінчених елементів (як правило, кількість елементів у бібліотеках перевищує 50), можливістю розв'язання рівнянь із декількома десятками тисяч невідомих, розвиненим графічним інтерфейсом для введення даних і одержання результатів.

До найбільш відомих необхідно віднести програмні комплекси NASTRAN (NASA, Лос-Анджелес, США), ANSYS (Х'юстонський науково-дослідний центр, США), ADINA (Масачусетський технологічний інститут), ASKA (Штутгартський університет), КАСКАД-2 (Кораблебудівний інститут, Санкт-Петербург), СУМПАК (Інженерно-будівельний інститут, м. Казань), Термоупругопластичність (Київський політехнічний інститут), ПРОЧНОСТЬ (Київський інженерно-будівельний інститут) та ін.

Усі ці системи призначені для автоматизації інженерного аналізу (CAE – Computer Aids Engineering), на відміну від систем автоматичного проектування (CAD – Computer Aids Design) і автоматизації виробництва (CAM – Computer Aids Manufacturing).

Такі CAD/CAM системи як AutoCAD, PRO/Engineer, Solids Works широко використовуються для комп'ютерного моделювання виробів складної форми з випуском креслень і генерацією управляючих програм для верстатів з ЧПК. Однак ці пакети не мають розвинених засобів інженерного аналізу. CAE-системи інженерного аналізу, вказані вище, дозволяють, окрім моделювання систем різної фізичної природи, ще й

дослідити реакцію цих систем на зовнішні збурення у вигляді розподілення напружень, температур, швидкостей, електромагнітних полів тощо.

Одним із найбільш поширених комплексів є система ANSYS, що використовує метод скінченних елементів. У значній мірі це пов'язано з діяльністю фірми CAD-FEM GmbH, яка займається розвитком, продажем і технічним супроводженням спеціалізованого програмного забезпечення в області сучасних автоматизованих комп'ютерних технологій – CAE-систем ANSYS, LS-DINA, STAR-CD, ADAMS, CAD/x та інших.

Система ANSYS використовується у багатьох зарубіжних університетах та фірмах. Вона є рекомендованою Науково-методичною Радою Міністерства РФ за напрямком “Прикладна механіка” як основа для використання в учбовому процесі підготовки бакалаврів, магістрів науково-технічного напрямку.

Сукупність програмних засобів фірми ANSYS складається з окремих багатоцільових розрахункових пакетів, які призначені для розв'язання широкого кола інженерних задач.

Флагманський пакет ANSYS/Multiphysics є найбільш потужним, багатоцільовим продуктом, який дозволяє виконувати розрахунки не тільки у таких окремих областях, як міцність, розповсюдження тепла, механіка рідин і газів та електромагнетизм, але і розв'язку зв'язаних задач.

ANSYS/Mechanical надає широкі можливості для виконання проектних розробок, аналізу й оптимізації: розв'язок складних задач міцності, теплопередачі і акустики. Програма є потужним інструментом для визначення переміщень і напружень, зусиль, температур та інших важливих параметрів.

ANSYS/Structural виконує складний аналіз конструкцій з урахуванням нелінійностей, серед яких геометрична і фізична нелінійності, стійкість.

ANSYS/Linear Plus – варіант пакета ANSYS/Mechanical для розв'язку задач лінійної статичної, динамічної і стійкості.

ANSYS/Thermal – програма, що відокремилась від ANSYS і призначена для розв'язку теплових стаціонарних і нестаціонарних задач.

ANSYS/Prep Post забезпечує швидку і зручну побудову скінченно-елементних моделей.

ANSYS/ED – варіант програми ANSYS/Multiphysics, який має обмеження за розмірами моделі.

Автономними програмами фірми ANSYS є такі:

ANSYS/FLOTRAN – програма для розв'язку задач обчислювальної гідроаеродинаміки.

ANSYS/Emag – пакет для числового моделювання електромагнітного поля і розв'язку задач, пов'язаних з електрикою і магнетизмом.

ANSYS/LS-DINA – пакет, призначений для розв'язку задач динаміки при великих нелінійностях. Може використовуватись для моделювання

процесів формування матеріалів, аналізу аварійних зіткнень і ударів при великих деформаціях.

ANSYS/ LS-DINA Prep Post забезпечує пре- і постпроцесорну обробку даних для основного пакета ANSYS/ LS-DINA.

Крім програмного комплексу ANSYS необхідно відмітити FEMLAB – універсальний програмний комплекс для моделювання за допомогою методу скінченних елементів фізичних процесів, які описуються диференційними рівняннями у частинних похідних. FEMLAB може бути встановлений також як додаток до програми MATLAB.

Останнім часом набуває поширення CAD/CAE система APM WinMachine.

APM WinMachine вміщує сучасні ефективні і надійні алгоритми і програми для розрахунку:

- міцності, жорсткості й стійкості елементів конструкцій і машин;
- витривалості при змінних режимах навантаження;
- динамічних характеристик і кінематичних параметрів;
- вірогідності, надійності та зносостійкості.

Комплекс APM WinMachine складається з 17 модулів, серед яких:

APM WinTruss – модуль розрахунку і проектування плоских ферм методом скінченних елементів;

APM WinFEM2D – модуль розрахунку напружено-деформованого стану плоских деталей;

APM WinFEM3D – модуль розрахунку і проектування пластинчастих, оболонкових і стержневих конструкцій;

APM WinMachine призначена для персональних комп'ютерів і працює у середовищі Microsoft Windows-98, ...,XP.

Зазначимо, що намагання створити універсальні комплекси привело до їх суттєвого ускладнення. Підтвердженням цього є поява професії консультанта з прикладних програм. Однак, можливості цих комплексів, які розробляються великими колективами програмістів, інженерів, математиків, і недосяжні для програм індивідуальної розробки, свідчать про необхідність їх появи в арсеналі інструментальних засобів інженера-механіка сучасного рівня. У першу чергу, для того, щоб освоїти ці програми, які у більшості випадків працюють за принципом „чорного ящика”, необхідно зрозуміти алгоритм методу скінченних елементів, для чого і призначений даний посібник.

ДОДАТОК А

ВБУДОВАНІ ОПЕРАТОРИ І ФУНКЦІЇ MathCAD

Таблиця А.1. Арифметичні оператори

Оператор	Клавіші	Скаляр	Вектор	Матриця
$\mathbf{a} := \mathbf{b}$	<:=>	Присвоювання		
$\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$	<~>	Глобальне присвоювання		
$\mathbf{a} = \mathbf{b}$	<=>	Чисельне виведення		
$\mathbf{a} = \mathbf{b}$	<Ctrl>+<=>	Символьне виведення		
$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	<+>	Додавання		
$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	<->	Віднімання		
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	<*>	Множення	Матричне множення, множення на скаляр	
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	<Ctrl>+<8>		Скалярний добуток	
$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$	</> або <Ctrl>+</>	Ділення		
$\mathbf{a}!$	<!>	Факторіал		
$\sqrt{\mathbf{a}}$	<\>	Квадратний корінь		
$\sqrt[n]{\mathbf{a}}$	<Ctrl>+<\>	Корінь n-го степеня		
(\mathbf{a})	<'>	Дужки (зміна пріоритету)		
\mathbf{a}_i	<[>		Нижній індекс	
\mathbf{a}^T	<Ctrl>+<1>		Транспонування	
$ \mathbf{a} $	<Shift>+<\>	Модуль	Модуль вектора	Визначник матриці
$\sum \mathbf{a}$	<Ctrl>+<4>		Сума елементів	
\mathbf{a}^{-1}		Обернена величина		Обернена матриця
\mathbf{a}^n	<Shift>+<6>	Піднесення до степеня		Піднесення матриці до степеня
\vec{nnn}	<Ctrl>+<->		Векторизація	

Таблиця А.2. Обчислювальні оператори

Оператор	Клавіші	Описання
$\langle \rangle$	<Ctrl> + <6>	Виділення стовпця
$\int \cdot d\cdot$	<Shift> + <7>	Визначений інтеграл
$\int \cdot d\cdot$	<Ctrl> + <I>	Невизначений інтеграл
$\frac{d}{d\cdot}$	<?>	Диференціювання
$\frac{d^n}{d\cdot^n}$	<Ctrl> + <?>	Обчислення n -ї похідної
$\sum_{\cdot=\cdot}$	<Ctrl> + <Shift> + <4>	Сума
\sum_{\cdot}	<Shift> + <4>	Сума ранжированої змінної
$\prod_{\cdot=\cdot}$	<Ctrl> + <Shift > + <3>	Добуток
\prod_{\cdot}	<Shift> + <3>	Добуток ранжированої змінної
$\lim_{\cdot \rightarrow \cdot}$	<Ctrl> + <L>	Границя

Таблиця А.3. Вбудовані функції за алфавітом

Функція	Позначення	Операція
$a^*(z)$	z – аргумент	Обернена тригонометрична або гіперболічна функція *
$Ai(x)$	x – аргумент	Функція Ейрі першого роду
$angle(x,y)$	x, y – координати точки	Кут між точкою і віссю Ox

APPENDPRN(file)	file – шлях до файлу	Дозапис даних в існуючий текстовий файл
arg(z)	z – аргумент функції	Аргумент комплексного числа
atan2(x,y)	x, y – координати точки	Кут, який відрховується від осі OX до точки (x, y)
Augment(A,B,C,...)	A, B, C,... – вектори або матриці	Об'єднання матриць зліва направо
bei(n,x) ber(n,x)	n – порядок x – аргумент	Уявна і дійсна частини функції Бесселя-Кельвіна
Bi(x)	x – аргумент	Функція Ейрі другого роду
bspline(x,y,u,n)	x, y – вектори даних u – вектор значень вузлів В-сплайнів n – порядок поліномів	Вектор коефіцієнтів В-сплайну
Bulstoer(y0,t0,t1 M,D)	Див. rkfixed	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Булірша-Штера
bulstoer(y0,t0,t1,acc,D, k,s)	Див. rkadapt	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Булірша-Штера (для визначення тільки останньої точки інтервалу)
Bvalfit(z1,z2,x0,x1,xf,D, load1,load2,score)	z1, z2 – вектор початкових значень відсутніх лівих и правих граничних умов x0 – ліва границя x1 – права границя xf – внутрішня точка D(x, y) – векторна функція, яка задає систему ЗДР load1(x0,z), load2(x1,z) – векторні функції, які задають ліві и праві граничні умови score(xf, y) – векторна функція, яка задає розв'язок у проміжній точці xf	Повертає вектор відсутніх граничних умов у крайовій задачі для системи N ЗДР з додатковою умовою у проміжній точці
ceil(x)	x – аргумент	Найменше ціле, не менше x
cfft(y) CFFT(y)	y – вектор даних	Вектор прямого комплексного перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
cholesky(A)	A – квадратна визначена матриця	Розкладення Холецького
cols(A)	A – матриця або вектор	Число стовпців

<code>concat(S1,S2,...)</code>	$S1, S2, \dots$ – рядки	Об'єднання рядкових змінних
<code>cond1(A)</code> <code>cond2(A)</code> <code>conde(A)</code> <code>condi(A)</code>	A – квадратна матриця	Числа обумовленості в різних нормах ($L1, L2$, Евклідова, ∞)
<code>cos(z)</code>	z – аргумент	Косинус
<code>cosh(z)</code>	z – аргумент	Гіперболічний косинус
<code>cot(z)</code>	z – аргумент	Котангенс
<code>coth(z)</code>	z – аргумент	Гіперболічний котангенс
<code>csort(A,i)</code>	A – матриця i – індекс стовпця	Сортування рядків матриці за елементами 1-го стовпця
<code>CreateMesh(F,s0,s1,t0,t1, sgr,tgr,fmap)</code>	$F(s, t)$ – функція двох трьохелементних векторів $t0, t1$ – границі t $s0, s1$ – границі s tgr, sgr – число точок сітки по t і s $fmap$ – функція перетворення координат	Створення вкладеного масиву, який представляє x -, y - і z -координати параметричної поверхні, заданої функцією F
<code>CreateSpace(F,t0,t1, tgr, fmap)</code>	$F(t)$ – функція двох трьохелементних векторів $t0, t1$ – границі t tgr – число точок сітки по t $fmap$ – функція перетворення координат	Створення вкладеного масиву, який представляє x -, y - і z -координати параметричної просторової кривої, заданої функцією F
<code>csc(z)</code>	z – аргумент	Косеканс
<code>csch(z)</code>	z – аргумент	Гіперболічний косеканс
<code>csgn(z)</code>	z – аргумент	Комплексний знак числа
<code>cspline(x,y)</code>	x, y – вектори даних	Вектор коефіцієнтів кубічного сплайну
<code>cyl2xyz(r,θ,z)</code>	r, θ, z – циліндричні координати	Перетворення циліндричних координат у прямокутні
<code>D*(x,par)</code>	x – значення випадкової величини par – список параметрів розподілу *	Густина розподілу ймовірності зі статистикою розподілу*
<code>diag(v)</code>	v – вектор	Діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться елементи вектора
<code>eigenvals(A)</code>	A – квадратна матриця	Власні значення матриці
<code>eigenvec(A,z)</code>	A – квадратна матриця z – власне значення	Власний вектор матриці, який відповідає заданому власному значенню
<code>eigenvecs(A)</code>	A – квадратна матриця	Власні вектори матриці

$\text{erf}(x)$	x – аргумент	Функція помилок
$\text{erfc}(x)$	x – аргумент	Обернена функція помилок
$\text{error}(S)$	S – рядок	Повертає рядок S як повідомлення про помилку
$\text{exp}(z)$	z – аргумент	Експонента у степені z
$\text{expfit}(x,y,g)$	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень a, b, c	Експоненціальна регресія $a \cdot e^{bx+c}$
$\text{fft}(y)$ $\text{FFT}(y)$	y – вектор даних	Вектор прямого перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
$\text{fhyper}(a,b,c,x)$	a, b, c – параметри x – аргумент, $-1 < x < 1$	Гаусова гіпергеометрична функція
$\text{Find}(x_1, x_2, \dots)$	x_1, x_2, \dots – змінні	Повертає корінь алгебраїчного рівняння (скаляр) або системи (вектор), визначених у блоці з Given
$\text{floor}(x)$	x – аргумент	Найбільше ціле число, яке не перевищує x
$\text{Gamma}(x)$ $\text{Gamma}(a,x)$	x – аргумент	Гамма-функція Ейлера або неповна гамма-функція порядку a
$\text{genfit}(x,y,g,G)$	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень параметрів регресії $G(x, C)$ – векторна функція, яка складена з функції користувача і її частинних похідних за кожним параметром	Вектор коефіцієнтів регресії функціями користувача загального виду
$\text{geninv}(A)$	A – матриця	Створення оберненої матриці
$\text{genvals}(A,B)$	A, B – квадратні матриці	Розрахунок узагальнених власних значень
$\text{genvecs}(A,B)$	A, B – квадратні матриці	Розрахунок узагальнених власних векторів
Given		Ключове слово для введення систем рівнянь, нерівностей тощо
$\text{heaviside step}(x)$	x – аргумент	Функція Хевісайда
$\text{Her}(n,x)$	x – аргумент n – порядок	Поліном Ерміта
$\text{I0}(x)$ $\text{I1}(x)$ $\text{In}(m,x)$	x – аргумент	Модифікована функція Бесселя першого роду нульового, першого і n -го порядку

ibeta (a, x,y)	x, y – аргументи a – параметр	Неповна бета-функція
identity (N)	N – розмір матриці	Створення одиничної матриці
icfft (v) ICFFT(v)	v – вектор частотних даних Фур'є-спектра	Вектор комплексного оберненого перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
if (cond,x,y)	cond – логічна умова x, y – значення, які повертаються, якщо умова правильна (хибна)	Функція умови
iff(v) IFFT(v)	v – вектор частотних даних Фур'є-спектра	Вектор оберненого перетворення Фур'є (з різною нормалізацією)
IsString(x)	x – аргумент	Повертає 1, якщо x – рядок, і 0 в інших випадках
iwave (v)	v – вектор частотних даних вейвлет-спектра	Вектор оберненого вейвлет-перетворення
Im(z)	z – аргумент	Уявна частина комплексного числа
interp (s,x,y,t)	s – вектор других похідних x, y – вектори даних t – аргумент	Сплайн-інтерполяція
intercept (x,y)	x, y – вектори даних	Коефіцієнт b лінійної регресії b+ax
J0(x) J1(x) Jn(m,x)	x – аргумент	Функція Бесселя першого роду нульового, першого и m-го порядку
Jac(n,a,b,x)	x – аргумент a, b – параметри n – порядок	Поліном Якобі
Is(n,x)	n – порядок x – аргумент	Сферична функція Бесселя першого роду
K0(x) K1(x) Kn(m,x)	x – аргумент	Модифікована функція Бесселя другого роду нульового, першого і m-го порядку
Kronecker delta(x,y)	x, y – аргументи	Дельта-символ Кронекера
ksmooth(x,y,b)	x, y – вектори даних b – ширина вікна згладжування	Згладжування за допомогою функції Гауса
Lag(n,x)	x – аргумент n – порядок	Поліном Лагерра
last(v)	v – вектор	Індекс останнього елемента вектора

Leg(n,x)	x – аргумент n – порядок	Поліном Лежандра
length(v)	v – вектор	Число елементів вектора
line(x,y)	x, y – вектори даних	Вектор із коефіцієнтів лінійної регресії b+ax
linfit(x,y,F)	x, y – вектори даних F(x) – векторна функція користувача	Вектор коефіцієнтів регресії функцією користувача
linterp(x,y,t)	x, y – вектори даних t – аргумент	Кусково-лінійна інтерполяція
lgsfit(x,y,g)	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія логістичною функцією $a/(1+b \cdot e^{-cx})$
ln(z)	z – аргумент	Натуральний логарифм
lnfit(x,y)	x, y – вектори даних	Регресія логарифмічною функцією $a \cdot \ln(x) + b$
loess(x,y,span)	x, y – вектори даних span – параметр розміру поліномів	Вектор коефіцієнтів для регресії відрізками поліномів (використовуються разом з linterp)
log(z)	z – аргумент	Десятковий логарифм
log(z,b)	z – аргумент	Логарифм z за основою b
logfit(x,y,g)	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія логарифмічною функцією $a \cdot \ln(x+b)+c$
lsolve(A,b)	A – матриця СЛАР b – вектор правих частин	Розв'язок системи лінійних рівнянь СЛАР
lspline(x,y)	x, y – вектори даних	Вектор коефіцієнтів лінійного сплайну
lu(A)	A – квадратна матриця	LU- розкладання
matrix(M,N,f)	M – кількість рядків N – кількість стовпців f(i, j) – функція	Створення матриці з елементами f(i, j)
Maximize(f,x1...)	f(x1,...) – функція x1, ... – аргументи, за якими здійснюється максимізація	Вектор значень аргументів, при яких функція f досягає максимуму (можна задати додаткові умови у блоці з Given)
mhyper(a,b,x)	x – аргумент a, b – параметри	Конфлюентна гіпергеометрична функція
Minerr(x1,x2,...)	x1, x2,... – змінні	Повертає вектор наближеного розв'язку системи рівнянь і нерівностей, визначених у блоці з Given

Minimize(f,x1,...)	f (x1,...) – функція x1,... – аргументи, за якими здійснюється мінімізація	Вектор значень аргументів, при яких функція f досягає мінімуму (можна задати додаткові умови у блоці з Given)
medsmooth(y,b)	y – вектор даних b – ширина вікна згладжування	Згладжування за допомогою методу "рухомих медіан"
Multigrid(F,ncycle)	F – матриця правої частини рівняння Пуассона ncycle – розмір матриці розв'язку	Матриця розв'язку рівняння Пуассона у квадратній області з нульовими граничними умовами
n*(M,par)	M – розмірність вектора X – значення випадкової величини par – список параметрів розподілу *	Вектор випадкових чисел зі статистикою*
norm1(A) norm2(A) norme(A) normi(A)	A – квадратна матриця	Норми матриць (L1, L2, Евклідова, ∞)
num2str(z)	z – число	Повертає рядок, в якому символи відповідають десятковому представленню числа z
Odesolve(t,t1,[step])	t – змінна інтегрування ЗДР t1 – кінцева точка інтервалу інтегрування step – число кроків інтегрування ЗДР	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для одного ЗДР, визначеного у блоці з Given і початковими умовами у точці t0
p*(x,par)	x – значення випадкової величини par – список параметрів розподілу *	Функція розподілу зі статистикою *
pdesolve(u,x,xrange,t, trange,[xpts],[tpts])	u – вектор імен функцій x – просторова змінна xrange – інтервал інтегрування за просторовою змінною t – часова змінна trange – інтервал інтегрування за часом xpts – число просторових вузлів сітки tpts – число часових кроків сітки	Повертає скалярну функцію двох аргументів (x, t), які є розв'язком диференціального рівняння (або системи рівнянь) у частинних похідних
pol2xy(r,θ)	r, θ – полярні координати	Перетворення полярних координат у прямокутні

polyroots (v)	v – вектор, складений з коефіцієнтів полінома	Повертає вектор усіх коренів полінома
predict (y,m,n)	y – початковий вектор m – число елементів y, за якими будується екстраполяція n – кількість передбачуваних елементів	Функція передбачення, яка екстраполює вектор
pspline(x,y)	x, y – вектори даних	Вектор коефіцієнтів квадратичного сплайну
pwfit(x,y,g)	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія степеневою функцією $a \cdot x^b + c$
q*(p,par)	p – значення ймовірності par – список параметрів розподілу*	Квантиль (функція, обернена до функції розподілу) зі статистикою *
qr(A)	A – вектор або матриця	QR-розкладення
Radau(y0,t0,t1,M,D)	Див. rkfixed	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом RADAU5
rank(A)	A – матриця	Ранг матриці
Re(z)	z – аргумент	Дійсна частина комплексного числа
READ*(file)	file – шлях до файлу	Запис даних у файл типу *
regress(x,y,k)	x, y – вектори даних k – степінь полінома	Вектор коефіцієнтів для поліноміальної регресії (застосовується разом з interp)
Relax(a,b,c,d,e,F,v,rjac)	a, b, c, d, e – матриці коефіцієнтів різницевої схеми F – матриця правої частини рівняння v – матриця граничних умов rjac – параметр алгоритму (0...1)	Матриця розв'язку методом сіток диференціального рівняння у частинних похідних у квадратній області
reverse(v)	v – вектор	Перестановка елементів вектора в зворотному порядку
Rkadapt(y0,t0,t1 M,D)	Див. rkfixed	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Рунге-Кутти зі змінним кроком
rkadapt(y0,t0,t1,acc,D,k,s)	y0 – вектор початкових умов (t0, t1) – інтервал інтегрування	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Рунге-Кутти зі змінним кроком і заданою

	<p>асс – похибка обчислення</p> <p>$D(t, y)$ – векторна функція, яка задає систему ЗДР</p> <p>k – максимальне число кроків інтегрування</p> <p>s – мінімальний крок інтегрування</p>	<p>точністю (для визначення тільки останньої точки інтервалу)</p>
rkfixed(y0 t0,t1,M,D)	<p>y_0 – вектор початкових умов</p> <p>(t_0, t_1) – інтервал інтегрування</p> <p>M – число кроків інтегрування</p> <p>$D(t, y)$ – векторна функція, яка задає систему ЗДР</p>	<p>Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для системи ЗДР методом Рунге-Кутти з фіксованим кроком</p>
root(f(x,...),x[a,b])	<p>$f(x, \dots)$ – функція</p> <p>x – змінна</p> <p>(a, b) – інтервал пошуку кореня</p>	<p>Повертає корінь функції</p>
round(x,n)	<p>x – аргумент</p> <p>n – число знаків округлення після десяткової точки</p>	<p>Округлення</p>
rows(A)	<p>A – матриця або вектор</p>	<p>Число рядків</p>
rref(A)	<p>A – матриця або вектор</p>	<p>Перетворення матриці до ступінчастого вигляду</p>
rsort(A,i)	<p>A – матриця</p> <p>i – індекс рядка</p>	<p>Сортування матриці за елементами i-го рядка</p>
sbval(z,x0,x1,D,load,score)	<p>z – вектор початкових наближень для відсутніх початкових умов</p> <p>x_0 – ліва границя</p> <p>x_1 – права границя</p> <p>$D(x, y)$ – векторна функція, яка задає систему ЗДР</p> <p>load(x_0, z) – векторна функція з початковими умовами</p> <p>score(x_1, y) – векторна функція, яка задає праві початкові умови</p>	<p>Повертає вектор відсутніх початкових умов для двоточкової крайової задачі для системи ЗДР</p>
search(S,Subs.m)	<p>S – рядок</p> <p>Sub – підрядок</p> <p>m – стартова позиція пошуку</p>	<p>Стартова позиція підрядка у рядку</p>

$\sec(z)$	z – аргумент	Секанс
$\operatorname{sech}(z)$	z – аргумент	Гіперболічний секанс
$\operatorname{sign}(x)$	x – аргумент	Знак числа
$\operatorname{signum}(z)$	z – аргумент	Комплексний знак числа ($Z/ Z $)
$\sin(z)$	z – аргумент	Синус
$\sinh(z)$	z – аргумент	Гіперболічний синус
$\operatorname{sinf}(x,y,g)$	x, y – вектори даних g – вектор початкових значень a, b, c	Регресія синусоїдною функцією $f(x) = a \cdot \sin(x+b) + c$
$\operatorname{slope}(x,y)$	x, y – вектори даних	Коефіцієнт a лінійної регресії $b+ax$
$\operatorname{sort}(v)$	v – вектор	Сортування елементів вектора
$\operatorname{sph2xyz}(r,\theta,\phi)$	r, θ, ϕ – сферичні координати	Перетворення сферичних координат у прямокутні
$\operatorname{stack}(A,B,C,\dots)$	A, B, C, \dots – вектори або матриці	Об'єднання матриць згори вниз
$\operatorname{Stiffb}(y_0,t_0,t_1,M,D,J)$	Див. $\operatorname{rkfixed}$ $J(t, y)$ – матрична функція Якобі для $D(t, y)$	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Булірша-Штера
$\operatorname{stiffb}(y_0,t_0,t_1,\operatorname{acc},D,J,k,s)$	Див. $\operatorname{rkadapt}$ $J(t, y)$ – матрична функція Якобі для $D(t, y)$	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Булірша-Штера (для визначення тільки останньої точки інтервалу)
$\operatorname{StiffR}(y_0,t_0,t_1,M,D,J)$	Див. Stiffb	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Розенброка
$\operatorname{stiffR}(y_0,t_0,t_1,\operatorname{acc},D,J,k,s)$	Див. stiffb	Повертає матрицю з розв'язком задачі Коші для жорсткої системи ЗДР методом Розенброка (для визначення тільки останньої точки інтервалу)
$\operatorname{str2num}(S)$	S – рядок	Перетворення рядкового представлення у дійсне число
$\operatorname{str2vec}(S)$	S – рядок	Перетворення рядкового представлення у вектор ASCII-кодів
$\operatorname{strlen}(S)$	S – рядок	Кількість символів у рядку
$\operatorname{submatrix}(A,ir,jr,ic,jc)$	A – матриця ir, jr – рядки ic, jc – стовпці	Повертає частину матриці, яка знаходиться між ir -, jr -ми рядками і ic -, jc -ми стовпцями

substr(S,m,n)	S – рядок	Підрядок, одержаний з рядка S виділенням n знаків, починаючи з позиції m у рядку
supsmooth(x,y)	x, y – вектори даних	Згладжування за допомогою адаптивного алгоритму
svd(A)	A – дійсна матриця	Сингулярне розвинення
svds(A)	A – дійсна матриця	Вектор, який складається із сингулярних чисел
tan(z)	z – аргумент	Тангенс
tanh(z)	z – аргумент	Гіперболічний тангенс
Tcheb(n,x)	x – аргумент n – порядок	Поліном Чебишова першого роду
tr(A)	A – квадратна матриця	Слід матриці
trunc(x)	x – аргумент	Ціла частина числа
Ucheb(n,x)	x – аргумент n – порядок	Поліном Чебишова другого роду
vec2str(v)	v – вектор ASCII-кодів	Рядкове представлення елементів вектора V
wave(y)	y – вектор даних	Вектор прямого вейвлет-перетворення
WRITE*(file)	file – шлях до файлу	Запис даних у файл типу *
xy2pol(x,y)	x, y – прямокутні координати у площині	Перетворення прямокутних координат у полярні
xyz2cyl(x,y,z)	x, y, z – прямокутні координати	Перетворення прямокутних координат у циліндричні
xyz2sph(x,y,z)	x, y, z – прямокутні координати	Перетворення прямокутних координат у сферичні
Y0(x) Y1(x) Yn(m,x)	x – аргумент, x>0	Функція Бесселя другого роду нульового, першого і m-го порядку
ys(n,x)	n – порядок x – аргумент	Сферична функція Бесселя другого роду

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Аргирис Дж.* Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 210 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИ строительной механики, 1993. – 374 с.
3. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
4. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
5. *Дубенец В.Г., Хильчевский В.В., Савченко О.В.* Основы методу скінченних елементів. – Чернігів, ЧДТУ.– 2003. – 346 с.
6. *Ершов И.Ф., Шахверди Г.Г.* Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. – Л.: Судостроение, 1984. – 235 с.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 541с.
8. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 308 с.
9. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
10. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. – М.: 1977. – Т.2. – 544 с.
11. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. – 319 с.
12. *Коннор Дж., Бреббиа.* Метод конечных элементов в механике жидкостей. – Л.: Судостроение, 1979. – 263 с.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
14. *Корнеев В.Г.* Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости // Известия ВНИИГ. – 1967. – Т. 83. – С. 31-47.
15. Математика и САПР. – М.: Мир, 1988. – Кн. 2. – 206 с.
16. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
17. Метод конечных элементов / Под ред. *П.М.Варвака.* – Киев: Вища школа, 1981. – 170 с.
18. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общей ред. *А.С.Сахарова, И. Альтенбаха.* – Киев: Вища школа, 1982. – 479 с.

19. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / Под ред. *В.А.Постнова*. – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.
20. *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 215 с.
21. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 475 с.
22. *Молчанов И.Н., Николенко Л.Д.* Основы метода конечных элементов. – К.: Наукова думка, 1989. – 289 с.
23. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
24. *Мышкис А.Д.* Математика для вузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
25. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 394 с.
26. Опір матеріалів: Підручник / За ред. *Г.С.Писаренка*. – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
27. *Отнесс Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
28. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.
29. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
30. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов / Руководитель авт. кол. *В.Г.Пискунов*. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с.
31. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
32. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
33. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. – 392 с.
34. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1988. – 229 с.
35. *Синицын А.П.* Метод конечных элементов в динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1978. – 231 с.
36. Справочник по строительной механике корабля / Под ред. *В.А.Постнова*. – Л.: Судостроение, 1982. – Т. 2. – 463 с.
37. *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применение. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
38. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
39. *Усюкин В.И.* Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение, 1988. – 389 с.

-
40. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М., Л.: Наука, 1963. – 735 с.
 41. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, 1989. – 352 с.
 42. *Харрис С.М., Крид Ч.М.* Справочник по ударным нагрузкам. – Л.: Судостроение, 1980. – 346 с.
 43. *Цзе С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т.* Механические колебания. – М.: Машиностроение, 1968. – 507 с.
 44. *Шабров Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей силовых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1983. – 209 с.
 45. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
 47. *Можаровский Н.С.* Теория пластичности и ползучести в инженерном деле. – К.: Вища школа, 1991. – 293 с.

Для нотаток

