



Савченко О. В.

Деркач О. Л.

Чернігівський
національний
технологічний
університет

Savchenko O. V.

Derkach O. L.

Chernihiv National
University of Technology

УДК 539.3:534.1

**МОДЕЛЮВАННЯ
НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ
БАЛКИ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЮ
НАКЛАДКОЮ ПРИ ДІЇ
ЕЛЕКТРИЧНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

У статті розглядається методика скінченно-елементного моделювання збудження коливань нестационарними електричними імпульсами. Механічні, п'єзоелектричні та діелектричні втрати в матеріалі враховані шляхом безпосереднього введення комплексних сталих в рівняння динаміки, яке записується в частотному просторі.

Ключові слова: метод скінченних елементів, нестационарні коливання, перетворення Фур'є, п'єзоелектрична накладка.

Вступ і постановка задачі. В роботі [1] розглядалося пасивне та активне демпфірування нестационарних коливань балки з дисипативними п'єзоелектричними накладками при механічному збудженні. Показано, що застосування п'єзоелектричних накладок у тонкостінних елементах конструкцій, на які діють ударні та імпульсні навантаження, дозволяє зменшити амплітуди нестационарних коливань і збільшити декремент коливань. Використання п'єзоелектричних матеріалів як активних елементів, так званих актуаторів, для збудження коливань або зменшення їх амплітуд в елементах конструкцій потребує вивчення явища оберненого п'єзоелектричного ефекту – виникнення деформацій при прикладенні до тіла електричного навантаження. Тому на етапі

проекування "інтелектуальних" композитних конструкцій [2-4] для аналізу силових впливів актуатора на елементи конструкцій важливою задачею є розрахунок коливань при дії електричних навантажень, які збуджують коливання або зменшують їх амплітуду (при активному демпфіруванні).

З огляду на широкий спектр технічних застосувань, розв'язання задачі збудження коливань елементів конструкцій за допомогою п'єзоелектричних елементів становить окремі інтерес [5].

У даній роботі в рамках лінійної фізичної моделі матеріалів розглядаються нестационарні електричні збудження коливань балки з поляризованою по товщині п'єзоелектричною накладкою (рис. 1).

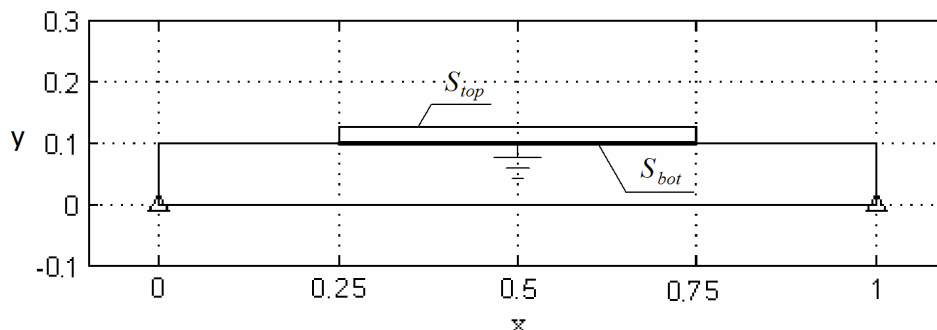
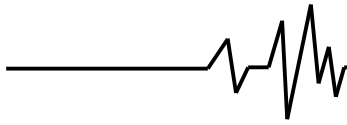


Рис. 1. Розрахункова схема шарнірно-закріпленої балки з п'єзоелектричною накладкою

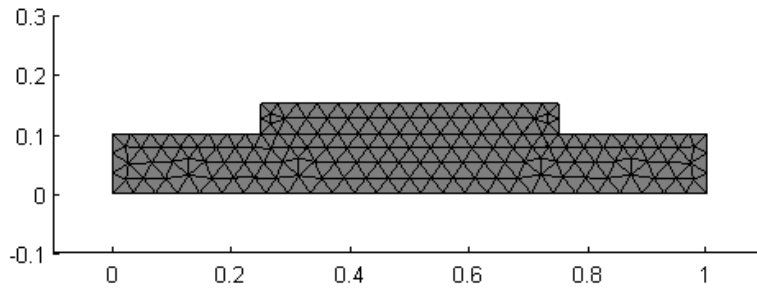
Імпульс різниці потенціалів прикладається до екіпотенціальної поверхні актуатора S_{top} ; потенціал нижнього електрода S_{bot} дорівнює нулю. В розрахунках приймалося

припущення, що контакт між п'єзоелектричною накладкою та несучою конструкцією є ідеальним.

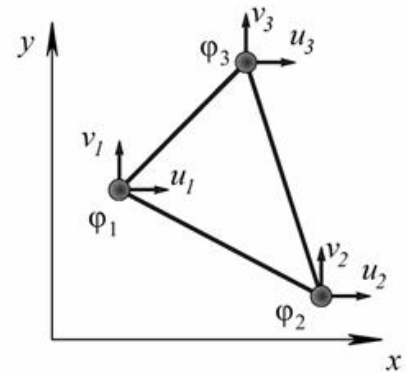


Побудова скінченно-елементної моделі конструкції. Складність задач механіки взаємодії полів різного походження у матеріалах і елементах конструкцій обумовлює необхідність використання наближених методів. Згідно зі стандартною процедурою методу

скінченних елементів конструкція розбивається на трикутні скінченні елементи (рис. 2, а), причому скінченні елементи, на які розділено п'єзоелектричну накладку, мають додаткові (електричні) ступені вільності (рис. 2, б).



а



б

Рис. 2. Скінченно-елементна модель конструкції (а); скінченний елемент накладки з механічними і електричними ступенями вільності (б)

У трикутному елементі (рис. 2, б) невідомими є вузлові механічні переміщення

$$u = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3)^T \quad \text{і}$$

електричні потенціали $\varphi = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^T$.

Матриці функцій апроксимації механічних переміщень N_u і електричного потенціалу

N_φ мають вигляд [6]:

$$N_u = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix}, \quad N_\varphi = (N_1 \quad N_2 \quad N_3), \quad (1)$$

де

$$N_j(x, y) = \frac{1}{2S} (a_j + b_j x + c_j y), \quad (j=1, 2, 3);$$

а площі елементів S та коефіцієнти a, b, c визначаються за відомими залежностями [6].

Деформації скінченних елементів визначаються за переміщеннями вузлових точок згідно із залежностями Коші для плоского напруженого стану:

$$\varepsilon = Au, \quad A = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix}^T; \quad (2)$$

вектор напруженості електричного поля E – за допомогою диференційного оператора ∇ :

$$E = -\nabla\varphi, \quad \nabla = (\partial/\partial x \quad \partial/\partial y)^T. \quad (3)$$

Згідно з (1), (2), (3), деформації і напруженість електричного поля визначаються за формулами

$$\varepsilon = B_u u, \quad E = -B_\varphi \varphi, \quad (4)$$

де

$$B_u = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{2S} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Рівняння динаміки в частотному просторі. Фізичні залежності для

п'єзоелектричних матеріалів можна записати за допомогою інтегральних операторів лінійної теорії спадкового середовища – як для лінійного в'язкопружного тіла [7, 8].

Наближені рівняння динаміки електров'язкопружного тіла, одержані за допомогою принципу Гамільтона-Остроградського, запишемо у частотному просторі інтегральних перетворень Фур'є [1, 9]. Ця методика дозволяє коректно ввести комплексні пружні, п'єзоелектричні та діелектричні сталі без додаткових перетворень експериментальних даних при коливаннях, відмінних від гармонічних. Скінченно-елементний варіант системи рівнянь динаміки і електростатики композитної конструкції (рис. 1) відносно зображень переміщень \tilde{u} і електричного потенціалу $\tilde{\varphi}$ у частотному



просторі інтегральних перетворень Фур'є при нульових початкових умовах має вигляд:

$$(i\omega)^2 M\tilde{u} + \tilde{K}_{uu}\tilde{u} = -\tilde{K}_{u\phi}\tilde{\phi};$$

$$\tilde{K}_{\phi u}\tilde{u} + \tilde{K}_{\phi\phi}\tilde{\phi} = 0, \quad (5)$$

де M – матриця мас; \tilde{K}_{uu} – матриця жорсткості з частотно-залежними комплексними модулями; $\tilde{K}_{\phi\phi}$ – комплексна матриця електричної «жорсткості»; $\tilde{K}_{u\phi}$, $\tilde{K}_{\phi u}$ – комплексні п'єзоелектричні матриці:

$$M = \rho \int_A N_u^T N_u dA, \tilde{K}_{uu} = B_u^T \tilde{C}(i\omega) B_u, \quad (6)$$

$$\tilde{K}_{u\phi} = B_u^T \tilde{e}(i\omega)^T B_\phi,$$

$$\tilde{K}_{\phi\phi} = B_\phi^T \tilde{\kappa}(i\omega) B_\phi, \tilde{K}_{\phi u} = \tilde{K}_{u\phi}^T;$$

$\tilde{C}(i\omega) = C'(\omega) + iC''(\omega)$ – матриця частотно-залежних комплексних модулів;

$$\tilde{e}(i\omega) = e'(\omega) + ie''(\omega),$$

$\tilde{\kappa}(i\omega) = \kappa'(\omega) + i\kappa''(\omega)$ – відповідно матриці комплексних п'єзоелектричних та діелектричних модулів; ρ – густина матеріалу; $i = \sqrt{-1}$.

Систему рівнянь (5) записано для конструкції, вільної від зовнішніх електричних контурів і механічних навантажень. Електричний вплив на п'єзоелемент задається безпосередньо вектором електричних потенціалів $\tilde{\phi}$ у правій частині першого рівняння системи (5), виконуючи при цьому механічні та електричні граничні умови.

Різницю потенціалів на електродах п'єзоелемента забезпечуємо чисельною реалізацією граничних умов для електричного потенціалу. Для цього потенціал на нижній поверхні п'єзоелемента S_{bot} (рис. 1) прирівнюємо до нуля. У методі скінченних елементів ця процедура реалізується шляхом редукації відповідних електричних ступенів

вільності глобальних матриць $\tilde{K}_{u\phi}$, $\tilde{K}_{\phi u}$ та $\tilde{K}_{\phi\phi}$. Електрична напруга ϕ_{top} , яка

прикладається до еквіпотенціальної поверхні S_{top} (рис. 1), задається зображенням Фур'є дельта-функції відповідного глобального вектора електричних потенціалів у першому рівнянні системи (5):

$$\tilde{\phi}(\omega) = N_\phi^T FFT \left[\delta(t) \cdot \phi_{top}(S_{top}, t) \right]. \quad (7)$$

Коливання конструкції, збудженої електричним дельта-імпульсом (7), визначаємо у частотному просторі з першого рівняння системи (5):

$$\tilde{u}(\omega) = - \left(\tilde{K}_{uu} - \omega^2 M \right)^{-1} \tilde{K}_{u\phi} \tilde{\phi}(\omega). \quad (8)$$

Перехід у часовий простір проводиться на останньому кроці розрахунків за допомогою алгоритму оберненого перетворення Фур'є, яке застосовуємо до частотного зображення переміщень (8):

$$u(t) = FFT^{-1} \left[\tilde{u}(\omega) \right]. \quad (9)$$

Приклад розрахунку. Знайдемо реакцію конструкції (рис. 1) і картину еквівалентних напружень, що виникають внаслідок електричного удару амплітудою $\phi_{top} = 150$ В на електроді п'єзоелектричної накладки.

В розрахунках приймали такі властивості матеріалу несучої конструкції: густина $\rho = 1,85 \cdot 10^3$ кг/м³; комплексний модуль $\tilde{E}1 = 6,71 \cdot 10^{10} \cdot (1 + i \cdot 0,01)$ Па; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

Властивості матеріалу п'єзоелектричної накладки: густина $\rho = 6,85 \cdot 10^3$ кг/м³; комплексний модуль

$$\tilde{E}2 = 10,7 \cdot 10^{10} \cdot (1 + i \cdot 0,0014) \text{ Па};$$

компоненти матриці п'єзоелектричних коефіцієнтів:

$$\tilde{e}_{15} = 12,32 \cdot (1 - i \cdot 0,21 \cdot 10^{-4}) \text{ Кл/м}^2;$$

$$\tilde{e}_{31} = -7,21 \cdot (1 - i \cdot 0,83 \cdot 10^{-4}) \text{ Кл/м}^2,$$

$$\tilde{e}_{33} = 15,12 \text{ Кл/м}^2;$$

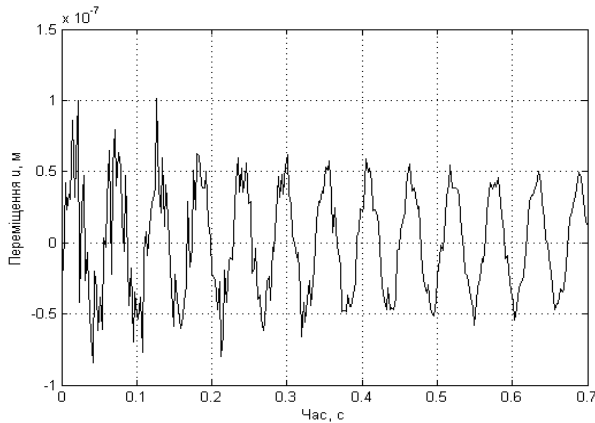
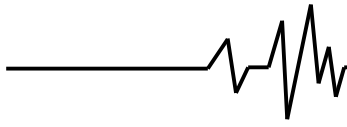
компоненти матриці діелектричних модулів:

$$\tilde{\kappa}_{11} = \tilde{\kappa}_{33} = -153 \cdot 10^{-10} \cdot (1 + i \cdot 4,7 \cdot 10^{-3}) \text{ Ф/м} [3].$$

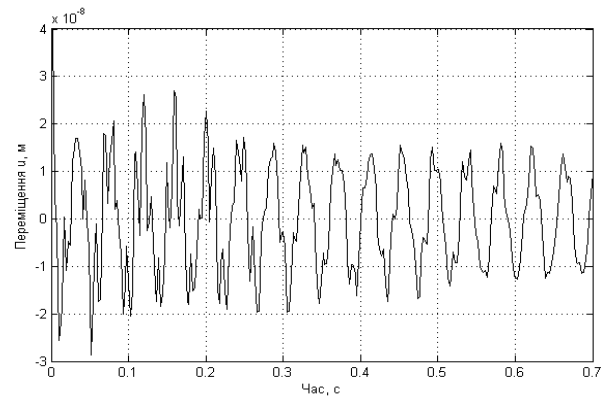
Параметри швидкого перетворення Фур'є: кількість точок $N = 2^{13}$; інтервал часу $T = 40$ с.

Розміри конструкції: балка довжиною $l = 10$ см і товщиною $h = 1$ см; довжина п'єзоелектричної накладки $l_p = 5$ см, товщина $h_p = 0,5$ см.

Переміщення (9) серединної точки конструкції (рис. 1) від дії електричного удару (7) показано на рис. 3.



а



б

Рис. 3. Переміщення серединної точки конструкції внаслідок дії електричного удару амплітудою 150 В при відношенні товщини накладки h_p до товщини несучої конструкції h : а) $h_p/h = 0,25$; б) $h_p/h = 0,5$

Як відомо, найбільших переміщень п'єзоелектричний перетворювач досягає у резонансних режимах роботи. Тому для композитної конструкції виникає необхідність аналізу її амплітудно-частотної характеристики

(АЧХ). На рис. 4 показано АЧХ розглянутої вище конструкції для пікових значень нестационарних навантажень

$$\varphi_{top} = \{30, 60, 90, 120, 150\} \text{ В.}$$

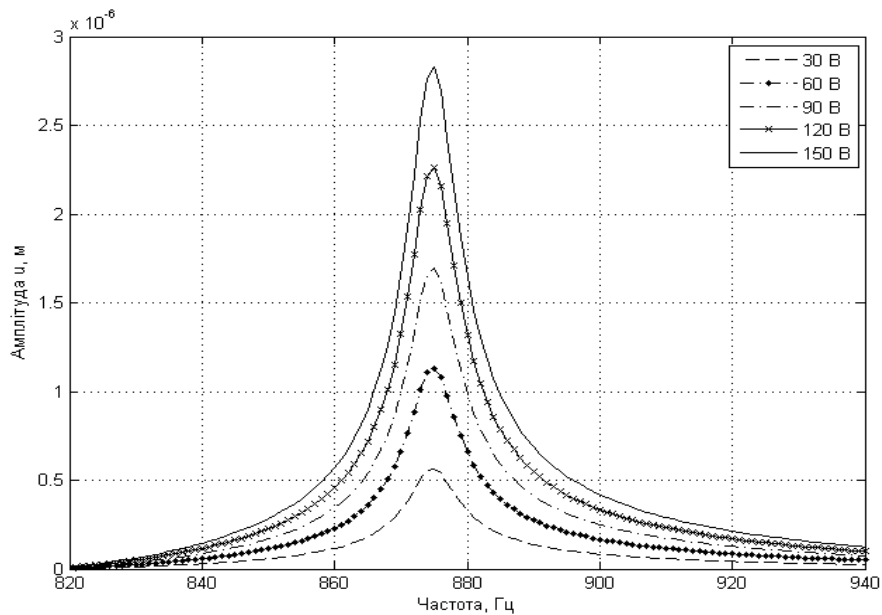


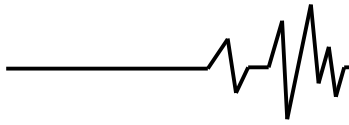
Рис. 4. АЧХ конструкції для ряду пікових значень електричного удару

Для визначення еквівалентних напружень у композитній конструкції, які виникають від дії електричного удару, за відомим вектором переміщень $\tilde{u}(\omega)$ розраховуємо вектор напружень $\sigma = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy})^T$ у кожному вузлі скінченного елемента:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{C}(i\omega) B_u \tilde{u}(\omega), \quad (10)$$

де

$$\tilde{C}(i\omega) = \frac{\tilde{E}(i\omega)}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix}.$$



За відомим глобальним вектором напружень (10), можемо визначити еквівалентні напруження для всього процесу нестационарних коливань, що відповідає точкам розрахунку $n = 1, \dots, N$ (рис. 5):

$$\sigma_{ekv}(n) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2}.$$

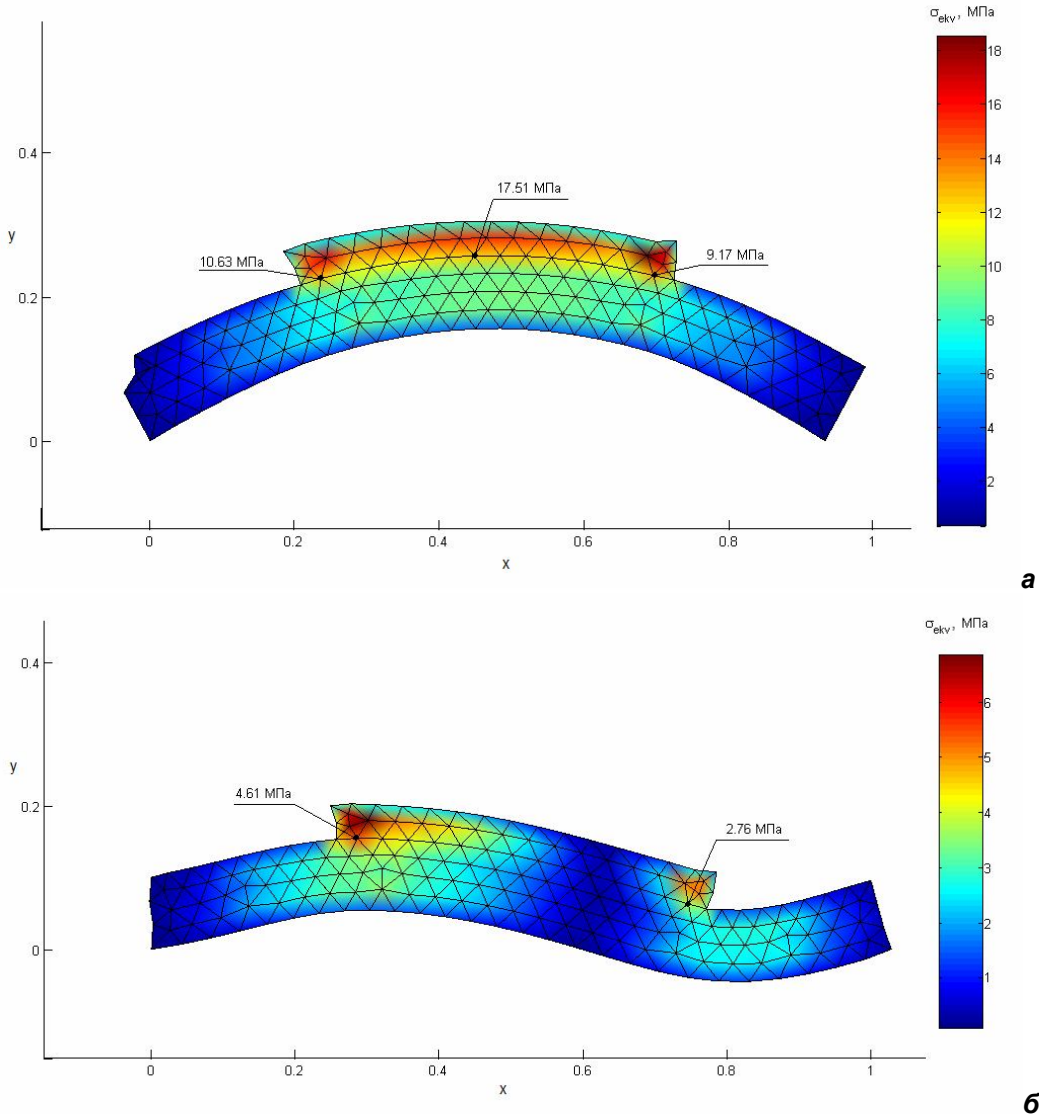


Рис. 5. Форма коливань конструкції з картою ефективних еквівалентних напружень: в момент електричного навантаження 4,69 мс (а); після електричного удару – вільні коливання 37,5 мс (б); масштаб зображених переміщень $2 \cdot 10^5 : 1$

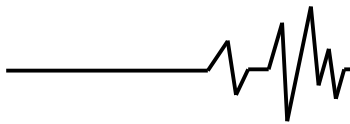
Напруження, які виникають в активному п'єзоелектричному елементі, можуть стати причиною часткової або повної втрати п'єзоелектричних властивостей [8]. Тому набувають актуальності задачі аналізу сил, деформацій і напружень у з'єднанні п'єзоелемента з основою.

Силовий аналіз активного п'єзоелемента, з'єданого з основою. При використанні п'єзоелемента як актуатора виникають концентрації напружень у характерних перерізах (рис. 5), звідси постають

проблеми аналізу міцності п'єзоелемента та ефективності передачі силових впливів від п'єзоелемента до несучої конструкції.

Вектор повних зусиль $F = (F_x \ F_y)^T$ знаходимо з попередньо обчисленого вектора переміщень (8) скінченно-елементної моделі:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= (\tilde{K}_{uu} - \omega^2 M) \tilde{u}(\omega), \\ F(t) &= FFT^{-1}[\tilde{F}(\omega)]. \end{aligned} \quad (11)$$



Розрахунки показали, що активна п'єзоелектрична накладка при нестационарних електричних навантаженнях переважно працює в умовах складного напруженого стану і є концентратором напружень. Виникає необхідність проектування накладок оптимальних форм, які б зменшували концентрацію напружень, але не зменшували ефективність збудження коливань.

Як відомо, одним із найбільш простих способів зменшення концентрації напружень є запобігання різкої зміни форми у місцях концентрації напружень.

Нехай кромка п'єзоелектричної накладки утворює з поверхнею несучої конструкції кут α . У рамках задачі електричного навантаження розглянемо величини напружень σ_{ekv} для кутів

$\alpha = \{20^\circ, 50^\circ, 90^\circ\}$ (рис. 6). Розміри

конструкції: довжина несучої балки 200 мм; довжина накладки 60 мм; товщина балки 1 мм; товщина накладки 0,2 мм.

Прослідкуємо зміну напружень у точці концентрації напружень А у залежності від зміни кута $\alpha = 5^\circ \dots 90^\circ$ (рис. 7).

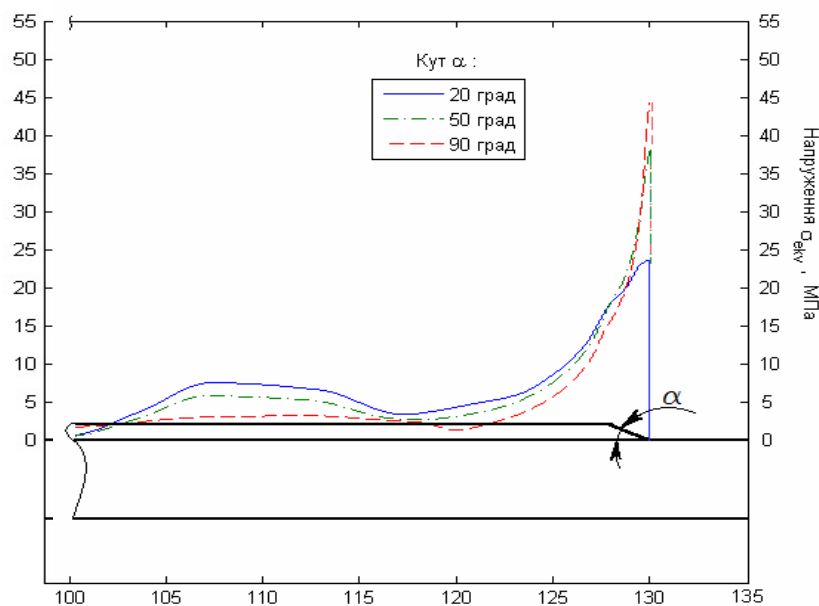


Рис. 6. Епюра напружень σ_{ekv} , які діють вздовж лінії «активна п'єзоелектрична накладка/несуча конструкція» в момент електричного навантаження

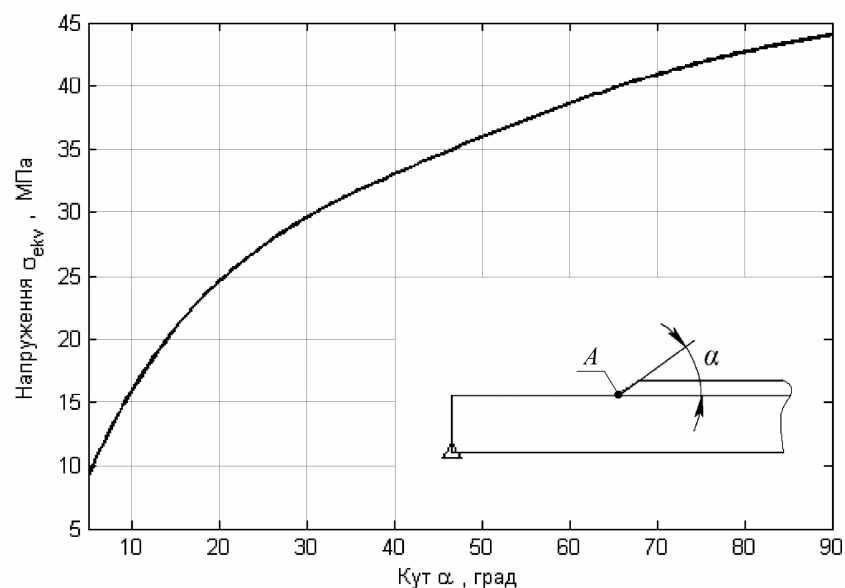
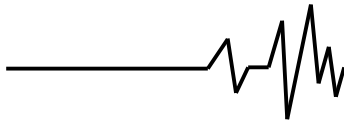


Рис. 7. Залежності напружень σ_{ekv} у точці А від кута α



Як видно з рис. 6-7, при одному і тому ж рівні електричного навантаження зміна кута нахилу кромки накладки забезпечує зменшення концентрації напружень у крайніх точках приєднання п'єзоелектричної накладки до конструкції, що дозволить зменшити нагрівання п'єзоелемента у місцях концентрації напружень та, відповідно, підвищить його ресурс. Проведені розрахунки показують, що можливою є постановка задачі оптимізації за критерієм максимального збудження коливань з обмеженнями на максимальні напруження, міцність та жорсткість.

Слід зазначити, що задачі оптимального проектування динаміки конструкцій потребують значних розрахункових ресурсів, тому виникає необхідність розробки ефективної методики топологічної оптимізації [10] у задачах динаміки активних електров'язкопружних елементів.

Висновки і пропозиції. Методику скінченно-елементного моделювання у частотному просторі інтегральних перетворень Фур'є застосовано для розрахунку нестационарних коливань електров'язкопружних елементів конструкцій, збуджених електричним імпульсом, та визначення еквівалентних напружень у конструкції з п'єзоелектричною накладкою з урахуванням розсіяння енергії у матеріалі. Розглянута методика дозволяє врахувати реальні фізичні частотно-залежні характеристики розсіяння енергії у пасивних і активних композиційних матеріалах.

Показано доцільність задач оптимізації форми активної накладки з метою підвищення ресурсу й ефективності роботи активного п'єзоелектричного елемента. Розглянуту математичну модель можна використати для розв'язання задачі оптимізації за критерієм максимального збудження коливань з обмеженнями на максимальні напруження, що дозволить підвищити якість роботи п'єзоелектричного актуатора та ефективність керування композитними елементами конструкцій.

Список використаних джерел

1. Дубенець В. Г. Нестационарні коливання конструкцій з електро-в'язкопружними дисипативними накладками / В. Г. Дубенець, О. В. Савченко, О. Л. Деркач // Вібрації в техніці та технологіях. – 2015. – № 1 (77). – С. 15-21.

2. Crawley E. F. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures / E. F. Crawley, J. de Luis // AIAA Journal. – 1987. – Vol. 25. – P. 1373-1385.

3. Cheng J. Development of a smart composite pipe joint integrated with piezoelectric layers under tensile loading / J. Cheng, X. Wu, G. Li, F. Taheri, Su-Seng Pang // Int. J. of Solid and Struct. – 2006. – Vol. 43. – P. 5370-5385.

4. Lou Q. Linear and higher order displacement theories for adhesively bonded lap joints / Q. Lou, L. Tong // Int. J. of Solid and Struct. – 2004. – Vol. 41. – P. 6351-6381.

5. Григорьева Л. О. Колебания пьезокерамического цилиндра при нестационарном электрическом возбуждении / Л. О. Григорьева // Прикл. мех. – 2007. – Т. 43, № 3. – С. 73-79.

6. Дубенець В. Г. Основи методу скінченних елементів: навчальний посібник / В. Г. Дубенець, В. В. Хильчевський, О. В. Савченко. – Чернігів: ЧДТУ, 2007. – 348 с.

7. Шульга Н. А. Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев; отв. ред. Б. П. Маслов; АН УССР. Ин-т механики. – К.: Наукова думка, 1990. – 228 с.

8. Писаренко Г. Г. Прочность пьезокерамики / Г. Г. Писаренко. – К.: Наук. думка, 1987. – 232 с.

9. Дубенець В. Г. Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенець, В. В. Хильчевский. – К.: Вища школа, 1995. – Т. 1. – 226 с.

10. Савченко О. В. Задачі топологічної оптимізації композитних елементів конструкцій із в'язкопружних матеріалів / О. В. Савченко // Вісн. Черніг. держ. технол. ун-ту. – 2012. – № 4 (61). – С. 26-34.

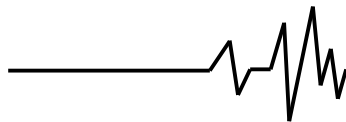
Список джерел в транслітерації

1. Dubenets V. G. Nestatsionarni kolivannia konstruktsiy z elektro-viazkopruzhnymy dysypatyvnymy nakladyamy / V. G. Dubenets, O. V. Savchenko, O. L. Derkach // Vibratsii v tekhnitsi i tekhnolohiyakh. – 2015. – № 1 (77). – S. 15-21.

2. Crawley E. F. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures / E. F. Crawley, J. de Luis // AIAA Journal. – 1987. – Vol. 25. – P. 1373-1385.

3. Cheng J. Development of a smart composite pipe joint integrated with piezoelectric layers under tensile loading / J. Cheng, X. Wu, G. Li, F. Taheri, Su-Seng Pang // Int. J. of Solid and Struct. – 2006. – Vol. 43. – P. 5370-5385.

4. Lou Q. Linear and higher order displacement theories for adhesively bonded lap joints / Q. Lou, L. Tong // Int. J. of Solid and Struct. – 2004. – Vol. 41. – P. 6351-6381.



5. Grigoryeva L. O. Kolebaniya piezokeramicheskogo tsilindra pri nestatsionarnom elektricheskom возбуждении / L. O. Grigoryeva // Prikl. mekh. – 2007. – Т. 43, № 3. – S. 73-79.

6. Dubenets V. G. Osnovy metodu skinchennykh elementiv: navchalny posibnyk / V. G. Dubenets, V. V. Khilchevskiy, O. V. Savchenko. – Chernihiv: ChDTU, 2007. – 348 s.

7. Shulga N. A. Kolebaniya piezoelektricheskikh tel / N. A. Shulga, A. M. Bolkisev; Otv. red. B. P. Maslov; AN USSR. In-t mekhaniki. – K.: Naukova dumka, 1990. – 228 s.

8. Pisarenko G. G. Prochnost piezokeramiki / G. G. Pisarenko. – Kiev: Nauk. dumka, 1987. – 232 s.

9. Dubenets V. G. Kolebaniya dempfirovannykh kompozitnykh konstruksiy / V. G. Dubenets, V. V. Khilchevskiy. – K.: Vishcha shkola, 1995. – Т. 1. – 226 s.

10. Savchenko O. V. Zadachi topologichnoi optymizatsii kompozitnykh elementiv konstruksiy iz viazkoprzhnykh materialiv / O. V. Savchenko // Visn. Chern. derzh. tekhnol. un-tu. – 2012. – № 4 (61). – S. 26-34.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАКЛАДКОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Аннотация. В статье рассматривается методика конечно-элементного моделирования колебаний, возбуждаемых нестационарными электрическими импульсами. Механические, пьезоэлектрические и диэлектрические потери в материале учтены непосредственно, путем введения комплексных постоянных в уравнение динамики, записанное в частотном пространстве.

Ключевые слова: метод конечных элементов, нестационарные колебания, преобразование Фурье, пьезоэлектрическая накладка.

MODELLING OF NON-STATIONARY VIBRATION OF A BEAM WITH A PIEZOELECTRIC PATCH UNDER ELECTRICAL LOADS

Annotation. The technique of finite-element modelling of stimulating vibration by non-stationary electric impulses is considered in this paper. Mechanical, piezoelectric and dielectric losses in the material are accounted by direct introduction of the complex constants into dynamics equations, noted in the frequency space.

The technique of finite-element modelling in the frequency space of integral Fourier transform is applied for calculation of non-stationary vibration of viscoelastic structure elements, stimulated by an electrical impulse. The considered technique allows to take into account the real physical frequency-dependent characteristics of energy dissipation in passive and active composite materials. An image of equivalent stress in the material, considering energy dissipation, was obtained.

The necessity of optimization problems for the active patch shape, resulting in increased resource and operation efficiency of an active piezoelectric material, is shown. The proposed mathematical model can be applied for conducting the optimization by the maximal vibration stimulation criterion with peak stress constraints, which results in higher quality of piezoelectric actuator operation and the overall efficiency of controlling composite structure elements.

Key words: finite element method, non-stationary vibration, Fourier transform, piezoelectric patch.