МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія.

Методичні вказівки до практичних занять
для студентів галузі знань 1701 «Інформаційна безпека»
за напрямом підготовки
6.170103 «Управління інформаційною безпекою»

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри математичного
моделювання
та інформаційної безпеки
протокол № 5 від 21 грудня 2015 р.

Чернігів ЧНТУ 2015

Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія. Методичні вказівки до практичних занять для студентів галузі знань 1701 «Інформаційна безпека» за напрямом підготовки 6.170103 «Управління інформаційною безпекою» / Укл.: Ткач Ю.М.- Чернігів: ЧНТУ, 2015. - 107 с.

Укладач: Ткач Юлія Миколаївна, кандидат педагогічних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Ткач Юлія Миколаївна, завідувач кафедри математичного моделювання та інформаційної безпеки, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: Гур’єв В.І., кандидат технічних наук, професор кафедри математичного моделювання та інформаційної безпеки Чернігівського національного технологічного університету, доцент

ВСТУП

Математика є основою усіх галузей сучасної науки і технології. Знання з вищої математики знадобляться як для подальшого глибокого засвоєння багатьох базових та професійно орієнтованих дисциплін, так і для застосування їх у практичній діяльності.

Якісна математична освіта надає можливість не тільки досліджувати, аналізувати та прогнозувати складні процеси, що відбуваються в різних галузях народного господарства, але й завдяки сучасним комп'ютерним технологіям кількісно їх розраховувати та приймати обґрунтовані логічно несуперечливі рішення.

Таким чином, оволодіння основами математичних методів, засвоєння певного рівня загальної математичної культури є в сучасних умовах важливою умовою підготовки спеціалістів практично будь-якої галузі.

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» розроблений у відповідності до робочої програми з вищої математики галузі знань 1701 «Інформаційна безпека» за напрямом підготовки 6.170103 «Управління інформаційною безпекою», а також може бути використана для навчання студентів інших галузей знань, зокрема 0305 «Економіка і підприємництво».

У посібнику містяться до кожної теми: короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування типових задач, завдання для самостійної роботи, питання для самоконтролю та до всієї дисципліни список рекомендованої літератури.

Ця методична розробка може бути використана як викладачами так і студентами.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. 1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ З НИМИ

Комплексним числом z називається упорядкована пара дійсних чисел $(x;y)$, перше з яких x називається **дійсною частиною**, а друге число y - **уявною частиною**. Позначення: $z = x + iy$. Символ i називається *уявною одиницею*.

Якщо $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ називається *чисто уявним*, якщо $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ ототожнюється з дійсним числом x, а це означає, що множина R дійсних чисел є підмножиною множини C всіх комплексних чисел, тобто $R \subset C$.

Число x називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y уявною частиною, $y = lmz$.

Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються **рівними** тоді і лише тоді, коли рівні їх дійсні частини і рівні їх уявні частини, тобто

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, що відрізняються лише знаком уявної частини називаються **спряженими**.

Всяке комплексне число $z = x + iy$ **можна змалювати точкою** $M(x;y)$ плоскості Oxy такою, що $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. І навпаки.

Площина, на якій зображуються комплексні числа називається **комплексною площиною** (її також позначають C). Вісь абсцис називається **дійсною віссю**, а вісь ординат - **уявною**.

Комплексне число $z = x + iy$ можна змалювати і за допомогою радіус-вектора $\bar{r} = O\overline{M} = (x;y)$.

Довжина вектора $\bar{r}$, що відображає комплексне число z, називається **модулем** цього числа і позначається $|z|$ або r. Модуль $r = |z|$ однозначно визначається по формулі

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Величина кута між позитивним напрямом дійсній осі і вектором $\bar{r}$, що відображає комплексне число, називається **аргументом** цього числа, позначається $Argz$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина багатозначна: $Argz = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots,$ де $\arg z = \varphi$ - **головне значення аргументу**, поміщене в проміжку $(-\pi;\pi)$, тобто $-\pi \prec \arg z \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не визначений.

Зауваження. В якості значення аргументу можна брати величину, що належить проміжку $[0;2\pi)$.

Запис числа z у вигляді $z = x + iy$ називають формою алгебри комплексного числа.

Запис числа z у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

називається **тригонометричною формою**.

Аргумент φ визначається з формул $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$ де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можна знайти, використовуючи формулу $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, так як $-\pi \prec \arg z \le \pi$, то з формули $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ знаходимо

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arg tg\dfrac{y}{x}, & \text{ïðè} \quad x \succ 0; \\ \arg tg\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{ïðè} \quad x \prec 0, y \succ 0 \\ \arg tg\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{ïðè} \quad x \prec 0, y \prec 0 \end{cases}$$

Запис числа z у вигляді

$$z = re^{i\varphi} \text{ або } z = |z|e^{u\arg z}$$

називають **показниковою формою** (або експоненціарною) комплексного числа.

Дії над комплексними числами

Основні дії над комплексними числами $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, задані в *алгебраїчній формі*, визначаються наступними рівностями:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$
$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$
$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\cdot\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$
$$(\text{при } z \neq 0)$$

З рівності випливає, що

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$$

тобто модуль різниці двох комплексних чисел дорівнює відстані між точками, які зображують ці числа на площині.

З рівності випливає, що

$$i^2 = -1.$$

При множенні комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданих в *тригонометричній форм*і їх модулі перемножуються, а аргументи складаються, тобто

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Звідси *слідує формула Муавра для зведення комплексних чисел* у натуральній степені:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Розподіл комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, здійснюється за формулою

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}=\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Корінь *n*-ого ступеня з комплексного числа має *n* різних значень, які знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

де k=0, 1, 2, 3,…, n-1.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі:

1) $z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$;

3) формула Муавра:
$z_1{}^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi_2)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, де n - ціле число;

4) $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, де k=0, 1, 2 ,…, $n-1$.

Коріння квадратних і біквадратних рівнянь. Коріння квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ з дійсними коефіцієнтами, у якого $D=b^2-4ac\prec 0$, знаходяться за формулами

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Коріння біквадратного рівняння $x^4+px^2+q=0$ з дійсними коефіцієнтами, у якого $D=p^2-4q\prec 0$, знаходяться за формулами

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{2\sqrt{q}-p}\pm i\sqrt{2\sqrt{q}+p}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{-\sqrt{2\sqrt{q}-p}\pm i\sqrt{2\sqrt{q}+p}}{2}$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Виконати зазначені дії :

а) $(2+3i)+(4-7i)$; б) $(1-i)(3+2i)$; в) $\frac{1+3i}{1+i}$.

Розв'язання.

а) $(2+3i)+(4-7i)=(2+4)+(3-7)i=6-4i$;

б) $(1-i)(3+2i)=3+2i-3i-2i^2=3-i+2=5-i$;

в) $\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i.$.

Приклад 2. Записати в тригонометричній формі комплексні числа:

а) $-1+i\sqrt{3}$; б) $-3-4i$.

Розв'язання.

а) $-1+i\sqrt{3}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

б) $-3-4i=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)=5(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де φ - кут третьої чверті, косинус якого дорівнює $-\frac{3}{5}$.

Приклад 3. Обчислити, використовуючи тригонометричну форму комплексного числа:

а) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{10}$; б) $(1+i\sqrt{3})^{-5}$.

Розв'язання.

а) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{5}+i\sin\frac{10\pi}{5}\right)=2^{10}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2^{10}$;

б) $(1+i\sqrt{3})^{-5}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-5}=2^{-6}(1-i\sqrt{3})$.

Приклад 4. Знайти всі значення коренів:

а) $z=\sqrt{-1}$; б) $z=\sqrt[3]{i}$.

Розв'язання.

а) $z=\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}$;

$k=0$: $z_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$;

$k=1$: $z_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$;

б) $z=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$;

$k=0$: $z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

$k=1$: $z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

$k = 2: \quad z_2 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$.

Приклад 5. Наступні комплексні числа відобразити векторами і записати в тригонометричній і показовій формах:

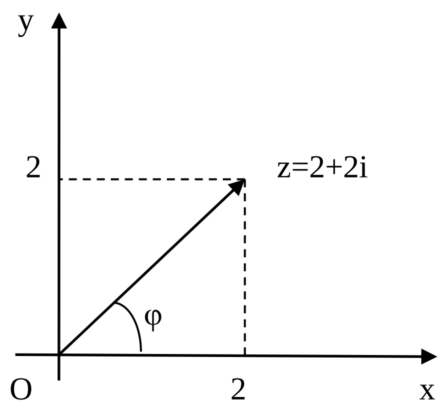
а) $z = 2 + 2i$; б) $z = -1 + i\sqrt{3}$; в) $z = -5i$;

г) $z = -3 - 2i$; д) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

Використовуючи формули.

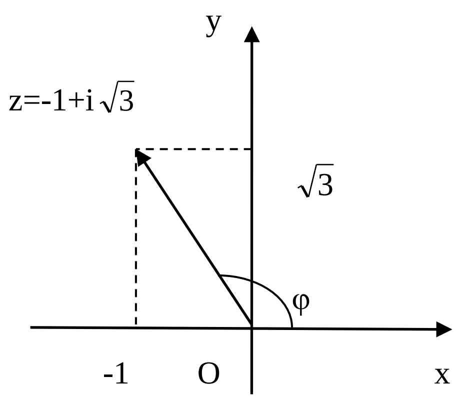
а) Знаходимо модуль і аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Тут $x = 2 \succ 0$, $y = 2 \succ 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \arg tg\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Отже, $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.



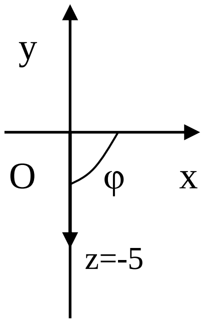
б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ маємо $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \arg tg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$.

Отже, $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\bullet\frac{2}{3}\pi}$.



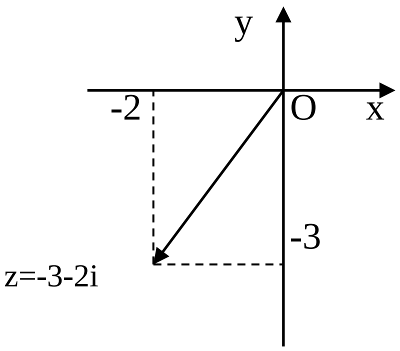
в) Маємо: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Отже, $-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$.



г) Маємо: $r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \arg tg\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = arctg\frac{2}{5} - \pi$.

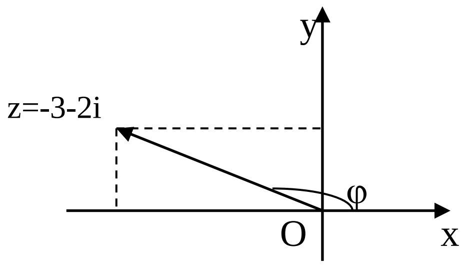
Отже, $-3-2i = \sqrt{13}\left(\cos\left(arctg\frac{2}{5} - \pi\right) + i\sin\left(arctg\frac{2}{5} - \pi\right)\right) = \sqrt{13}e^{i\left(arctg\frac{2}{5} - \pi\right)}$.



д) Значить $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не є тригонометричною формою запису комплексного числа.

Перепишемо z у вигляді $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Треба знайти такий кут φ, $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$.

Таким кутом є $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, таким чином $\varphi = \frac{4}{5}\pi$.



Отже, $z = 3\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння $z^5+32=0$ на безлічі комплексних чисел.

Розв’язання. Перепишемо рівняння у вигляді $z=\sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представимо в тригонометричній формі:

$$-32=32(\cos\pi+i\sin\pi).$$

За формулою знаходимо

$$z=\sqrt[5]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right),$$

де k=0, 1, 2, 3, 4.

Вважаючи k=0, 1, 2, 3, 4 отримаємо

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\approx 1{,}6180+1{,}1756\cdot i,$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)\approx -0{,}6180+1{,}9021\cdot i,$$

$$z_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)\approx -0{,}6180-1{,}9021\cdot i,$$

$$z_4=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right)\approx -1{,}6180-1{,}1756\cdot i.$$

Знайденим кореням рівняння відповідають вершини правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіуса R=2 з центром у початку координат.

Приклад 7. Зобразити на комплексній площині C множину точок, що задовольняють наступні умови:

а) $|z|=2$,

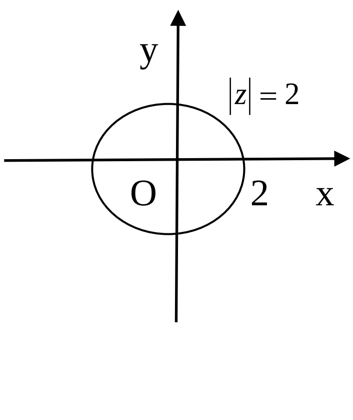
б) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$,

в) $0\le \operatorname{Im} z<1{,}5$

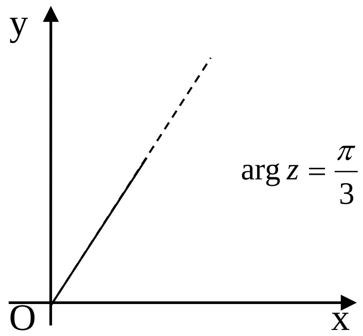
г) $\operatorname{Re} z>1$.

Розв’язання.

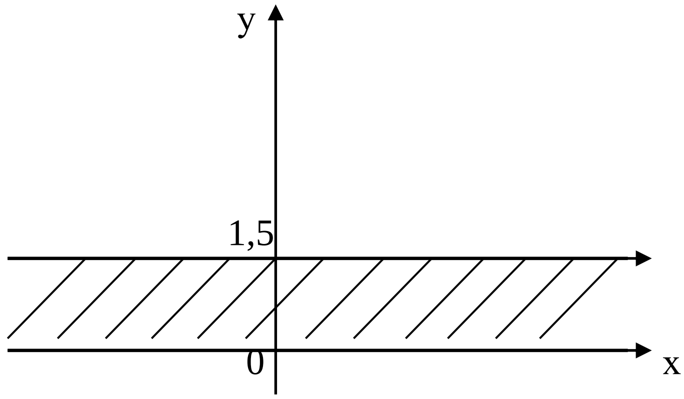
а) Множина точок, що задовольняє умову $|z|=2$ може бути записана у вигляді $\sqrt{x^2+y^2}=2$, тобто $x^2+y^2=4$. Це коло радіуса 2 з центром у початку координат.



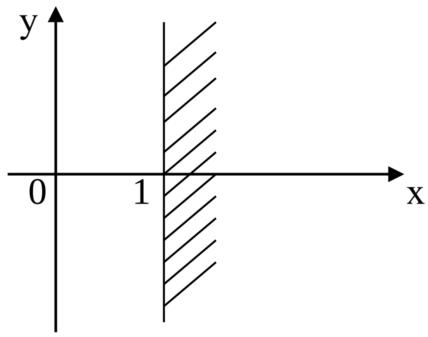
б) Шукані точки лежать на промені, що виходить з початку координат під кутом $\frac{\pi}{3}$ до додатного напряму осі Ox.



в) Задану нерівність можна переписати у вигляді $0 \le y < 1{,}5$. Тобто це частина морщини обмежена прямими $y = 0$ та $y = 1{,}5$.



г) Задану нерівність $\operatorname{Re} z > 1$ можна переписать у вигляді $x > 1$. Тобто це множина точок, що знаходиться справа від прямої $x = 1$.



Завдання для самостійної роботи

1. Спростити вираз:

№ варіанту		**№ варіанту**	
1	$\frac{1+i}{1-2i} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)^2;$	**6**	$\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3+i} - 2i^8;$
2	$\frac{(-2+i)^2}{1+3i} - (0{,}1 - 0{,}3i);$	**7**	$\frac{2(1-i\sqrt{3})^3}{(1+i\sqrt{3})^2}$

3	$\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12};$	**8**	$\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13}).$
4	$\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3});$	**9**	$\frac{2(1-i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-i)}+(4-2i)^2$
5	$\frac{(1+3i)(1+3i)}{(3-i)^2}-2i$	**10**	$\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)};$

2. Знайти z = $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$. Записати результат в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах комплексного числа.

№ варіанту	Z_1	Z_2	№ варіанту	Z_1	Z_2
1	-2 + 3i	$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	6	3 +2i	$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
2	2 – 2i	$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	7	3 – 2i	$2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$
3	-2 +5i	$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$	8	-2 -5i	$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
4	1 + 2i	$2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$	9	5 + 2i	$2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
5	3 + i	$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	10	3 + 3i	$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення комплексного числа.
2. Запишіть число в алгебраїчному та тригонометричному вигляді.
3. Які дії виконуються над комплексними числами?

1.2 МАТРИЦІ ТА ЇХ ВИДИ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

Означення. *Матрицею називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів* a_{ij}, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, *розташованих в* ***m*** *рядках та* ***n*** *стовпцях.*

Матриця, яка має ***m*** рядків та ***n*** стовпців, називається матрицею розміру ***m***× ***n*** (перший множник завжди вказує кількість рядків, другий - стовбців).

Матриця позначається: $A=(a_{ij})$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де $a_{ij}\left(i=1,2,...,m\ ,\ j=1,2,...,n\right)$ – елементи матриці.

Елементи матриці a_{ij}, для яких $i=j$, називається **головною діагоналлю**. Інша діагональ називається **побічною** (допоміжною).

Транспонованою до матриці ***A*** називається матриця $\mathbf{A}^{\mathbf{т}}$, така що $a_{ij}^{T}=a_{ij}$, $\forall i,j$, а операція перетворення матриці ***A*** матриця $\mathbf{A}^{\mathbf{т}}$ називається **транспонуванням матриці А**.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},\quad A^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Дві матриці ***рівні між собою***, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Матриці бувають кількох видів:

1) матриця-рядок – матриця, яка складається з одного рядка:

$$A=(a_{11},a_{12},...,a_{1n}).$$

2) матриця-стовпець – матриця, яка складається з одного стовпця:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

3) діагональна матриця – квадратна матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, крім елементів головної діагоналі:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) трикутна матриця – квадратна матриця, у якої під (над) головною діагоналлю усі елементи дорівнюють нулю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5) одинична матриця (загальновживане позначення E) – діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6) нуль-матриця – матриця будь-якого розміру, у якої усі елементи дорівнюють нулю.

7) східчаста матриця – прямокутна матриця, яка має вигляд:

$$A_{r\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \dots & a_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

де $r \le k$.

Якщо визначник матриці відмінний від нуля, то матриця називається ***неособливою***, або ***невиродженою***. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця ***особлив****а*, або ***вироджена.***

Дії з матрицями

Найпростішими діями з матрицями називають *множення матриці на число, їх додавання та віднімання, множення матриць.*

Добутком матриці A на число* k** називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці ***A та числа k:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Властивості операції множення матриці на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (асоціативність),

2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивність відносно додавання матриць),

3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивність відносно додавання чисел).

Лінійною комбінацією матриць A та B однакового розміру називається вираз виду:

$\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, де $\forall \alpha, \beta$.

Додавати та віднімати *можна лише* матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць A та B однакового розміру m* × *n називається матриця ***C*** розміру ***m*** × ***n***, елементи якої c_{ij} дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі елементів a_{ij} та b_{ij} матриць ***A*** та ***B***, тобто

$$A \pm B = C = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивість операції додавання матриць:

1) $A+B=B+A$ (комутативність),

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

*Для знаходження добутку **AB** матриць **A** та **B** необхідно, щоб кількість стовпців матриці **A** (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці **B** (другого множника).*

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\,.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m\times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB\neq BA$.

Властивості операції множення матриць:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=A\cdot B\cdot C$ (асоціативність),

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ (дистрибутивність),

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ (дистрибутивність),

4) $A\cdot B\neq B\cdot C$ (комутативність відсутня).

Якщо для матриць справджується $A\cdot B=B\cdot C$, то матиці називаються *комутуючими (переставними)*.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Обчислити матрицю *D*=*3A*-*4B*, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$:

Розв’язання

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 21 & 0 & 12 \end{pmatrix},\ 4B=\begin{pmatrix} -4 & 36 & 0 \\ 8 & 16 & -32 \end{pmatrix},\ D=3A-4B=\begin{pmatrix} 10 & -33 & -9 \\ 13 & -16 & 44 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити матрицю $D = AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2,3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3,2}$$

Число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

$D = AB = (d_{ij})_{2,2}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(1)+(-1)\cdot 2+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+(-1)\cdot 0+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot 2+(-2)\cdot(-1) & 3\cdot 2+4\cdot 0+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Приклад 3. Знайти суму матриць.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти лінійну комбінацію матриць *2A+5B*, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A + 5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти добуток матриць AB та BA,

якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot 3 & 1\cdot 1+3(-1)+1\cdot 2 & 1\cdot 0+3\cdot 2+1\cdot 1 \\ 2\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3 & 2\cdot 1+0(-1)+4\cdot 2 & 2\cdot 0+0\cdot 2+4\cdot 1 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 1+2(-1)+3\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot 0+0\cdot 2 & 2\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 1 \\ 1\cdot 1-1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 3-1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 1-1\cdot 4+2\cdot 3 \\ 3\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 3+2\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot 4+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Знайти значення матричного многочлена $2A^2+3A+5E$ при $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, якщо Е-одинична матриця третього порядку.

Розв'язання

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6 & 5\\ 8 & 11 & 6\\ 9 & 8 & 10\end{pmatrix},\quad 2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix},$$

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix},\quad 5E=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad 2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}.$$

Приклад 8. Транспонувати матрицю

Розв'язання

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 8\\ -1 & 7 & 3\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 0 & 7\\ 1 & 8 & 3\end{pmatrix}.$$

Приклад 9. За допомогою елементарних перетворень звести до східчастого вигляду:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1 & 0\\ -5 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1 & 0\\ -5 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}I\cdot(-3)+II\\ I\cdot 5+III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -3 & -6\end{pmatrix}2\cdot III+3\cdot II\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти добуток матриць A та B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} k_1 & 2 & -1 \\ -1 & k_2 & 3 \\ -2 & 4 & k_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіанти завдань

1. $k_1=-5$, $k_2=7$, $k_3=-3$.
2. $k_1=2$, $k_2=5$, $k_3=-3$.
3. $k_1=-2$, $k_2=3$, $k_3=1$.
4. $k_1=4$, $k_2=3$, $k_3=-3$.
5. $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=-2$.
6. $k_1=4$, $k_2=-4$, $k_3=-3$.
7. $k_1=-1$, $k_2=-2$, $k_3=3$.
8. $k_1=2$, $k_2=-4$, $k_3=1$.
9. $k_1=3$, $k_2=-5$, $k_3=2$.
10. $k_1=5$, $k_2=2$, $k_3=-3$.
11. $k_1=1$, $k_2=3$, $k_3=-1$.
12. $k_1=2$, $k_2=2$, $k_3=-1$.
13. $k_1=3$, $k_2=-4$, $k_3=5$.
14. $k_1=2$, $k_2=-3$, $k_3=1$.
15. $k_1=3$, $k_2=4$, $k_3=3$.
16. $k_1=-2$, $k_2=7$, $k_3=3$.
17. $k_1=1$, $k_2=5$, $k_3=3$.
18. $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=4$.
19. $k_1=3$, $k_2=1$, $k_3=2$.
20. $k_1=2$, $k_2=5$, $k_3=3$.
21. $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=7$.
22. $k_1=-3$, $k_2=-4$, $k_3=4$.
23. $k_1=3$, $k_2=3$, $k_3=-4$.
24. $k_1=5$, $k_2=4$, $k_3=2$.
25. $k_1=3$, $k_2=-4$, $k_3=2$.
26. $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=5$.
27. $k_1=-1$, $k_2=0$, $k_3=4$.
28. $k_1=0$, $k_2=-1$, $k_3=2$.
29. $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$.
30. $k_1=-3$, $k_2=2$, $k_3=-1$.

2. Транспонувати матрицю

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 27 & -6 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 37 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ 3 & -13 & -2 & 8 & -7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Знайдіть значення многочлена $f(x)$ при $x = A$, якщо:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$

17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 5x + 2$

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 3$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - x - 1$

6. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+1$

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=-2x^2+8x-6$

8. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-4x$

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2+6x-3$

10. $A=\begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-5x+3$;

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=5x^2+2x-8$

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-4x^2+x-1$

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=2x^3-8x+6$;

14. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-6x+9$;

18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=9x^2-4$;

19. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $f(x)=9-x^2$;

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2+8x+8$;

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, $f(x)=5-4x-x^2$;

22. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-3x+5$.

23. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x)=4x^2-4x+5$.

24. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=3x^2-2x+1$

25. $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -10 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=-3x^2+7x-5$.

26. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $f(x)=3x^2-7x+5$.

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x+1$

28. $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-5x+3$.

29. $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x)=9x^2-7x+1$

15. $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=-x^2+5x+5$

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=-4x^2-7x-4$.

30. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=8x^2-x+1$

4. За допомогою елементарних перетворень звести до діагонального вигляду:

$$A=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & k_2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & k_3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіанти завдань

2.	$k_1=3$, $k_2=4$, $k_3=3$.	12.	$k_1=3$, $k_2=-4$, $k_3=2$.	22.	$k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=-2$.
3.	$k_1=-2$, $k_2=7$, $k_3=3$.	13.	$k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=5$.	23.	$k_1=4$, $k_2=-4$, $k_3=-3$
4.	$k_1=1$, $k_2=5$, $k_3=3$.	14.	$k_1=-1$, $k_2=0$, $k_3=4$.	24.	$k_1=-1$, $k_2=-2$, $k_3=3$.
5.	$k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=4$.	15.	$k_1=0$, $k_2=-1$, $k_3=2$.	25.	$k_1=2$, $k_2=-4$, $k_3=1$.
6.	$k_1=3$, $k_2=1$, $k_3=2$.	16.	$k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$.	26.	$k_1=3$, $k_2=-5$, $k_3=2$.
7.	$k_1=2$, $k_2=5$, $k_3=3$.	17.	$k_1=-3$, $k_2=2$, $k_3=-1$.	27.	$k_1=5$, $k_2=2$, $k_3=-3$.
8.	$k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=7$.	18.	$k_1=-5$, $k_2=7$, $k_3=-3$.	28.	$k_1=1$, $k_2=3$, $k_3=-1$.
9.	$k_1=-3$, $k_2=-4$, $k_3=4$	19.	$k_1=2$, $k_2=5$, $k_3=-3$.	29.	$k_1=2$, $k_2=2$, $k_3=-1$.
10.	$k_1=3$, $k_2=3$, $k_3=-4$.	20.	$k_1=-2$, $k_2=3$, $k_3=1$.	30.	$k_1=3$, $k_2=-4$, $k_3=5$.
11.	$k_1=5$, $k_2=4$, $k_3=2$.	21.	$k_1=4$, $k_2=3$, $k_3=-3$.	31.	$k_1=2$, $k_2=-3$, $k_3=1$.

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення матриці.
2. Які лінійні операції можна виконувати з матрицями?
3. Що являє собою операція транспонування матриці?
4. Що таке ранг матриці?
5. Назвіть алгоритм оберненої матриці.

1.3 ВИЗНАЧНИКИ

Кожній квадратній матриці n -го порядку можна поставити у відповідність вираз, який називається визначником (детермінантом) матриці ***A*** та позначається

$$\Delta(A)=\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення. *Визначником* ***n****-го порядку квадратної числової матриці* ***A*** *порядку* **n** називають число, яке знаходиться з *елементів матриці* ***A*** *за певним правилом і позначають* |***A***|, *або* Δ, *або det A.*

Порядок визначника визначається кількістю рядків або стовбців.

Правило знаходження визначника 2 порядку: визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Правило знаходження визначника 3-го порядку

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Властивості визначників:

1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доведення. Для визначника другого порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{212}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Заміну у визначнику рядків на відповідні стовпці називають **транспонуванням** визначника.

Приклад 1. Перевіримо справедливість властивості на прикладі визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 4 + 0 + 6 - 0 - 24 = -42.$$

Поміняємо місцями рядки на стовпці:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 4 + 0 + 6 - 0 - 24 = -42.$$

Отже, величина визначника не змінюється при його транспонуванні., тобто його рядки і стовпці рівноправні.

Наслідок. З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

$$
i\text{-ий рядок}\rightarrow\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.
$$

Доведення. Доведення цієї властивості очевидне, оскільки при обчисленні визначника всі доданки містять нульові множники i-го рядка. Тому і сам визначник дорівнює нулю.

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Доведення. Поміняємо місцями рядки у визначнику другого порядку:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}
$$

Приклад 2. Поміняємо місцями перший і третій рядки визначника порядку із прикладу 1.

$$
\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 24 + 0 + 20 - 0 + 4 = 42.
$$

Отже, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$,

тобто має властивість 2.

4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Доведення. Для доведення цієї властивості поміняємо місцями i - й і k - ий рядки. З однієї сторони величина визначника не зміниться (оскільки однакові рядки), а з другої – зміниться знак на протилежний (згідно з властивістю 2). Якщо позначити величину визначника через Δ, то одержимо рівність $\Delta = -\Delta$, тобто $2\Delta = 0$, а значить $\Delta = 0$.

Приклад 3. Визначник третього порядку дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 10-12-15-12+15-10=0,$$

оскільки він має два стовпці.

5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число λ, то й визначник помножиться на λ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{1i} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай всі елементи i – го рядка визначника мають спільний множник λ. Оскільки, визначник дорівнює сумі добутків елементів, в т.ч. з розглянутого i – го, то λ можна винести з цієї суми за дужки. Якщо записати вираз в дужках у вигляді визначника, то одержимо попередню рівність.

Наслідок. Якщо довільний рядок (або стовпець) визначника помножити на число λ, то величина визначника зміниться в λ раз.

Зокрема, якщо елементи, наприклад, першого рядка визначника другого порядку мають спільний множник «λ», то

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. У визначнику третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -12 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 32+144-48+24-128-72=-48$$

елементи першого і другого рядків мають спільні множники «2» і «4», тому їх можна винести за знак визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -12 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 8(4+18-6+3-16-9) = -48$$

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай елементи i – го і κ – го рядків пропорційні. За властивістю 5 постійний множник пропорційності λ можна винести за знак визначника. При цьому одержимо добуток числа λ на визначник з двома однаковими рядками, який дорівнює нулю (за властивістю 4).

Приклад 5. Визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -30 + 36 - 0 + 0 + 30 - 36 = 0,$$

тому що перший і другий рядки пропорційні.

7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Доведемо справедливість цієї властивості на прикладі визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})a_{22} - (a_{12}+b_{12})a_{21} =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Приклад 6. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 4 + 0 + 0 - 16 - 9 = -51.$$

Елементи, наприклад,другого рядка можна представити у вигляді суми двох доданків:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2-2 & 3+2 & 2+1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-18+2+0+0-8-6) + (-12+2+0+0-8-3) = -30-21 = -51.$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число λ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i2}+\lambda a_{k2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Для доведення представимо визначник правової частини згідно з властивістю 7 у вигляді суми двох визначників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i1}+\lambda a_{k2} & \dots & a_{i1}+\lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В другому визначнику правої частини елементи *і*–го рядка пропорційні відповідним елементам *к* – го рядка, тому за властивістю 6 такий визначник дорівнює нулю. Отже, має місце властивість 8.

Приклад 7. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3+1\cdot(-3) & -2+(-3)(-3) & 5+2(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Тут ми до елементів третього рядка додали відповідні елементи першого рядка, помножені на число «-3».

Надалі, властивість 8 використовується для обчислення визначників вищих порядків. При цьому в довільному рядку (або стовпці) утворюємо всі нулі, крім одного елемента.

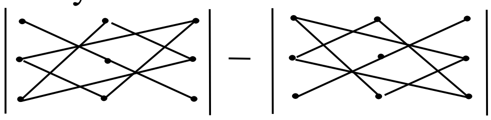
Нехай маємо визначник n–го порядку $(n \succ 3)$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Методи обчислення визначника

Правило трикутника

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему:



Три перших доданка із знаком (+) є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі. Три останні доданки у правій частині (5) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників із основами паралельними неголовній діагоналі

Правило Саррруса

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Метод зведення до трикутного вигляду

Теорема. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку діагональних елементів.

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має n рядків і n стовпців.

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ *елемента* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *визначника* $\boldsymbol{n}$*-го порядку називається визначник* $\boldsymbol{(n-1)}$ *порядку, який одержуємо з визначника* $|\boldsymbol{A}|$ *шляхом викреслювання* $\boldsymbol{i}$*-го рядка та* $\boldsymbol{j}$*-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент* $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Алгебраїчним доповненням $\boldsymbol{A_{ij}}$ *елемента* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком* $\boldsymbol{(-1)^{i+j}}$ *, тобто* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Обчислення визначників n-го порядку

Теорема Лапласа. *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.*

У випадку використання i*-го* рядка це правило математично можна записати так

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{ik} \cdot A_{ik} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Теорема (заміщення)

Нехай – алгебраїчні доповнення елементів i-го рядка визначника n-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тоді сума добутків алгебраїчних доповнень елементів i-го рядка на довільні числа $b_1, b_2, ..., b_n$ дорівнює такому визначнику n-го порядку Δ', у якого елементи i-го рядка є числа $b_1, b_2, ..., b_n$, а інші співпадають з відповідними елементами визначника Δ.

Тобто

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \cdot A_{i1} + \cdot b_2 \cdot A_{i2} + \ldots + b_k \cdot A_{ik} + \ldots + b_n \cdot A_{in}$$

Теорема (анулювання). Сума добутків елементів рядка або стовпця визначника n-го порядку на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка або стовпця цього самого визначника дорівнює нулю.

Розглянемо елементи i-го та k-го рядків

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Знайдемо суму добутків елементів i-го рядка на алгебраїчні доповнення елементів k-го рядка:

$$a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{kn}$$

За теоремою заміщення, цю у вихідному визначнику k-ий рядок можна замінити на елементи i-го рядка. Таким чином отримаємо визначник з двома однаковими рядками

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

За властивостями визначника цей визначник дорівнює нулю.

Метод зниження порядку (з попереднім зануленням рядка або стовбця)

Перш ніж скористатись теоремою Лапласа для зниження порядку, треба отримали якомога більше нулів в одному з рядків або стовбців.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити визначник за правилом трикутників:

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-(-4) \cdot 1 \cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Приклад 2. Обчислити визначник за правилом Сарруса:

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\Bigg| = 1\cdot 2\cdot 0 + 0(-4)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot 0 = 12 - 4 + 8 = 16\,.$$

Приклад 3.Утворити та обчислити мінор M_{12} для визначника Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Цей мінор утворено шляхом викреслення першого рядка та другого стовбця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 5 & \cancel{0} & 2 & 8 \\ -1 & \cancel{1} & 1 & 2 \\ 3 & \cancel{4} & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Приклад 4. Обчислити визначник за теоремою Лапласа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Приклад 5. Обчислити визначник шляхом зведення до трикутного вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} I\cdot(-3)+II \\ I\cdot(-2)+III \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} III\cdot 6 + II = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot 1 = -18$

Приклад 6. Обчислити визначник методом зниження порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} III стобець \cdot (-1) + I стовбець \\ I стовбець \cdot (-2) + IV стовбець \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -24$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначник матриці за правилом трикутника та правилом Сарруса:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 3 & 4 \\ 2 & k_2 & 7 \\ 1 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

Варіанти завдань

1. $k_1 = -2$, $k_2 = 7$, $k_3 = 3$.
2. $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$.
3. $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$.
4. $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$.
5. $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$.
6. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 7$.
7. $k_1 = -3$, $k_2 = -4$, $k_3 = 4$.
8. $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $k_3 = -4$.
9. $k_1 = 5$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$.
10. $k_1 = 3$, $k_2 = -4$, $k_3 = 2$.
11. $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$.
12. $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 4$.
13. $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$.
14. $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$.
15. $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$.
16. $k_1 = -5$, $k_2 = 7$, $k_3 = -3$.
17. $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = -3$.
18. $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$.
19. $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = -3$.
20. $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = -2$.
21. $k_1 = 4$, $k_2 = -4$, $k_3 = -3$.
22. $k_1 = -1$, $k_2 = -2$, $k_3 = 3$.
23. $k_1 = 2$, $k_2 = -4$, $k_3 = 1$.
24. $k_1 = 3$, $k_2 = -5$, $k_3 = 2$.
25. $k_1 = 5$, $k_2 = 2$, $k_3 = -3$.
26. $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = -1$.
27. $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$.
28. $k_1 = 3$, $k_2 = -4$, $k_3 = 5$.
29. $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, $k_3 = 1$.
30. $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $k_3 = 3$.

2) Обчислити визначник за теоремою Лапласа:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & k_2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & k_3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & k_4 \end{pmatrix}$$

3)Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & k_2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & k_3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & k_4 \end{pmatrix}$$

4) Обчислити визначник методом зниження порядку:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & k_2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & k_3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$$

Варіанти завдань

1. $k_1=-5$, $k_2=7$, $k_3=-3$, $k_4=0$.
2. $k_1=2$, $k_2=5$, $k_3=-3$, $k_4=1$.
3. $k_1=-2$, $k_2=3$, $k_3=1$, $k_4=4$.
4. $k_1=4$, $k_2=3$, $k_3=-3$, $k_4=1$.
5. $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=-2$, $k_4=5$.
6. $k_1=4$, $k_2=-4$, $k_3=-3$, $k_4=7$.
7. $k_1=-1$, $k_2=-2$, $k_3=3$, $k_4=0$.
8. $k_1=2$, $k_2=-4$, $k_3=1$, $k_4=1$.
9. $k_1=3$, $k_2=-5$, $k_3=2$, $k_4=2$.
10. $k_1=5$, $k_2=2$, $k_3=-3$, $k_4=9$.
11. $k_1=1$, $k_2=3$, $k_3=-1$, $k_4=0$.
12. $k_1=2$, $k_2=2$, $k_3=-1$, $k_4=1$.
13. $k_1=3$, $k_2=-4$, $k_3=5$, $k_4=3$.
14. $k_1=2$, $k_2=-3$, $k_3=1$, $k_4=2$.
15. $k_1=3$, $k_2=4$, $k_3=3$, $k_4=9$
16. $k_1=-2$, $k_2=7$, $k_3=3$, $k_4=0$.
17. $k_1=1$, $k_2=5$, $k_3=3$, $k_4=1$.
18. $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=4$, $k_4=7$.
19. $k_1=3$, $k_2=1$, $k_3=2$, $k_4=5$
20. $k_1=2$, $k_2=5$, $k_3=3$, $k_4=0$.
21. $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=7$, $k_4=1$.
22. $k_1=-3$, $k_2=-4$, $k_3=4$, $k_4=2$.
23. $k_1=3$, $k_2=3$, $k_3=-4$, $k_4=3$.
24. $k_1=5$, $k_2=4$, $k_3=2$, $k_4=1$.
25. $k_1=3$, $k_2=-4$, $k_3=2$, $k_4=2$.
26. $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=5$, $k_4=0$.
27. $k_1=-1$, $k_2=0$, $k_3=4$, $k_4=3$.
28. $k_1=0$, $k_2=-1$, $k_3=2$, $k_4=4$.
29. $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$, $k_4=0$.
30. $k_1=-3$, $k_2=2$, $k_3=-1$, $k_4=4$.

3. Побудувати всі можливі мінори третього порядку визначника запронованого нижче за умови, що він має містити мінор другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Скільки таких мінорів?

Записати алгебраїчне доповнення до елементів A_{23}, A_{42}, A_{54}.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 27 & -6 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 37 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ 3 & -13 & -2 & 8 & -7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Питання для самоконтролю

1. Назвіть методи обчислення визначника третього порядку?
2. Сформулюйте теорему Лапласа.
3. Назвіть властивості визначників.
4. Запишіть формулу алгебраїчного доповнення.
5. Що таке мінор?

1.4 РАНГ МАТРИЦІ ТА ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Рангом *матриці називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.*

Базисним мінором називається будь-який з відмінних від нуля мінорів матриці ***A,*** порядок якого дорівнює ріангу матриці ***A*** (***r(A)).***

Ранг матриці позначають ***r(A), rang, r***$_{\boldsymbol{A}}$ або просто ***r***.

Якщо $rangA = r \le \min(m,\, n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Методи обчислення рангу:

- *метод обвідних мінорів,*
- *за допомогою елементарних перетворень.*

Метод обвідних мінорів (окантування):

1) Знайти будь-який мінор першого порядку M_1 (тобто елемент матриці) відмінний від нуля.

Якщо такого мінору немає, то матриця ***A*** *нульова, а ранг* $r(A) = 0$.

Якщо такий мінор є, то переходимо до наступного кроку.

2) Обчислити мінори другого порядку, які містять M_1(так би мовити окантовуючи M_1). Обчислення проводять доти поки не знайдуть хоча б один мінор другого порядку відмінний від нуля.

Якщо такого мінору немає, то ранг $r(A) = 1$, *якщо є, то ранг* $r(A) \ge 2$.

3) Обчислювати (якщо вони існують) мінори k-го порядку, при цьому окантовуючи мінор ($k-1$)-го порядку.

Якщо таких мінор немає, або вони всі рівні нулю, то $r(A) = k-1$.

Якщо хоча б один з мінорів $M_k \ne 0$, *то* $r(A) \ge k$ *і процес продовжуємо.*

У загальному випадку визначення ранг матриці перебором всіх мінорів досить трудомістко. Для полегшення цієї задачі використовують перетворення, що зберігає ранг матриці.

За допомогою елементарних перетворень

Елементарні перетворення матриці не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці трикутного або східчастого вигляду.

У випадку квадратної матриці отримуємо матрицю у *трикутному вигляді*, тоді *ранг матриці дорівнює* кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

У випадку прямокутної матриці отримуємо *східчасту матрицю*, тоді *ранг матриці дорівнює* кількості її ненульових рядків.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** *A*, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Матриця називається ***невиродженою***, якщо її визначник не дорівнює нулю.

Теорема. *Будь-яка невироджена (визначник не дорівнює нулю) квадратна матриця має єдину обернену до неї матрицю.*

Обернену матрицю A^{-1} до матриці ***A*** можна знаходити за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & a_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці ***A***, (алгебраїчні доповнення до *i-го* рядка розташовані у ***i*** стовпці, (***i***= 1, 2, ..., ***n***).

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці ***A***.

   Якщо $|A| = 0$ *, то оберненої матриці не існує.*

   Якщо $|A| \neq 0$*, то переходимо до наступного кроку.*

2. Скласти матрицю із алгебраїчних доповнень до матриці ***A*.**
3. Транспонувати матрицю, складену з алгебраїчних доповнень. Отримаємо приєднану матрицю $\widetilde{A}$
4. Знайти обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$$

5. Перевірка: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Для розв'язання рівняння у матричному вигляді треба використати формулу:

$X = A^{-1}B$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайти ранг матриці A методом обвідних мінорів, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$. Проте матриця A має й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

Приклад 2. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для матриці розмірністю 3×4 ранг $r(A)\leq \min(3;4)=3$.

Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці.

Поміняємо місцями перший і другий стовпці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I\cdot(-4)+II \\ I\cdot(-1)+III \\ I\cdot(-2)+IV \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} I стовбець\,(-2) \\ I стовбець\,(-1) \\ I стовбець\,(-3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} II\cdot(-\frac{1}{9}) \\ \sim III\cdot(-\frac{1}{5}) \sim \\ IV\cdot(-\frac{1}{3}) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} II\cdot(-1)+III \\ II\cdot(-1)+IV \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} II стобвець\,(-1)+III стовбця \\ II стобвець\,(-2)+IV с V стовб \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

З остаточного вигляду матриці після виконання елементарних перетворень випливає, що її ранг дорівнює 2, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.

Приклад 3. Знайти матрицю, обернену матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання

Знайдемо визначник даної матриці: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$, виходить обернена матриця існує. Алгебраїчні доповнення елементів матриці *A:*

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -16$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 11$; $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $A_{35} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 11$.

Одержимо: $A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Перевірка: $AA^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно, $A^{-1}A = E$.

Приклад 4. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обчислимо:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=15-10=5.$$

$\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння у матричному вигляді $A\cdot X=B$.

Тоді $X=A^{-1}\cdot B$.

Тобто, треба знайти обернену матрицю A^{-1}.

$|A|=-4\neq 0$, обернена матриця існує.

Знайдемо .

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=-4. \qquad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=3.$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=12. \qquad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=-4.$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}=-12. \qquad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}=1.$$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1.$ $\qquad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.$

$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень до елементів заданої матриці**:**

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо її та отримаємо приєднану матрицю:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця матиме вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв’язок заданої системи:

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -17 & -11 & 4 \\ 28 & 24 & -8 \\ -15 & -21 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & \frac{11}{4} & -1 \\ -7 & -6 & 2 \\ \frac{15}{4} & \frac{21}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Задана матриця A. Знайти матрицю A^{-1} та встановити, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Варіанти завдань

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	29. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	20. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2. Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 2 \\ 1 & k_2 & -1 \\ -1 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} k_4 & 2 & 1 \\ -4 & k_5 & 5 \\ 1 & 3 & k_6 \end{pmatrix}.$$

Варіанти завдань

1. $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$, $k_4 = 0$, $k_5 = 7$, $k_6 = 5$.
2. $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $k_4 = 2$, $k_5 = 6$, $k_6 = 8$.
3. $k_1 = 3$, $k_2 = -1$, $k_3 = 8$, $k_4 = -1$, $k_5 = 2$, $k_6 = 4$.
4. $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$, $k_4 = 5$, $k_5 = 3$, $k_6 = 9$.
5. $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$, $k_4 = 0$, $k_5 = 7$, $k_6 = 5$.
6. $k_1 = 4$, $k_2 = 5$, $k_3 = -2$, $k_4 = 7$, $k_5 = 10$, $k_6 = -1$.
7. $k_1 = 3$, $k_2 = 10$, $k_3 = 7$, $k_4 = -4$, $k_5 = 8$, $k_6 = 1$.
8. $k_1 = 7$, $k_2 = 4$, $k_3 = 0$, $k_4 = 3$, $k_5 = 10$, $k_6 = 2$.
9. $k_1 = 9$, $k_2 = 5$, $k_3 = 4$, $k_4 = 0$, $k_5 = 6$, $k_6 = 7$.
10. $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $k_3 = -5$, $k_4 = 10$, $k_5 = -1$, $k_6 = 2$.
11. $k_1 = -4$, $k_2 = 7$, $k_3 = 8$, $k_4 = 9$, $k_5 = 2$, $k_6 = 5$.
12. $k_1 = -2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 9$, $k_4 = 3$, $k_5 = 1$, $k_6 = 6$.
13. $k_1 = 4$, $k_2 = 1$, $k_3 = 10$, $k_4 = -2$, $k_5 = 3$, $k_6 = 7$.
14. $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $k_4 = 4$, $k_5 = 0$, $k_6 = 10$.
15. $k_1 = 1$, $k_2 = 8$, $k_3 = 8$, $k_4 = 7$, $k_5 = 9$, $k_6 = 3$.
16. $k_1 = 10$, $k_2 = 0$, $k_3 = 7$, $k_4 = 8$, $k_5 = 5$, $k_6 = 1$.
17. $k_1 = 3$, $k_2 = 7$, $k_3 = 0$, $k_4 = 9$, $k_5 = 1$, $k_6 = 5$.
18. $k_1 = 0$, $k_2 = 4$, $k_3 = 9$, $k_4 = 3$, $k_5 = 7$, $k_6 = 1$.
19. $k_1 = 8$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $k_4 = 9$, $k_5 = 3$, $k_6 = 4$.
20. $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 6$, $k_4 = 0$, $k_5 = 2$, $k_6 = 8$.
21. $k_1 = 7$, $k_2 = -4$, $k_3 = 8$, $k_4 = 2$, $k_5 = 1$, $k_6 = 5$.
22. $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 9$, $k_5 = 4$, $k_6 = 7$.
23. $k_1 = -4$, $k_2 = 7$, $k_3 = 2$, $k_4 = 8$, $k_5 = 1$, $k_6 = 5$.
24. $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 4$, $k_4 = 2$, $k_5 = 3$, $k_6 = 9$.
25. $k_1 = 5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 8$, $k_4 = 1$, $k_5 = 6$, $k_6 = 3$.
26. $k_1 = 4$, $k_2 = 9$, $k_3 = 2$, $k_4 = 3$, $k_5 = 5$, $k_6 = 0$.
27. $k_1 = 3$, $k_2 = 8$, $k_3 = 5$, $k_4 = 9$, $k_5 = 1$, $k_6 = 7$.
28. $k_1 = 0$, $k_2 = 7$, $k_3 = 8$, $k_4 = 2$, $k_5 = 3$, $k_6 = 4$.

29. $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 10$, $k_4 = 3$, $k_5 = 7$, $k_6 = 9$.

30. $k_1 = 8$, $k_2 = 7$, $k_3 = 2$, $k_4 = 0$, $k_5 = 1$, $k_6 = 5$.

3. Знайти ранг матриці A (методом елементарних перетворень або обвідних мінорів):

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & k_2 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & k_3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Варіанти завдань

1. $k_1 = -5$, $k_2 = 7$, $k_3 = -3$.
2. $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$.
3. $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 8$.
4. $k_1 = 9$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$.
5. $k_1 = 4$, $k_2 = 6$, $k_3 = -1$.
6. $k_1 = 1$, $k_2 = -3$, $k_3 = 7$.
7. $k_1 = 5$, $k_2 = 8$, $k_3 = 3$.
8. $k_1 = -4$, $k_2 = 2$, $k_3 = -7$.
9. $k_1 = 10$, $k_2 = 5$, $k_3 = 6$.
10. $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$.
11. $k_1 = 7$, $k_2 = 9$, $k_3 = 2$.
12. $k_1 = 8$, $k_2 = -2$, $k_3 = 3$.
13. $k_1 = 4$, $k_2 = 7$, $k_3 = 9$.
14. $k_1 = 6$, $k_2 = 3$, $k_3 = 7$.
15. $k_1 = -8$, $k_2 = 4$, $k_3 = -3$.
16. $k_1 = 2$, $k_2 = 6$, $k_3 = 8$.
17. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 6$.
18. $k_1 = 5$, $k_2 = -1$, $k_3 = 4$.
19. $k_1 = -8$, $k_2 = 5$, $k_3 = -4$.
20. $k_1 = 3$, $k_2 = 8$, $k_3 = 5$.
21. $k_1 = 7$, $k_2 = 4$, $k_3 = 3$.
22. $k_1 = -2$, $k_2 = 7$, $k_3 = 10$.
23. $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 7$.
24. $k_1 = 9$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$.
25. $k_1 = 6$, $k_2 = 9$, $k_3 = 8$.
26. $k_1 = -4$, $k_2 = 6$, $k_3 = -9$.
27. $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$.
28. $k_1 = -1$, $k_2 = 7$, $k_3 = -6$.
29. $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 9$.
30. $k_1 = 8$, $k_2 = -1$, $k_3 = 7$.

Питання для самоконтролю

1. Що являє собою операція транспонування матриці?
2. Що таке ранг матриці?
3. Методи обчислення рангу матриці.
4. Назвіть алгоритм оберненої матриці.

РОЗДІЛ 2. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Різновиди систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система алгебраїчних рівнянь називається **лінійною**, якщо вона може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{ki}x_i + \ldots + a_{kn}x_n + b_k \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

де $\mathbf{x_1, x_2, \ldots ,x_n}$ - невідомі; $\boldsymbol{a}_{\mathbf{ij}}$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами системи (індекс **i** вказує рівняння, а індекс **j** невідоме, при якому записано цей коефіцієнт); $\mathbf{b_k}$ **(k =1, 2,…, m)** – вільні (від невідомих) члени або їх називають правими частинами рівнянь.

Якщо $\mathbf{b_k = 0}$ для усіх **k = 1,2, …, m**, тоді систему називають **однорідною**. Якщо хоч би один вільний член $\mathbf{b_k}$ не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається **неоднорідною.**

Розв'язком системи (2.1) називається множина дійсних чисел $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, **…,** $\boldsymbol{a_n}$**,** підстановка яких у систему замість невідомих $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, перетворює кожне рівняння системи у тотожність (іноді кажуть, що ця множина задовольняє систему рівнянь).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що має хоч би один розв'язок, називається **сумісною**, а система, що не має розв'язку, називається **несумісною.**

Теорема Кронекера - Капеллі

Позначимо через $\boldsymbol{A}$ основну матрицю системи (2.1), яка складена з коефіцієнтів при невідомих, а через $\tilde{\boldsymbol{A}}$ або $A|B$– розширену матрицю цієї системи, яка одержана шляхом доповнення матриці $\boldsymbol{A}$ стовпцем вільних членів, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь **(2.1)** сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці

$r(A) = r(A|B)$

Причому, можливі три випадки:

1) $r(A) = r(A|B) = n$ - *(n- кількість невідомих в системі)* система сумісна і має єдиний розв'язок,

2) $r(A) < r(A|B)$ *– система несумісна,*

3) r(A) = r($A|B$) < n – система сумісна та невизначена (має безліч розв'язків).

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають ***еквівалентними,*** *якщо їх розв'язки співпадають.*

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має нескінченну кількість розв'язків у таких випадках:

1) коли однорідна система має ***n*** рівнянь з ***n*** невідомими і її основний визначник Δ дорівнює нулю;

2) коли кількість рівнянь неоднорідної системи не дорівнює кількості невідомих, а система рівнянь є сумісною;

3) коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих та дорівнює ***n***, система рівнянь сумісна $\mathbf{r(A) = r(}A|B\mathbf{) = r}$ але $\mathbf{r} < \boldsymbol{n}$.

Базисним мінором матриці називається відмінний від нуля мінор, порядок рівний рангу матриці.

Загальна схема розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

припустимо, що $r(A)=r(\tilde{A})=r$. При цьому, $r<n$. Для знаходження розв'язків системи візьмемо r рівнянь, в яких коефіцієнти при невідомих утворюють базисний мінор. Інші рівняння відкидаємо. Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор, називають **основними** (або **базисними**) і залишають зліва. Інші $(n-r)$ невідомі називають **вільними** і переносять в праві частини рівнянь. Надаючи довільних числових значень вільним невідомим, знаходимо відповідні значення основних невідомих.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має однакову кількість рівнянь та невідомих, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.2)$$

Якщо основний визначник Δ цієї системи (визначник основної матриці коефіцієнтів цієї системи) не дорівнює нулю, то ранги основної та розширеної матриць системи будуть рівними і дорівнюватимуть кількості невідомих ***n***. Отже, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі така система має єдиний розв'язок. У випадку $\boldsymbol{b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0}$ система (2.2) *однорідна*, її єдиний розв'язок тривіальний, тобто $\boldsymbol{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}$.

Система однорідних лінійних рівнянь має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{\Delta(A) = 0}$.

Якщо система (2.2) *неоднорідна*, її єдиний розв'язок можна знаходити різними способами.

2.2 Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь
Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.3)$$

Теорема. Якщо основний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими (2.3), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — основний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (2.3);

Δ_j — визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в основному визначнику на стовпець вільних членів.

Матричний метод

Якщо позначити

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

То згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

у матричній формі: $\boldsymbol{AX=B}$

Таким чином: $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$

Для розв'язування неоднорідної системи $\boldsymbol{n}$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими матричним методом доцільно застосувати такий алгоритм:

1) Знайти визначник основної матриці Δ:

якщо $\Delta = 0$, то система розв'язку не має.

якщо $\Delta \neq 0$, тоді знайти обернену матрицю $\boldsymbol{A^{-1}}$ до матриці $\boldsymbol{A}$.

2) Помножити обернену матрицю $\boldsymbol{A^{-1}}$ на матрицю-стовпець вільних членів системи. Одержаний при цьому стовпець і буде розв'язком системи.

Методи Ґаусса

Суть метода Ґаусса полягає в тому, що шляхом елементарних перетворень систему треба привести до трикутного вигляду, коли усі елементи головної діагоналі основної матриці системи дорівнюють 1, а елементи основної матриці, що знаходяться нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий вигляд системи дозволяє знайти усі невідомі. Метод Ґаусса можна застосувати і до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що мають єдиний розв'язок.

Метод Жордана-Гаусса

Метод Жордана-Гаусса полягає в **повному виключенні невідомих.**

Суть методу.

За перше рівняння візьмемо таке рівняння, в якому коефіцієнт (його назвемо **ключовим елементом**) біля x_1 відмінний від нуля і розділимо на нього все рівняння. З допомогою цього рівняння виключимо невідоме x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Аналогічно невідоме x_2 виключимо в усіх рівняннях, крім другого і т.д. При цьому можливі три випадки.

1. Ліва частина *i*-го рівняння системи перетворилась в нуль, а права частина рівна деякому числу, відмінному від нуля. Це значить, що система лінійних рівнянь немає розв'язків.

2. Ліва і права частини *i*-го рівняння системи перетворились в нуль. В цьому випадку *i*-те рівняння можна відкинути.

3. У випадку використання всіх рівнянь, в процесі виключення невідомих, одержуємо розв'язок даної системи.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні вихідної системи коефіцієнт біля x_1 рівний нулю, то можна взяти інше рівняння, в якому за ключовий елемент візьмемо відмінний від нуля коефіцієнт при x_1.

Особливо зручно користуватись методом Жордана-Гаусса в матричній формі, яка представлена таблицею. При цьому її перетворення здійснюється з допомогою певних кроків.

1. Вибираємо ключовий елемент $a_{ij} \neq 0$. Ключовий рядок на кожному етапі вибирається інший так, щоб йому відповідала тільки одна невідома.

2. Елементи *i*-го рядка (ключового) ділимо на a_{ij} і записуємо в *i*-ий рядок наступної розрахункової таблиці.

3. Елементи ключового стовпця (крім ключового елемента, який рівний 1) записуємо нульовими.

4. Інші елементи наступної розрахункової таблиці (в тому числі і контрольного стовпця) обчислюємо за формулою

$$a_{kl}{}' = a_{kl} - \frac{a_{il}}{a_{ij}} a_{kl} \qquad (k = 1,2,\ldots,n; l = 1,2,\ldots,n; k \neq i; k \neq l).$$

Перехід від однієї матриці-таблиці до іншої за методом Жордана-Гаусса називається **симплексним перетворенням** матриць-таблиць.

Зауваження 1. Ключовий елемент вибирається тільки один раз у відповідному рядку або стовпці.

Зауваження 2. Ключовий елемент не вибирається серед вільних членів, тобто серед елементів b_i.

Зауваження 3. Для спрощення обчислень в якості ключового елемента доцільно вибирати найменший і не обов'язково a_{ll}.

2.3 Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо вона має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}xn = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Система (2.4) одержується із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1), якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Розширена матриця $A|B$, якщо приєднати нульовий стовпець. Значить ранг A рівний рангу розширеної матриці $A|B$. При цьому за теоремою Кронекера-Капеллі вихідна система завжди сумісна.

Якщо ранг матриці A системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості невідомих $(rang = n)$, то система має єдиний нульовий (тривіальний) розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Це випливає з теореми Крамера, оскільки всі визначники Δ_j одержуються із визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

заміною j-го стовпця стовпцем із вільних членів $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, …, $b_n = 0$, а тому $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{0}{\Delta} = 0$.

Значить, система n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має нульові розв'язки тільки тоді, коли визначник системи, складеної із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих відмінний від нуля.

Система n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має ненульові розв'язки тільки тоді, коли визначник системи, складеної із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих дорівнює нулю $(\Delta = 0)$. Тобто, система має ненульові розв'язки тільки тоді, коли $rang(A) < n$, де $rang(A)$ - ранг матриці A, а n - кількість невідомих.

ТЕОРЕМА. Якщо визначник Δ системи n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими дорівнює нулю, а серед алгебраїчних доповнень A_{ij} $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$ елементі *i*–го рядка є ненульові, то ця система має ненульовий розв'язок: $x_j = A_{ij} \cdot t$.

Доведення. Підставивши розв'язок $x_j = A_{ij} \cdot t$ в систему рівнянь (2.4) при $m = n$, одержимо:

$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = (a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in})t = 0 \cdot t = 0$, при $k \neq i$ (за теоремою анулювання);

$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = (a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in})t = \Delta \cdot t = 0$, при $k = i$ (за умовою теореми).

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4= & 8 \\ x_1-3x_2 \qquad -6x_4= & 9 \\ \quad 2x_2-x_3+\ 2x_4= & -5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4= & 0 \end{cases}.$$

Розв'язання

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27; \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108; \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27; \quad \Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

x_1=81/27=3; x_2=(-108)/27=-4; x_3=(-2727)/ =-1; x_4=27/27=1.

Отже, розв'язком цієї системи буде (3;-4;-1;1).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$$

Розв'язання

Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент $\boldsymbol{a_{11}}$ основної матриці дорівнював 1.

Одержимо:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 2x-4y+3z=1 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$$

Тепер перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до другого (щоб одержати $\boldsymbol{a_{21}}$ = 0), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати $\boldsymbol{a_{31}}$ = 0). Тоді будемо мати систему

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ \qquad -5z=-5 \\ \quad 5y-7z=-7 \end{cases}$$

Тепер друге рівняння поділимо на (-5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ \quad y-\frac{7}{5}z=-\frac{7}{5} \\ \qquad z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-4\cdot1+2y \\ y=\frac{7}{5}\cdot1-\frac{7}{5} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Отже, система має єдиний розв'язок (-1,0,1).

Зауваження. Елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. Розв'язування прикладу 1 у такий спосіб виглядає так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Приклад 3. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$$

Розв'язання

Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 32 + 10 + 60 - 12 - 4 = 31 \neq 0$$

Для запису оберненої матриці $\boldsymbol{A^{-1}}$ знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці $\boldsymbol{A}$:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$; $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1$;

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-16) = 22$; $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 20 = -23$;

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14$; $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1+8) = -9$;

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-10) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 14 & -23 & 6 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 22 & -23 & 6 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5\cdot(-2)+(-1)\cdot(-8)+7\cdot(-13) \\ 22\cdot(-2)+(-23)\cdot(-8)+6\cdot(-13) \\ 14\cdot(-2)+(-9)\cdot(-8)+1\cdot(-13) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ 62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком цієї системи буде (-3;2;1).

Приклад 4. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом
$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16, \end{cases}$$

Розв'язання

Перепишемо систему у вигляді $AX=B,$ де $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$

Розв'язання матричного рівняння має вигляд $X=A^{-1}B.$ Знайдемо $A^{-t}.$ Маємо $D_A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28-30-4=-6.$

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14, \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5, \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Таким чином, $A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, звідки

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ 18+14+16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x=2,$ $y=3,$ $z=-2.$

Приклад 5. Дослідити сумісність системи, і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень, що виконуються над рядками матриці, приведемо її до східчастого вигляду:

$$\vec{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & -9 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -20 & -15 & -10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Замітимо, що при приведенні до східчастого вигляду можлива також переміна місцями стовпців.

Отримали:

$rangA = rang\, A|B = r = 2 < 4 = n$, n- число змінних. Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна; система має безліч розв'язків, бо $rang(A) < n$. Розв'язання здійснюємо методом Гауса. *Базисні змінні* - x_1, x_2 (їх кількість дорівнює рангу матриці, виберемо ненульовий мінор другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, його стовбці відповідають x_1, x_2, отже це базисні змінні, а решта вільні); *вільні змінні* - x_3, x_4.

Ставимо у відповідність перетвореній розширеній матриці системи скорочену систему, яку розв'язуємо знизу уверх:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ \quad x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 7x_3 + 2x_4 - 1; \\ \quad x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 1 = -4x_3 - 3x_4 + 2 + 7x_3 + 2x_4 - 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_4 + 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \qquad x_3, x_4 \in R. \end{cases}$$

Запишемо загальний розв'язок у вигляді $X(x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_3 - x_4 + 1 \\ 4x_3 + 3x_4 - 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, де $x_3, x_4 \in R.$

Нехай, наприклад, $x_3 = 0,\quad x_4 = 0.$ Отримаємо *частинний розв'язок* $X(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$

Перевірка. Підставимо отриманий частинний розв'язок у систему:

$$\begin{cases} 1-2-0-0=-1; \\ -1-4-0-0=-5; \\ 2-2-0-0=0; \\ -3-4+0-0=-7. \end{cases}$$

Система розв'язана вірно.

Приклад 6. Розв'язати методом Жордана-Гаусса систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

Розв'язування. Запишемо задану систему в табличній формі. За ключовий елемент тут взято коефіцієнт «2» при x_1 в першому рівнянні і взято в рамки.

Таблиця 1. За ключовий елемент взято число «2». Поділивши на нього елементи першого рядка, одержимо відповідні елементи першого рядка таблиці 2 (на це вказує число «$\frac{1}{2}$» в першому рядку поза таблицею).

Таблиця 2. Напроти першого рядка записано число «-4» і направлена стрілка до другого рядка табл. 1. Це означає, що елементи першого рядка множаться на «-4» і додаються до відповідних елементів другого рядка табл. 1. Число «-3» і стрілка, направлена до третьої стрічки означає, що на це число «-3» множаться всі елементи першого рядка табл. 2 і додаються до відповідних елементів третього рядка табл. 1. Цим способом в табл. 2 в першому стовпці під числом «1» отримали нульові елементи. За ключовий елемент цієї таблиці вибираємо число «1» в другому рядку (взято в рамку). Запис «$-\frac{1}{2}$» із стрілкою до першого рядка означає, що елементи ключового рядка другої таблиці потрібно помножити на «$-\frac{1}{2}$» і додати до відповідних елементів першого рядка. Цим самим отримаємо елементи таблиці 3.

Аналогічно - «$\frac{5}{2}$» і стрілка до третього рядка означає множення елементів ключового рядка цієї таблиці на «$\frac{5}{2}$» і додавання до відповідних чисел третього рядка для запису в третьому рядку таблиці 3.

Результатом виконання дії цієї таблиці є включення невідомої x_1 із другої третього рівнянь системи.

Таблиця 3. За ключовий елемент цієї таблиці взято «$\frac{59}{2}$» із третього рядка і третього стовпця (взято в рамку). Запис «$\frac{2}{59}$» в цій стрічці поза таблицею означає, що всі її елементи треба помножити на це число, тобто робимо ключовий елемент одиницею. Результат множення записуємо третім рядком табл. 4. Підсумком виконання цих дій табл. 3 є виключення невідомої x_2 з першого і третього рівнянь.

Таблиця 4. Числа «-9» і «$\frac{13}{2}$», які записані справа від таблиці із стрілками до другого і першого рядків табл.3 означають: елементи третього рядка табл. 4 множимо на «-9» і «$\frac{13}{2}$» і додаємо до відповідних елементів другого і першого рядків табл.

<table>
<tr><th>№ таблиці</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>b_i</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>2</td><td>1</td><td>-4</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-1</td><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td>1/2</td><td>-2</td><td>-1/2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>9</td><td>8</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-\frac{5}{2}$</td><td>7</td><td>$\frac{19}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>1</td><td>0</td><td>$-\frac{13}{2}$</td><td>$-\frac{9}{2}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>9</td><td>8</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{59}{2}$</td><td>$\frac{59}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Останній таблиці 4 відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 2, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -1, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 1, \end{cases}$$

тобто $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 1$ є розв’язком вихідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 7. Розв’язати систему лінійних однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Так як кількість рівнянь ***(m=3)*** співпадає з кількістю невідомих ***(n=3)***, а визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 6 - 9 - 4 - 2 = -16.$$

системи відмінний від нуля, то задана система лінійних однорідних рівнянь має тільки нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 8. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Знайдемо ранг матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих. Для цього зведемо її до діагонального вигляду з допомогою елементарних перетворень:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ранг останньої матриці, а значить, і еквівалентної їй матриці ***A*** дорівнює ***3*** ***(r=3)*** і менший, ніж число невідомих, а тому вихідна система має ненульові розв'язки. Візьмемо ті рівняння заданої системи, в яких коефіцієнти при невідомих утворюють базисний мінор, наприклад:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 01 \end{vmatrix} = -1 + 8 + 2 - 1 = 8,$$

який відмінний від нуля.

Задана система лінійних рівнянь еквівалентна такій:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ x_1 + x_4 + x_5 = -3x_2 + x_3, \\ 2x_1 + x_4 = -6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Розв'яжемо її, відносно невідомих x_1, x_4, x_5, методом Гаусса.

Виключимо x_1 в другому і третьому рівняннях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -7x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Виключимо x_4 в третьому рівнянні

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -\frac{8}{3}x_5 = 0. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо, що $x_5 = 0$, а значить, і $x_4 = 0$ (із другого рівняння). З першого рівняння одержимо $x_1 = -3x_2 + x_3$.

Таким чином, $x_1 = -3x_2 + x_3$, $x_4 = x_5 = 0$.

При довільних значеннях вільних невідомих x_2 і x_3 одержимо відповідні значення базисних невідомих. Наприклад, один із часткових розв'язків такий: $x_1 = -2; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 0; x_5 = 0$.

Приклад 9. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 12 + 5 - 6 - 9 - 20 = 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів, наприклад, першого рядка:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4, A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

Задана система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь має розв'язок $x_1 = -2t; x_2 = -4t; x_3 = 6t$, який залежить від параметра ***t*.**

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати систему рівнянь трьома методами: 1) матричним методом; 2) за формулами Крамера; 3) методом Гауса.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 2x_3 = 6; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-1; \\ 3x_1-x_2+2x_3=3; \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3; \\ 2x_1+x_2-3x_3=0; \\ x_1-2x_2-x_3=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=8; \\ 3x_1-x_2+x_3=4; \\ x_1+2x_2-x_3=4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6; \\ 4x_1-2x_2-2x_3=0; \\ 3x_1+x_2-3x_3=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1; \\ 3x_1-2x_2-x_3=0; \\ 3x_1-x_2-3x_3=9. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1; \\ 4x_1-3x_2-x_3=2; \\ 4x_1+2x_2+x_3=-8. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-3; \\ 3x_1+2x_2+x_3=2; \\ 4x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-4; \\ 3x_1-x_2-2x_3=3; \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=-1; \\ 3x_1+2x_2-x_3=1; \\ x_1-3x_2+2x_3=0. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0; \\ 2x_1+3x_2+3x_3=2; \\ 3x_1+2x_2-5x_3=8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=-2; \\ 2x_1-x_2+x_3=-1; \\ 2x_1+3x_2-2x_3=6. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 5x_1+3x_2 4x_3=6; \\ 3x_1+x_2+x_3=1; \\ 4x_1-2x_2-x_3=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3; \\ 3x_1+x_2-x_3=2; \\ 4x_1+2x_2-5x_3=-7. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3=0; \\ 2x_1-x_2+x_3=5; \\ 4x_1-3x_2-2x_3=4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-1; \\ 4x_1-5x_2-x_3=0; \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=-1; \\ 4x_1+x_2-3x_3=1; \\ 5x_1-x_2-4x_3=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1; \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-2; \\ 4x_1+4x_2-5x_3=0. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3=-2; \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+3x_3=6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3=2; \\ 4x_1+x_2+x_3=2; \\ 5x_1-3x_2-2x_3=-2. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x_1-4x_2-x_3=2; \\ 2x_1-3x_2-x_3=1; \\ x_1-5x_2+x_3=12. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2; \\ 5x_1+4x_2+x_3=0; \\ 6x_1-x_2-2x_3=-2. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=10; \\ 6x_1-3x_2-x_3=3; \\ x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16; \\ 5x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=8; \\ -x_1+2x_2+3x_3=8; \\ -x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

2. Дослідити сумісність системи, і у випадку сумісності знайти загальний розв’язок та один частинний розв’язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв’язку.

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3; \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 4; \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -10. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2; \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -10; \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -4; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = -4; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 +{} = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4; \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1; \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3; \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1; \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8; \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 8x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 3; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4; \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3. ***Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь***:

1. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 0; \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 4x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

Питання для самоконтролю

1. Запишіть систему лінійних рівнянь у загальному вигляді.
2. Назвіть методи розв’язування систем лінійних рівнянь.
3. Запишіть формули Крамера.
4. У чому полягає метод Гауса?
5. Назвіть етапи розв’язування систем лінійних рівнянь матричним методом.
6. Як перевірити систему на сумісність? Яка система називається однорідною?

РОЗДІЛ 3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

3.1 Вектори та дії з ними

Вектором називається напрямлений відрізок.

Позначаються вектори $\vec{a},\vec{b}$, ...

Якщо точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, то маємо вектор $\vec{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором.***

Вектор **вважається заданим**, коли відома його довжина $|\vec{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ і $\bar{b}=(b_1,...,b_n)$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих та якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються ***рівними,*** коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають **вільними**.

Нульовим вектором називається вектор $\bar{0}=(0;...;0)$.

Добутком вектора $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ на число k називається вектор $k\bar{a}=(ka_1,...,ka_n)$.

Сумою векторів $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ та $\bar{b}=(b_1,...,b_n)$ називається вектор $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$. Графічно суму векторів можна пнердставити (рисунок 3.1)

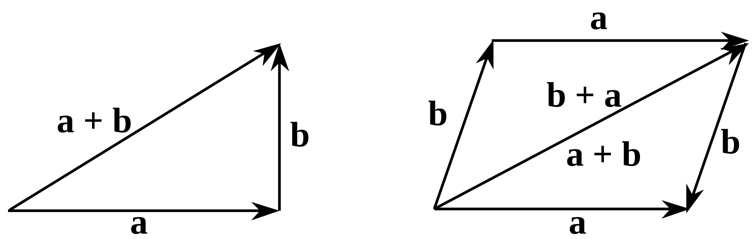


Рисунок 3.1 – Сума векторів

Додавання векторів комутативне, тобто для довільних векторів **a** і **b** справджується рівність

a + b = b + a.

Додавання векторів асоціативне, тобто для будь-яких векторів **a**, **b**, **c** виконується рівність

(**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**).

Цю властивість, що випливає з означення суми векторів, можна унаочнити (рисунок 3.2)

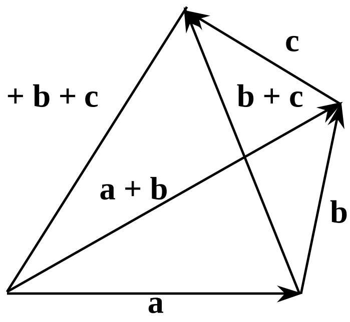


Рисунок 3.2 – Сума векторів

Віднімання векторів — операція, обернена до їх додавання. Різниця **b – a** векторів **a** і **b** являє собою вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рисунок 3.3).

a + (**b** – **a**) = **b**

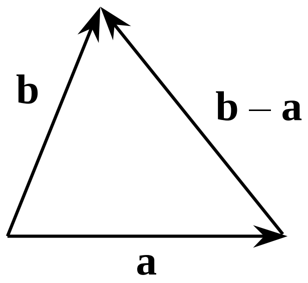


Рисунок 3.3 – Різниця векторів

Для будь-яких векторів **a**, **b** виконуються нерівності:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|,\ \ |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Модулем (довжиною) вектора $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ називається число $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$.

Отже, координати точки *C (x, y)*, яка ділить відрізок *AB* у відношенні λ (рахуючи від *A* до *B*), обчислюються за формулами

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Якщо точка *C* є серединою відрізка *AB*, то $\lambda = 1$ і тоді

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх **косинуси** можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

У подальшому називатимемо їх ***напрямними косинусами*** *вектора* $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул до квадрата, дістанемо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Кут φ між векторами $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ та $\bar{b}=(b_1,...,b_n)$ задається формулою $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Кут між двома векторами $\overline{a_1}(x_1;y_1;z_1)$ та $\overline{a_2}(x_2;y_2;z_2)$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Вектори називаються **ортогональними**, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Це виконується за умови cosφ=0 , тобто при φ=90^0.

Розглянемо прямокутну систему координат на площині та вектори $\bar{i}=(1;0)$ і $\bar{j}=(0;1)$ на цій площині (рисунок 3.4). Ці вектори (вони ортогональні і їхня довжина дорівнює одиниці) називають ***ортами***.

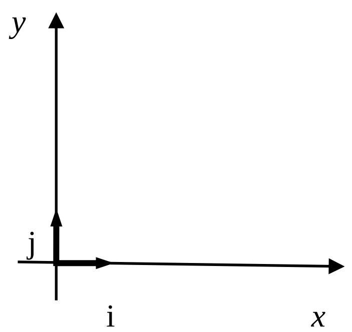


Рисунок 3.4 – Ортогональні вектори у прямокутній декартовій системи координат

Розглянемо також просторову систему координат з ортами $\bar{i}=(1;0;0)$, $\bar{j}=(0;1;0)$ та $\bar{k}=(0;0;1)$ (рисунок 3.5).

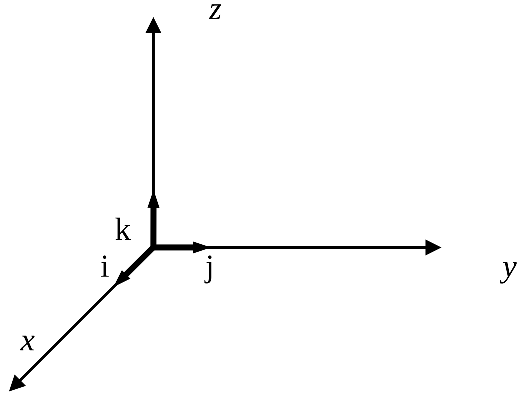


Рисунок 3.5 – Ортогональні вектори у просторі

Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* і $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Такі вектори надалі називатимемо **одиничними** векторами осей системи координат.

Кожен вектор в *n*-вимірному просторі єдиним способом розкладається по координатних осях.

Зокрема, в тривимірному просторі

$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$,

а в двовимірному

$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$.

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
4. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

3.2 Скалярний, векторний ат мішаний добутки

Скалярним добутком векторів $\bar{a} = (a_1,...,a_n)$ та $\bar{b} = (b_1,...,b_n)$ називається *число:*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + ... + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \ .$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi ,$$

де φ — кут між векторами

Необхідною і достатньою ***умовою перпендикулярності*** *векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *є* $a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = 0$

Необхідною і достатньою ***умовою паралельності*** *векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *є*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

***Властивості скалярного добутку*:**

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
4. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$ якщо $\vec{a} \perp \vec{b},$ і навпаки, $\vec{a} \perp \vec{b},$ якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,\ \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

Векторним добутком векторів $\overline{a_1}(x_1; y_1; z_1)$ та $\overline{a_2}(x_2; y_2; z_2)$ називається вектор

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторний добуток задовольняє, зокрема, таку властивість:

$|\bar{c}| = |\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}| \cdot \sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
3. $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Модуль мішаного добутку трьох неколінеарних векторів дорівнює *об'єму паралелепіпеда*, побудованого на векторах як на сторонах:

$$V=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha\cdot\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin\varphi=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\alpha=\left|\vec{a}\left(\vec{b}\times c\right)\right|.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

Нехай у просторі задано деяку вісь *l* і вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки *A* і *B* площини, перпендикулярно до осі *l* (рисунок 3.6). Позначимо точки перетину цих площин з віссю *l* відповідно A' і B'.

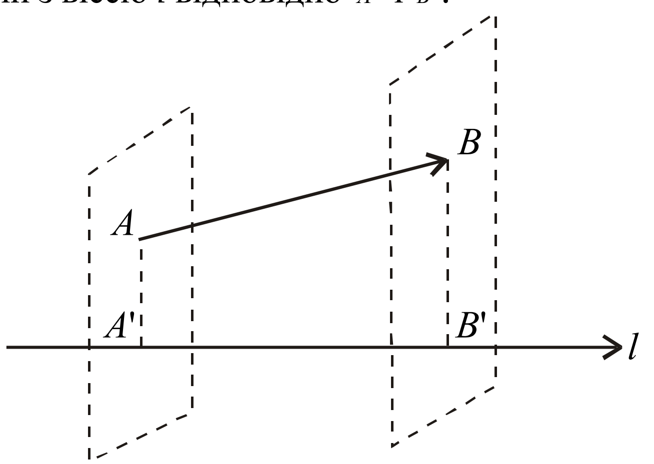


Рисунок 3.6 – Проекція

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ *на вісь l* називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі *l*. Слід зазначити, що $A'B'=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ збігається з напрямом *l* , то $A'B'=-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ протилежний напряму *l*.

Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l — $np_l\vec{AB}$. З рисунку 3.6 випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$np_l\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right|\cos\varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку A (x_1, y_1, z_1) і кінця B (x_2, y_2, z_2) вектора $\vec{AB}$, то проекції вектора $\vec{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1.$$

Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$\boldsymbol{np_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}.}$$

При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число:

$$\boldsymbol{np_l\left(\alpha\vec{a}\right) = \alpha np_l\vec{a}.}$$

3.3. Лінійна залежність і незалежність векторів. Розклад вектора по даному базису

Нехай $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ вектори з n-вимірного векторного простору, а $k_1, k_2, ..., k_n$ - деякі дійсні числа.

Вектор $\overline{b} = k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + ... + k_n\overline{a_n}$ називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називають **лінійно залежними**, якщо існують такі числа $k_1, k_2 + ... + k_m$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_m\vec{a}_m = 0$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називаються **лінійно незалежними**, якщо для них виконується умова тільки тоді, коли одночасно $k_1, k_2 + ... + k_m$ дорівнюють нулю.

Для перевірки векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ на *лінійну незалежність* потрібно скласти із координат векторів визначник, який не повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Базис. Розклад вектора по даному базису

Вектор $\vec{b}$ називається **лінійною комбінацією векторів** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторного простору R^m, якщо він дорівнює сумі добутків цих векторів на довільні дійсні числа

$$b = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_m\vec{a}_m$$

де $k_1, k_2 + ... + k_m$ - дійсні числа.

Розглянемо деякі властивості векторів лінійного простору.

Властивість *1*. Якщо система векторів складається із одного ненульового вектора $\vec{a}$, то така система лінійно незалежна.

Дійсно, рівність $k\vec{a}=\vec{0}$ можлива тоді і тільки тоді, коли $k=0$.

Зауваження. Якщо система векторів складається із одного нульового вектора $\vec{a}$, то ця система лінійно незалежна.

Дійсно, рівність $k\vec{a}=\vec{0}$ має місце коли $k\neq 0$.

Властивість 2. Для того, щоб вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ були лінійно залежними необхідно і достатньо, щоб хоч один із них був лінійною комбінацією решти векторів.

Доведення. Необхідність.

Нехай вектори лінійно залежні. Тоді для них виконується умова, де хоч одне із чисел $k_1,k_2+...+k_m$ не дорівнює нулю.

Для прикладу, нехай це буде число $k_m\neq 0$. Тоді

$$\vec{a}_m=-\frac{k_1}{k_m}\vec{a}_1-\frac{k_2}{k_m}\vec{a}_2-...-\frac{k_{m-1}}{k_m}\vec{a}_{m-1}$$

Необхідна умова доведена.

Достатність. Нехай виконується умова, яку перепишемо так

$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}-\vec{a}_m=0$, де $\alpha_i=-\frac{k_i}{k_m}(i=1,2,...,m-1)$.

Ми одержали рівність вигляду, в якій одне число $\alpha_m=-1\neq 0$. Значить вектори є лінійно залежні.

Властивість 3. Якщо серед векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ *є* нульовий вектор, то ці вектори є лінійно залежні.

Дійсно, нехай $\vec{a}_1=0$, то тоді маємо рівність $k_1\vec{a}_1+0\vec{a}_2+...+0\vec{a}_m=0$, коли k_1=1, $k_2=k_3=...=k_m=0$.

Властивість 4. Для того,щоб два вектори були лінійно залежними необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарні.

Доведення. Необхідність. Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є лінійно залежними, тоді виконується рівність $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{b}=0$, де хоч би одне із чисел k_1 або k_2 не дорівнює нулю.

Нехай $k\neq 0$, тоді $\vec{a}=-\frac{k_2}{k_1}\vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними.

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тобто

$$\vec{a}=\lambda\vec{b} \text{ або } \vec{a}+(-\lambda)\vec{b}=0.$$

Значить вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є лінійно залежні.

Властивість 5. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ n - мірного простору лінійно незалежні, якщо визначник складений із координат цих векторів, відмінний від нуля.

Доведення. Нехай вектори задані своїми координатами

$$\vec{a}_1=(a_{11},a_{12},...,a_{1n}),\ \vec{a}_2=(a_{21},a_{22},...,a_{2n}),\ \vec{a}_n=(a_{n1},a_{n2},...,a_{nn})$$

Для цих векторів запишемо рівність

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+...+k_n\vec{a}_n=0 \text{ або } k_1(a_{11},...,a_{1n})+k_2(a_{21},...,a_{2n})+...+k_n(a_{n1},...,a_{nn})=(0,0,...,0).$$

З цієї рівності одержуємо однорідну систему рівнянь для знаходження

$$k_1, k_2, ..., k_n : \begin{cases} k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + ... + k_n a_{n1} = 0 \\ k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + ... + k_n a_{n2} = 0 \\ .... \\ k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + ... + k_n a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Тому що за умовою визначник, складений із коефіцієнтів цієї однорідної системи відмінний від нуля, то ця система має єдиний нульовий розв'язок, тобто $k_1 = 0$, $k_2 = 0, ..., k_n = 0$. А це значить, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ лінійно незалежні.

Наслідок 1. Якщо вектори лінійно залежні, то визначник, складений із координат цих векторів, дорівнює нулю.

Наслідок 2. Одиничні вектори (орти) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ n - мірного простору лінійно незалежні.

Лінійний простів R^n називається n - мірним, якщо в ньому є n лінійно незалежних векторів, а довільні вектори є уже лінійно залежні.

Іншими словами розмірність простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів цього простору.

Сукупність n лінійно незалежних векторів n- мірного простору R^n **називається базисом.**

ТЕОРЕМА. Довільний вектор $\vec{b}$ лінійного простору R^n можна представити єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

Знайдемо залежність між координатами вектора в різних базисах. Нехай вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ заданий в старому базисі, а в новому базисі $\vec{X}^* = (y_1, y_2, ..., y_n)$, тобто

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + ... + y_n\vec{b}_n .$$

Так як вектор $\vec{X}$ і $\vec{X}^*$ один і той же вектор, то маємо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{b}_j$$

Підставляючи в цю рівність розклад векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ...\vec{b}_m$ по векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, а саме, то одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} \vec{b}_{ij} \vec{a}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j .$$

З цієї рівності випливає зв'язок між координатами вектора $\vec{X}$ в старому і новому базисах

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \quad i = 1,2,...,n .$$

Якщо позначити $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{X}^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$, то запишеться так

$$\vec{X} = B\vec{X}^*.$$

Таким чином, вектор в старих координатах дорівнює матриці переходу, помноженій на вектор в нових координатах.

Якщо матриця ***B*** не вироджена, то $\vec{X}^* = B^{-1}\vec{X}$, тобто одержимо вектор в новому базисі через обернену матрицю переходу і координати вектора в старому базисі.

3.4 Власні числа та власні вектори матриці

Вектор $\vec{x} \neq 0$ називається **власним вектором матриці А**, якщо знайдеться таке число λ, що

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

де число λ називається власним значенням матриці А, яке відповідає вектору $\vec{x}$.

Запишемо рівність в матричній формі:

$$AX = \lambda X,$$

де X - матриця-стовпчик із координат вектора $\vec{x}$.

Рівняння розпишемо в координатній формі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Перепишемо рівняння системи так, щоб в правих частинах були нулі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - \lambda x_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - \lambda x_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

Щоб перейти до розгляду системи доведемо таку теорему.

ТЕОРЕМА. Однорідна система (n рівнянь з n невідомими)

$$AX = 0$$

Має ненульовий розв’язок тоді і тільки тоді, коли $|A| = 0$, тобто коли матриця А є виродженою.

Теорема доведена.

Тепер повернемось до системи. На основі вище приведеної теореми, система має ненульовий розв’язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Визначник є многочленом n-го степеня відносно λ. Цей многочлен називається характеристичним многочленом матриці A, а рівняння називається характеристичним рівнянням матриці A.

3.5 Квадратичні форми

Квадратичною формою $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ **від** n **змінних називається** сума, кожен член якої є або квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних, взятих з деяким коефіцієнтом, тобто

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Допускаємо, що в квадратичної форми a_{ij} - дійсні числа.

Розпишемо квадратичну форму, розбивши доданки, що містять добутки змінних на дві рівні частини

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... +$$
$$+ a_{2n}x_2x_n + ... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2.$$

Матриця

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або $A = \{a_{ij}\}(i, j = 1,2,...,n)$ є симетричною, так як $a_{ij} = a_{ij}$, називається матрицею квадратичної форми.

Рангом квадратичної форми називається ранг її матриці.

Квадратична форма називається не виродженою, якщо її матриця не вироджена.

Якщо $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то квадратичну форму можна переписати в матричному вигляді $L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ **.**

Вираз $X^T AX$ **представляє собою квадратичну форму в матричному вигляді.**

Квадратична форма називається **канонічною** (або другими словами має канонічний вигляд), якщо всі $a_{ij} = 0$, коли $i \neq j$. Тоді квадратична форма буде мати вигляд

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x^n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} a_i^2 .$$

Розглянемо таку теорему.

ТЕОРЕМА 1. Довільна квадратична форма приводиться до канонічного вигляду.

Доведення. Нехай задана квадратична форма з матрицею в базисі $\vec{a}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Так як $\boldsymbol{A}$ симетрична матриця, то існує ортогональна матриця $\boldsymbol{B}$ така, що

$$C = B^{-1}FD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матриця **B** є матрицею переходу від базису

$$\vec{a}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n,$$

до деякого базису

$$\vec{a}_1^*, \vec{e}_2^*, \dots, \vec{e}_n^*.$$

Примітка. Дійсна квадратична матриця називається ортогональною, якщо сума квадратів елементів кожного стовпчика дорівнює одиниці і сума добутків відповідних елементів із дох різних стовпчиків дорівнює нулю. Необхідна і достатня умова ортогональності матриці $\boldsymbol{B}$ є умова $B^T \cdot B = E$.

Нехай **X** і **Y** є вектори-стовпчики із координат вектора $\vec{x}$ відповідно в базисах. Тоді $X = BY$ і

$$X^T AX = (BY)^T A(BY) = Y^T B^T ABY = Y^T B^{-1} ABY = Y^T CY$$

або

$$X^T AX = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Примітка. При доведенні даної теореми використання транспонування добутку матриць за формулою $(CY)^T = B^T \cdot C^T$.

Зауважимо, що в канонічній формі $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є власними числами матриці $\boldsymbol{A}$.

Розглянемо на прикладі ще один метод приведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Метод Лагранжа приведення квадратичної форми до канонічного вигляду заклечається в послідовному виділенні повних квадратів.

Приклад 3. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_n) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$ методом Лагранжа. Спочатку виділимо повний квадрат при змінній x_1, коефіцієнт при якій відмінний від нуля.

$$L = \left[x_1^2 - 2x_1(3x_2 - 2x_3) + (3x_2 - 2x_3)^2\right] + 2x_2x_3 + x_3^2 -$$

$$(3x_2 - 2x_3)^2 = (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2x_3 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 3x_3^3 =$$

$$(x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 4x_3^2 =$$

$$= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 - 9\left(x_2^2 - \frac{2 \cdot 7}{9}x_2x_3 + \frac{49}{81}x_3^2\right) + \left(\frac{49}{9}x_3^2 - 3x_3^2\right) =$$

$$= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 - 9\left(x_2 - \frac{7}{9}x_3\right)^2 + \frac{22}{9}x_3^2.$$

І так, не вироджене лінійне перетворення

$y_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 - \frac{7}{9}x_3$, $y_3 = x_3$ приводить дану канонічну форму до канонічного вигляду $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 9x_2^2 + \frac{22}{9}y_3^2$.

Канонічний вигляд квадратичної форми не є однозначним, так як одна й та ж квадратична форма може бути приведена до канонічного вигляду багатьма способами. Однак одержані різними способами квадратичні форми мають ряд спільних властивостей.

Сформулюємо одну із цих властивостей, яка виражає закон інерції квадратичних форм, що заключається в наступному: всі канонічні форми, до яких приводиться дана квадратична форма, мають:

1) одне й те ж число нульових коефіцієнтів;
2) одне й те ж число додатніх коефіцієнтів;
3) одне й те ж число від'ємних коефіцієнтів.

Квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається **додатньо визначеною**, якщо для всіх дійсних значень $x_1, x_2, ..., x_n$ використовується нерівність $L(x_1, x_2, ..., x_n) \succ 0$.

Якщо $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ є додатньо визначеною формою, то квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n) \prec 0$ **називається від'ємно визначеною**.

Необхідні та достатні умови додатної (від'ємної) визначеності квадратичної форми дає наступна теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для того, щоб квадратична форма $L = X^T AX$ була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно й досить, щоб всі власні значення $\lambda_i \, (i = 1,2,...,n)$ матриці A були додатніми (від'ємними).

В багатьох випадках для встановлення знаковизначеності квадратичної форми зручно застосовувати критерії Сільвестра.

ТЕОРЕМА 3. Для того, щоб квадратична форма була додатньо визначеною, необхідно і досить, щоб всі головні мінори матриці цієї форми були додатніми, тобто

$$\Delta_1 \succ 0, \ \Delta_2 \succ 0, \ ..., \ \Delta_n \succ 0, \text{ де } \Delta_1 \succ a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ ...$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Слід зауважити, що для від'ємно визначених квадратичних форм знаки головних мінорів чергуються, починаючи з знаку «мінус» для мінора першого порядку.

Наприклад, квадратична форма $\boldsymbol{L}$ в прикладі 2 є достатньо визначеною на основі теореми 2, так як корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 6$ і $\lambda_2 = 1$ є додатними.

Другий спосіб. Так як головні мінори матриці $\boldsymbol{A}$.

$$|a_{11}| = 2, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

є додатніми, то за критерієм Сільвестра дана квадратична форма є додатньо визначеною.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Задано вектори $\vec{a}$=(2, 3, 0), $\vec{b}$=(1, -2, 2), $\vec{c}$(3, 2, 1). Вимагається визначити:

1) $|\vec{a}|$;

2) $(\vec{a},\vec{b})$;

3) $\cos(\vec{a},\vec{b})$;

4) $|\vec{a}\times\vec{b}|$;

5) мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;

6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

7) чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Розв'язання

1. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}.$

2. $(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 0\cdot 2 = 4.$

3. $\cos(\vec{a},\vec{b}) - \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{1+4+4}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{13}}.$

4. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k} = (6,-4,-7)$;

$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}.$

5. $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3.$

6. Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_3}{b_3}$; $\dfrac{2}{1} \ne \dfrac{3}{-2} \ne \dfrac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні.

7. Умова компланарності векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 0$; $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 3 \ne 0 \Rightarrow$ вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарні.

Приклад 2. Задано координати вершин піраміди $A(0;0,1)$, $B(2;3,5)$, $C(6;2,3)$, $D(3;7,2)$. Потрібно:

1) записати вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ у системі орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і знайти модулі цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$;

3) знайти проекцію вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$;

4) знайти площу грані ABC;

5) знайти об'єм піраміди $ABCD$;

Розв'язання

1) Відомо, що довільний вектор $\vec{a}$ можна представити в системі орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ за формулою

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \qquad (1)$$

де a_x, a_y, a_z - координати вектора $\vec{a}$ в системі орт (проекції вектора на відповідні осі). Якщо відомі координати точок початку і кінця вектора, щоб записати координати вектора, треба від координат кінця вектора відняти координати початку, наприклад, якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - початок і кінець вектора, то маємо вектор

$$M_1M_2(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \qquad (2)$$

Використовуючи (2), запишемо координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$:

$\vec{AB}(2-0;3-0;5-1)$, $\vec{AB}(2;3;4)$, або в системі орт $\vec{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$;

$\vec{AC}(6-0;2-0;3-1)$, $\vec{AC}(6;2;2)$, або в системі орт $\vec{AC} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;

$\vec{AD}(3-0;7-0;2-1)$, $\vec{AD}(3;7;1)$, або в системі орт $\vec{AD} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$.

Довжина вектора знаходиться за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (3)$$

Використовуючи формулу (3), знайдемо довжини векторів:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29};$$

$$\left|\vec{AC}\right| = 2\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = 2\sqrt{11};$$

$$\left|\vec{AD}\right| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{59}.$$

2) Відома формула, за якою шукають кут між векторами $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Скалярний добуток, який є в чисельнику, визначають через координати векторів таким чином:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (4)$$

$$\cos\alpha = \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{2\sqrt{29}\sqrt{11}} = \frac{13}{\sqrt{319}} \approx 0{,}7279, \text{ тобто } \alpha \approx 43^\circ.$$

3) Проекцію вектора на вектор визначають за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}, \qquad (5)$$

тобто в нашому випадку $np_{\vec{AB}}\vec{AD} = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\left|\vec{AB}\right|} = \dfrac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1}{\sqrt{29}} = \dfrac{39}{\sqrt{29}} \approx 5{,}76.$

4) Використовуючи векторний добуток векторів, знайдемо площу трикутників, побудованого на векторах, за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|,$$

причому векторний добуток обчислюють за правилом

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (6)$$

У нашому випадку $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\left(-\vec{i}+10\vec{j}-7\vec{k}\right)$.

Отже, площа грані ABC дорівнює: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{(-1)^2+10^2+(-7)^2}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ (кв.од.).

5) Об'єм піраміди, побудованої на трьох некомпланарних векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, можна знайти за формулою: $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$.

Змішаний добуток трьох векторів обчислюють:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Отже, у нашому випадку об'єм піраміди дорівнює:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}(190-70)=\frac{1}{6}\cdot 120=20 \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 3. Обчислити площу трикутника *ABC, A(2,-1,3), B(-2,2,5), C(1,2,3).*

Розв'язання

Врахуємо, що $\vec{a}=\vec{AB}=$*(-4, 3, 2)*, $\vec{b}=\vec{AC}=$*(-1, 3, 0)*. Тоді

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 3 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-6\vec{i}-2\vec{j}-9\vec{k}$, звідки $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{36+4+81}=\sqrt{121}=11$;

$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}11=5{,}5$ (кв.од.).

Приклад 4. Задані вершини трикутної піраміди *A(3, 2, 1), B(-2, 1, -2). C(-1, 2, 3), D(1, 2, 3).* Знайти її об'єм.

Розв'язання

$\vec{a}=\vec{AB}=$*(-5, -1, -3)*, $\vec{b}=\vec{AC}=$*(-4, 0, 2)*, $\vec{c}=\vec{AD}=$*(-2, -4, 2).*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\begin{vmatrix}-5 & -1 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -2 & -4 & 2\end{vmatrix}=-48+4-40-8=-92.$$

Отже, об'єм трикутної піраміди $V=\frac{1}{6}=\left|-92\right|=\frac{46}{3}$ (куб.од.)

Приклад 5. У трикутнику з вершинами *A(2, -1, 3), B(-2, 2, 5). C(1, 2, 3)* знайти косинус кута при вершині *A*.

Розв’язання

$A\vec{B} = (-4,\ 3,\ 2),\ \ A\vec{C} = (-1,\ 3,\ 0)$, тоді

$$\cos\varphi = \cos\left(A\vec{B},\ A\vec{C}\right) = \frac{-4(-1)+3\cdot 3+2\cdot 0}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}} = \frac{13}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}} \approx 0{,}763.$$

Приклад 6.

Приклад. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (3;0;2)$, $\vec{a}_2 = (1;-2;3)$, $\vec{a}_3 = (1;4;5)$ є лінійно незалежні.

Розв’язування. Складемо рівняння типу $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 = 0$.

Цю рівність перепишемо у вигляді $k_1(3;0;2) + k_2(1;-2;3) + k_3(1;4;5) = 0$.

Із даної рівності одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження k_1, k_2, k_3:

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ -2k_2 + 4k_3 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї однорідної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -30 + 8 + 4 - 36 = -54 \neq 0.$$

Якщо $\Delta = -54 \neq 0$, то однорідна система має єдиний нульовий розв’язок $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Таким чином, дана система векторів лінійно незалежна.

Приклад 7. Задано вектори $\vec{a}_1 = (4;;2)$, $\vec{a}_2 = (3;0;1)$, $\vec{a}_3 = (-1;4;2)$ і $\vec{d} = (5;7;8)$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Показати, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Розв’язування. Покажемо, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис. Для цього складемо визначник із координат цих векторів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 5 - 6 - 30 = -27 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис. Виразимо зв'язок між базисами

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= 4\vec{b}_1 + 5\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 &= 3\vec{b}_1 + \qquad\ \ \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 &= -\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3. \end{aligned}$$

Матриця переходу від базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ до базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю B^{-1} до матриці $\boldsymbol{B}$.

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{II} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

Тепер

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 \\ -108 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Нові координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є -1;4;3. Вектор $\vec{d}$ можна записати у вигляді $\vec{d} = -\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$.

Примітка. Дану задачу можна розв’язати другим способом.

Для знаходження координат вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ складемо систему

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = 5, \\ 5x + 4z = 0, \\ 2x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

Для знаходження розв’язків даної системи застосовуємо правило Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 + 96 - 20 - 42 = 27 \qquad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{-27} = -1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 56 - 40 + 40 + 14 - 50 - 128 = -108, \qquad x = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-108}{-27} = 4.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 25 + 42 - 28 - 120 = -71, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-71}{-27} = 3.$$

Значить вектор $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має координати $\vec{d}(-1;4;3)$.

Приклад 8. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, 0)$ утворюють базис в R^3.

Розв’язання

Враховуючи, що базисом в R^3 є три некомпланарні вектори, розв’язання зводиться до перевірки виконання умови компланарності векторів:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 + 2(2 - 4) = 1 + 2 - 4 = -1 \neq 0.$$

Таким чином, вектори некомпланарні, утворюють базис в R^3.

Приклад 9. Показати, що вектори $\bar{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворять базис і знайти розкладання $\vec{b}$ по даному базису: $\vec{a}_1 = (1;-1;2)$, $\vec{a}_2 = (2;2;-1)$, $\vec{a}_3 = (2;1;0)$, $\vec{b} = (3;7;-7)$.

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Отже, вектори $\bar{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис.

Розв'яжемо систему відносно a_1, a_2, a_3 методом повного виключення

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -4 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Якщо видно з розв'язку, ранг матриці системи дорівнює 3, отже, вектори лінійно незалежні й утворюють базис. Розв'язок системи $a_1 = -3; a_2 = 1; a_3 = 2$.

Виходить, $\vec{b} = -3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$ - розкладання вектора $\vec{b}$ по базису $\bar{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Приклад 10. Обчислити власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Будуємо рівняння для відшукання власних чисел: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язуємо це рівняння:

$(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)-(-1)\cdot 2 = 0;$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0;$

$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 3.$

Приклад 11. Знайти власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ та визначити чи є ця матриця додатною.

Розв'язання

Вектори $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ є власними векторами (що відповідають власним числам $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = 3$) матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, оскільки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ є додатно визначеною, оскільки обидва її власні значення $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = 3$ є додатними. Додатну визначеність цієї матриці можна з'ясуватити також за допомогою обчислення мінорів:

$a_{11} = 1 > 0;$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0.$

Приклад 12. Показати, що вектори
$\vec{a}_1 = (3;0;2)$, $\vec{a}_2 = (1;-2;3)$, $\vec{a}_3 = (1;4;5)$ є лінійно незалежні.

Розв'язування. Складемо рівняння типу $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_n\vec{a}_n = 0$.

Із даної рівності одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження k_1, k_2, k_3:

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ -k_2 + 4k_3 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї однорідної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -30 + 8 + 4 - 36 = -54 \neq 0.$$

Якщо $\Delta = -54 \neq 0$, то однорідна система має єдиний нульовий розв'язок $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$. Таким чином, дана система векторів лінійно незалежна.

Приклад 13. Задано вектори
$\vec{a}_1 = (4;5;2)$, $\vec{a}_2 = (3;0;1)$, $\vec{a}_3 = (-1;4;2)$ і $\vec{d}_3 = (5;7;8)$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Показати, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Розв'язування. Покажемо, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис. Для цього складемо визначник із координат цих векторів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 5 - 6 - 30 = -27 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис. Виразимо зв'язок між базисами

$$\begin{aligned} a_1 &= 4b_1 + 5b_2 + 2b_3 \\ a_2 &= 3b_1 + \quad\quad b_3 \\ a_3 &= -b_1 + 4b_2 + 2b_3 \end{aligned}.$$

Матриця переходу від базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ до базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю B^{-1} до матриці B.

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{\breve{I}} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

Тепер $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 \\ -108 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Нові координати вектора $\vec{d}$ в базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є -1;4;3. Вектор $\vec{d}$ можна записати у вигляді $\vec{d} = \vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$

Примітка. Дану задачу можна розв'язати другим способом.

Для знаходження координат вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ складемо систему

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = 5, \\ 5x + 4z = 7, \\ 2x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

Для знаходження розв'язків даної системи застосуємо правило Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 + 96 - 20 - 42 = 27 \qquad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{-27} = -1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 56 - 40 + 4 + 14 - 50 - 128 = -108, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-108}{-27} = 4.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5 + 42 - 28 - 120 = -71, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-71}{-27} = 3.$$

Значить вектор $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має координати $\vec{d} = (-1;4;3)$.

Приклад 14. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Запишемо систему типу для знаходження власних чисел і власних векторів, а саме:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Як нам уже відомо, для того, щоб ця система мала ненульові розв'язки, потрібно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю, тобто $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Корені цього квадратного рівняння є $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Таким чином ми знайшли власні (характеристичні) числа.

Тепер знайдемо власні вектори, які відповідають знайденим власним числам.

Щоб знайти координати власного вектора, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$, то $\lambda_1 = 2$ підставляємо в систему.

Одержимо $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$, звідси $x_1 = 2t$, $x_2 = t$ при довільному $t \neq 0$, є розв'язком цієї системи. Отже, вектор $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$ є власним вектором-стовпчиком матриці A.

Для знаходження координат власного вектора матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$ поступаємо аналогічно. Число $\lambda_2 = 3$ підставляємо в систему і одержимо

$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$, звідси $x_1 = x_2$.

Значить, $x_1 = t$, $x_2 = t$, $t \neq 0$, а вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ є власним вектори, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$.

Приклад 15. Записати в матричному вигляді квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3$.

Розв'язування. Матриця даної квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значить

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 16. Привести квадратичну форму $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ до канонічного вигляду з допомогою ортогональної матриці і знайти її.

Розв'язування. Матриця даної квадратичної форми має вигляд $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Запишемо систему типу для знаходження власних чисел і власних векторів

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння даної системи має вигляд

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ або $(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$.

Розв'язавши дане рівняння знаходимо $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$.

Значить канонічний вигляд даної квадратичної форми є $6y_1^2 + y_2^2$.

Знайдемо ортогональну матрицю.

Стовпчиками ортогональної матриці, яка приводить квадратичну форму до канонічного вигляду є ортонормовані власні вектор-стовпчики матриці ***A***.

Спочатку знайдемо нормований власний вектор-стовпчик матриці ***A*** з власним значенням $\lambda_1 = 6$**.** Для цього із системи маємо систему для знаходження координат вектора $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 0. \end{cases}$

Із даної системи знаходимо $x_1 = 2x_1$, або $u_2 = 2u_1$.

Значить при довільному u_1, відмінному від нуля, стовпчик $\begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{pmatrix}$**є** власним вектором-стовпчиком матриці ***A*,** а стовпець $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$є нормованим власним вектором-стовпчиком матриці ***A*.** Тут використано, що $\vec{a}\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Аналогічно знаходимо вектор-стовпчик матриці ***A*** з власним значенням $\lambda_1 = 1$, а саме із системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 0. \end{cases}$$

Знаходимо $x_1 = -2x_2$ або при довільному **s**, яке відмінне від нуля, стовпчик $\begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}$є власним вектором матриці ***A*.** Стовпчик $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$є нормованим власним вектором матриці ***A***. Значить шукана матриця має вигляд $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Зауваження. Легко перевірити, що $C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$для даного прикладу 2.

Завдання для самостійної роботи

1. Задані вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Визначити:

1) довжину вектора $|\vec{a}|$;
2) скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$;
3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
4) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$;
5) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
6) чи коленіарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
7) чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Варіанти завдань

1. $\vec{a}$=(2, 3, 1), $\vec{b}$=(-1, 0, -1), $\vec{c}$=(2, 2, 2).
2. $\vec{a}$=(2, 3, 1), $\vec{b}$=(2, 3, 4), $\vec{c}$=(3, 1, -1).
3. $\vec{a}$=(1, 5, 2), $\vec{b}$=(-1, 1, -1), $\vec{c}$=(1, 1, 1).
4. $\vec{a}$=(1, -1, -3), $\vec{b}$=(2, 3, 1), $\vec{c}$=(2, 3, 4).
5. $\vec{a}$=(3, 3, 1), $\vec{b}$=(1, -2, 1), $\vec{c}$=(1, 1, 1).
6. $\vec{a}$=(3, 1, -1), $\vec{b}$=(-2, -1, 0), $\vec{c}$=(5, 2, -1).
7. $\vec{a}$=(4, 3, 1), $\vec{b}$=(1, -2, 1), $\vec{c}$=(2, 2, 2).
8. $\vec{a}$=(4, 3, 1), $\vec{b}$=(6, 7, 4), $\vec{c}$=(2, 0, -1).
9. $\vec{a}$=(3, 2, 1), $\vec{b}$=(1, -3, -7), $\vec{c}$=(1, 2, 3).
10. $\vec{a}$=(3, 7, 2), $\vec{b}$=(-2, 0, -1), $\vec{c}$=(2, 2, 1).
11. $\vec{a}$=(1, -2, 6), $\vec{b}$=(1, 0, 1), $\vec{c}$=(2, -6, 7).
12. $\vec{a}$=(6, 3, 4), $\vec{b}$=(-1, -2, -1), $\vec{c}$=(2, 1, 1).
13. $\vec{a}$=(7, 3, 4), $\vec{b}$=(-1, -2, -1), $\vec{c}$=(4, 2, 4).
14. $\vec{a}$=(2, 3, 2), $\vec{b}$=(4, 7, 5), $\vec{c}$=(1, -1, 1).
15. $\vec{a}$=(7, 3, 4), $\vec{b}$=(-1, -2, -1), $\vec{c}$=(4, 2, 4).
16. $\vec{a}$=(2, 3, 2), $\vec{b}$=(4, 7, 5), $\vec{c}$=(1, -1, 1).
17. $\vec{a}$=(5, 3, 4), $\vec{b}$=(-1, 0, -1), $\vec{c}$=(4, 2, 4).
18. $\vec{a}$=(3, 10, 5), $\vec{b}$=(-2, -2, -3), $\vec{c}$=(2, 4, 3).
19. $\vec{a}$=(-2, -4, -3), $\vec{b}$=(4, 3, 1), $\vec{c}$=(6, 7, 4).
20. $\vec{a}$=(3, 1, -1), $\vec{b}$=(1, 0, -1), $\vec{c}$=(8, 3, -2).
21. $\vec{a}$=(1, 2, 3), $\vec{b}$=(-2, 3, 0), $\vec{c}$=(2, 1 -6).
22. $\vec{a}$=(3,-2, 3) $\vec{b}$=(-1, 2, -1), $\vec{c}$=(4, 2, 0).
23. $\vec{a}$=(2, 3, 2), $\vec{b}$=(4, 6, 4), $\vec{c}$=(2, -1, 3).
24. $\vec{a}$=(4, 0, 3), $\vec{b}$=(1, -2, 4), $\vec{c}$=(1, -1, 2).
25. $\vec{a}$=(5, -3, 2), $\vec{b}$=(-4, 1, 5), $\vec{c}$=(0, 2, 4).
26. $\vec{a}$=(2, 3, 0), $\vec{b}$=(2, -1, 1), $\vec{c}$=(-2, -2, 1).
27. $\vec{a}$=(1, 1, -2), $\vec{b}$=(-2, -5, 3), $\vec{c}$=(-1, 0, 2).
28. $\vec{a}$=(-3, 1, 0), $\vec{b}$=(1, 6, 5), $\vec{c}$=(1, 1, 0).
29. $\vec{a}$=(1, 3, 7), $\vec{b}$=(-1, 3, 5), $\vec{c}$=(-6, 0, 2).
30. $\vec{a}$=(-4, -3, 0), $\vec{b}$=(3, 2, -1), $\vec{c}$=(-3, 2, 2).
31. $\vec{a}$=(0, 6, -3), $\vec{b}$=(-1, 6, 0), $\vec{c}$=(4, 4, 2).
32. $\vec{a}$=(0, -5, 4), $\vec{b}$=(4, -1, -2), $\vec{c}$=(5, 0, 4).
33. $\vec{a}$=(-3, 3, 1), $\vec{b}$=(1, 0, -3), $\vec{c}$=(2, 1, 6).

2.Знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$

Варіанти завдань

1. $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(3;-2;1)$.
2. $A(5;3;-1)$, $B(5;2;0)$, $C(6;4;-1)$.
3. $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$, $C(2;3;0)$.
4. $A(2;-4;6)$, $B(0;-2;4)$, $C(6;-8;10)$.

5. $A(0;1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(4;1;1)$.
6. $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $C(2;1;3)$.
7. $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$, $C(2;3;0)$.
8. $A(2;-4;6)$, $B(0;-2;4)$, $C(6;-8;10)$.
9. $A(0;1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(4;1;1)$.
10. $A(5;2;-1)$, $B(4;1;3)$, $C(9;2;7)$.
11. $A(2;1;-1)$, $B(6;-1;-4)$, $C(4;2;1)$.
12. $A(-1;-2;1)$, $B(-4;-2;5)$, $C(-8;-2;2)$.
13. $A(6;2;-3)$, $B(6;3;-2)$, $C(7;3;-3)$.
14. $A(0;0;4)$, $B(-3;-6;1)$, $C(-5;-10;-1)$.
15. $A(2;-8;-1)$, $B(4;-6;0)$, $C(-2;-5;-1)$.
16. $A(3;-6;9)$, $B(0;-3;-6)$, $C(9;-12;15)$.
17. $A(0;2;-4)$, $B(8;2;2)$, $C(6;2;4)$.
18. $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $C(4;1;1)$.
19. $A(-4;3;0)$, $B(0;1;3)$, $C(-2;4;-2)$.
20. $A(1;-1;0)$, $B(-2;-1;4)$, $C(8;-1;-1)$.
21. $A(7;0;2)$, $B(7;1;3)$, $C(8;-1;2)$.
22. $A(2;3;2)$, $B(-1;-3;-1)$, $C(-3;-7;-3)$.
23. $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;-4;5)$.
24. $A(0;-3;6)$, $B(-12;-3;-3)$, $C(-9;-3;-6)$.
25. $A(3;3;-1)$, $B(5;5;-2)$, $C(4;1;1)$.
26. $A(-1;2;-3)$, $B(3;4;-6)$, $C(1;1;-1)$.
27. $A(-2;1;1)$, $B(2;3;-2)$, $C(0;0;3)$.
28. $A(1;4;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(8;4;0)$.
29. $A(0;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;2;0)$.
30. $A(-4;0;4)$, $B(-1;6;7)$, $C(1;10;9)$.

2. Чи компланарні вектори $\bar{a}$ $\bar{b}$, $\bar{c}$?

Варіанти завдань

1. $\bar{a}(3;2;1)$, $\bar{b}(1;-3;-7)$, $\bar{c}(1;2;3)$.
2. $\bar{a}(2;3;1)$, $\bar{b}(2;3;4)$, $\bar{c}(3;1;-1)$.
3. $\bar{a}(1;5;2)$, $\bar{b}(-1;1;-1)$, $\bar{c}(1;1;1)$.
4. $\bar{a}(1;-1;-3)$, $\bar{b}(3;2;1)$, $\bar{c}(2;3;4)$.
5. $\bar{a}(3;3;1)$, $\bar{b}(1;-2;1)$, $\bar{c}(1;1;1)$.
6. $\bar{a}(3;-1;1)$, $\bar{b}(-2;-5;0)$, $\bar{c}(5;2;-1)$.
7. $\bar{a}(4;3;1)$, $\bar{b}(1;-2;1)$, $\bar{c}(2;2;2)$.
8. $\bar{a}(4;3;1)$, $\bar{b}(6;7;4)$, $\bar{c}(2;0;-2)$.
9. $\bar{a}(1;2;3)$, $\bar{b}(7;-1;2)$, $\bar{c}(-1;3;2)$.
10. $\bar{a}(3;7;2)$, $\bar{b}(2;-2;0)$, $\bar{c}(2;2;1)$.
11. $\bar{a}(1;-2;6)$, $\bar{b}(1;0;1)$, $\bar{c}(2;-6;17)$.

12. $\bar{a}(6;3;4)$, $\bar{b}(-1;-2;-1)$, $\bar{c}(2;1;2)$.
13. $\bar{a}(7;3;4)$, $\bar{b}(-1;-2;-1)$, $\bar{c}(4;2;4)$.
14. $\bar{a}(2;3;2)$, $\bar{b}(4;7;5)$, $\bar{c}(2;0;-1)$.
15. $\bar{a}(5;3;4)$, $\bar{b}(-1;0;-1)$, $\bar{c}(4;2;4)$.
16. $\bar{a}(3;10;5)$, $\bar{b}(-2;-2;-3)$, $\bar{c}(2;4;3)$.
17. $\bar{a}(-2;-4;-3)$, $\bar{b}(4;3;1)$, $\bar{c}(6;7;4)$.
18. $\bar{a}(3;1;-1)$, $\bar{b}(1;0;-1)$, $\bar{c}(8;3;-2)$.
19. $\bar{a}(4;2;2)$, $\bar{b}(-3;-3;-3)$, $\bar{c}(2;1;2)$.
20. $\bar{a}(4;1;2)$, $\bar{b}(9;2;5)$, $\bar{c}(1;1;-1)$.
21. $\bar{a}(5;3;4)$, $\bar{b}(4;3;3)$, $\bar{c}(9;5;8)$.
22. $\bar{a}(3;4;2)$, $\bar{b}(1;1;0)$, $\bar{c}(8;11;6)$.
23. $\bar{a}(4;-1;-6)$, $\bar{b}(1;-3;-7)$, $\bar{c}(2;-1;-4)$.
24. $\bar{a}(3;1;0)$, $\bar{b}(-5;-4;-5)$, $\bar{c}(4;2;4)$.
25. $\bar{a}(3;0;3)$, $\bar{b}(8;1;6)$, $\bar{c}(1;1;-1)$.
26. $\bar{a}(1;-1;4)$, $\bar{b}(1;0;3)$, $\bar{c}(1;-3;8)$.
27. $\bar{a}(6;3;4)$, $\bar{b}(-1;-2;-1)$, $\bar{c}(2;1;2)$.
28. $\bar{a}(4;1;1)$, $\bar{b}(-9;-4;-9)$, $\bar{c}(6;2;6)$.
29. $\bar{a}(-3;3;3)$, $\bar{b}(-4;7;6)$, $\bar{c}(3;0;-1)$.
30. $\bar{a}(-7;10;-5)$, $\bar{b}(0;-2;-1)$, $\bar{c}(-2;4;-1)$.

4. Обчислити об’єм трикутної піраміди з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 та найбільшу висоту

Варіанти завдань

1. $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$.
2. $A_1(-4;2;6)$, $A_2(2;-3;0)$, $A_3(-10;5;8)$, $A_4(-5;2;-4)$.
3. $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$.
4. $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-6;-3;0)$.
5. $A_1(-1;-5;2)$, $A_2(-6;0;-3)$, $A_3(3;6;-3)$, $A_4(10;6;7)$.
6. $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(1;-6;3)$.
7. $A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(-1;1;1)$.
8. $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(5;0;-6)$, $A_4(-10;9;-7)$.
9. $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$.
10. $A_1(14;4;5)$, $A_2(-5;-3;2)$, $A_3(-2;-6;-3)$, $A_4(-2;2;-1)$.
11. $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4;-9)$.
12. $A_1(2;-1;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(-4;2;5)$.
13. $A_1(1;1;2)$, $A_2(-1;1;3)$, $A_3(2;-2;4)$, $A_4(-1;0;-2)$.
14. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(7;5;-3)$.
15. $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(5;9;-8)$.
16. $A_1(1;5;-7)$, $A_2(-3;6;3)$, $A_3(-2;7;3)$, $A_4(-4;8;-12)$.

17. $A_1(-3;4;-7)$, $A_2(1;5;-4)$, $A_3(-5;-2;0)$, $A_4(2;5;4)$.
18. $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$, $A_4(3;4;5)$.
19. $A_1(4;-1;3)$, $A_2(-2;1;0)$, $A_3(0;-5;1)$, $A_4(3;2;-6)$.
20. $A_1(1;-1;1)$, $A_2(-2;0;3)$, $A_3(2;1;-1)$, $A_4(2;-2;-4)$.
21. $A_1(1;2;0)$, $A_2(1;-1;2)$, $A_3(0;1;-1)$, $A_4(-3;0;1)$.
22. $A_1(1;0;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(2;-2;1)$, $A_4(2;1;0)$.
23. $A_1(1;2;-3)$, $A_2(1;0;1)$, $A_3(-2;-1;6)$, $A_4(0;-5;-4)$.
24. $A_1(3;10;-1)$, $A_2(-2;3;-5)$, $A_3(-6;0;-3)$, $A_4(1;-1;2)$.
25. $A_1(-1;2;4)$, $A_2(-1;-2;-4)$, $A_3(3;0;-1)$, $A_4(7;-3;1)$.
26. $A_1(0;-3;1)$, $A_2(-4;1;2)$, $A_3(2;-1;5)$, $A_4(3;1;-4)$.
27. $A_1(1;3;0)$, $A_2(4;-1;2)$, $A_3(3;0;1)$, $A_4(-4;3;5)$.
28. $A_1(-2;-1;-1)$, $A_2(0;3;2)$, $A_3(3;1;-4)$, $A_4(-4;7;3)$.
29. $A_1(-3;-5;-6)$, $A_2(2;1;-4)$, $A_3(0;-3;-1)$, $A_4(-5;2;-8)$.
30. $A_1(2;-4;-3)$, $A_2(5;-6;0)$, $A_3(-1;3;-3)$, $A_4(-10;-8;7)$.

5.З'ясуйте чи утворюють вектори $\overline{a}(3;2;1)$, $\overline{b}(1;-3;-7)$, $\overline{c}(1;2;3)$ тривимірний простір та розкладіть вектор $\overline{d}$ за векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Варіанти завдань

1. $\overline{d}(-2;4;7)$, $\overline{a}(0;1;2)$, $\overline{b}(1;0;1)$, $\overline{c}(-1;2;4)$.
2. $\overline{d}(6;12;-1)$, $\overline{a}(1;3;0)$, $\overline{b}(2;-1;1)$, $\overline{c}(0;-1;2)$.
3. $\overline{d}(1;-4;4)$, $\overline{a}(2;1;-1)$, $\overline{b}(0;3;2)$, $\overline{c}(1;-1;1)$.
4. $\overline{d}(-9;5;5)$, $\overline{a}(4;1;1)$, $\overline{b}(2;0;-3)$, $\overline{c}(-1;2;1)$.
5. $\overline{d}(-5;-5;5)$, $\overline{a}(-2;0;1)$, $\overline{b}(1;3;-1)$, $\overline{c}(0;4;1)$.
6. $\overline{d}(13;2;7)$, $\overline{a}(5;1;0)$, $\overline{b}(2;-1;3)$, $\overline{c}(1;0;-1)$.
7. $\overline{d}(-19;1;7)$, $\overline{a}(0;1;1)$, $\overline{b}(-2;0;1)$, $\overline{c}(3;1;0)$.
8. $\overline{d}(3;-3;4)$, $\overline{a}(1;0;2)$, $\overline{b}(0;1;1)$, $\overline{c}(2;-1;4)$.
9. $\overline{d}(3;3;-1)$, $\overline{a}(3;1;0)$, $\overline{b}(-1;2;1)$, $\overline{c}(-1;0;2)$.
10. $\overline{d}(-1;7;-4)$, $\overline{a}(-1;2;1)$, $\overline{b}(2;0;3)$, $\overline{c}(1;1;-1)$.
11. $\overline{d}(6;5;-14)$, $\overline{a}(1;1;4)$, $\overline{b}(0;-3;2)$, $\overline{c}(2;1;-1)$.
12. $\overline{d}(6;-1;7)$, $\overline{a}(1;-2;0)$, $\overline{b}(-1;1;3)$, $\overline{c}(1;0;4)$.
13. $\overline{d}(5;15;0)$, $\overline{a}(1;0;5)$, $\overline{b}(-1;3;2)$, $\overline{c}(0;-1;1)$.
14. $\overline{d}(2;-1;11)$, $\overline{a}(1;1;0)$, $\overline{b}(0;1;-2)$, $\overline{c}(1;0;3)$.
15. $\overline{d}(11;5;-3)$, $\overline{a}(1;0;2)$, $\overline{b}(-1;0;1)$, $\overline{c}(2;5;-3)$.
16. $\overline{d}(8;0;5)$, $\overline{a}(2;0;5)$, $\overline{b}(1;1;0)$, $\overline{c}(4;1;2)$.
17. $\overline{d}(3;1;8)$, $\overline{a}(0;1;3)$, $\overline{b}(1;2;-1)$, $\overline{c}(2;0;-1)$.
18. $\overline{d}(8;1;12)$, $\overline{a}(1;2;-1)$, $\overline{b}(3;0;2)$, $\overline{c}(-1;1;1)$.
19. $\overline{d}(-9;-8;-3)$, $\overline{a}(1;4;1)$, $\overline{b}(-3;2;0)$, $\overline{c}(1;-1;2)$.
20. $\overline{d}(-5;9;-13)$, $\overline{a}(0;1;-2)$, $\overline{b}(3;-1;1)$, $\overline{c}(4;1;0)$.

21. $\overline{d}(-15;5;6)$, $\overline{a}(0;5;1)$, $\overline{b}(3;2;-1)$, $\overline{c}(-1;1;0)$.
22. $\overline{d}(8;9;4)$, $\overline{a}(1;0;1)$, $\overline{b}(0;-2;1)$, $\overline{c}(1;3;0)$.
23. $\overline{d}(23;-14;-30)$, $\overline{a}(2;0;1)$, $\overline{b}(1;-1;0)$, $\overline{c}(-3;2;5)$.
24. $\overline{d}(3;1;3)$, $\overline{a}(2;1;0)$, $\overline{b}(1;0;1)$, $\overline{c}(4;2;1)$.
25. $\overline{d}(-1;7;0)$, $\overline{a}(0;3;1)$, $\overline{b}(1;-1;2)$, $\overline{c}(2;-1;0)$.
26. $\overline{d}(11;-1;4)$, $\overline{a}(1;-1;2)$, $\overline{b}(3;2;0)$, $\overline{c}(-1;1;1)$.
27. $\overline{d}(-13;3;18)$, $\overline{a}(1;1;4)$, $\overline{b}(-3;0;2)$, $\overline{c}(1;2;-1)$.
28. $\overline{d}(0;-8;9)$, $\overline{a}(0;-2;1)$, $\overline{b}(3;1;-1)$, $\overline{c}(4;0;1)$.
29. $\overline{d}(8;-7;-13)$, $\overline{a}(0;1;5)$, $\overline{b}(3;-1;2)$, $\overline{c}(-1;0;1)$.
30. $\overline{d}(2;7;5)$, $\overline{a}(1;0;1)$, $\overline{b}(1;-2;0)$, $\overline{c}(0;3;1)$.

6. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму за допомогою ортогональної матриці або за допомогою методу Лагранжа:

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
2. $f = -x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
3. $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$
4. $f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
5. $f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$
6. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
7. $f = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$
8. $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$
9. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
10. $f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
11. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
12. $f = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
13. $f = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$
14. $f = 4x_1^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_2x_3$
15. $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$
16. $f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
17. $f = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$
18. $f = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$
19. $f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
20. $f = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$
21. $f = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$
22. $f = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$
23. $f = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$

24. $f = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

25. $f = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

26. $f = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$

27. $f = x_1^2 + 8x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3$

28. $f = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$

29. $f = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

30. $f = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

Питання для самоконтролю

1. Що таке вектор?
2. Які операції можна виконувати над векторами?
3. Зобразьте графічно суму та різницю векторів.
4. Запишіть формули: скалярного добутку векторів, косинуса кута, векторного та мішаного добутку векторів, довжини вектора.
5. Сформулюйте умову паралельності та перпендикулярності векторів.
6. Який геометричний зміст мають векторний та мішаний добутки?
7. Яка система векторів є лінійно незалежною?
8. За якої умови веектори утворюють базис?

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

4.1. Основні види рівнянь прямої

1) $Ax+By+C=0$ - загальне рівняння прямої;

2) $y=kx+b$ - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; $k=tg\alpha$, де α - кутміж прямою і додатним напрямом осі Ox;

3) $y-y_0=k(x-x_0)$ - рівняння прямої, що проходить через задану точку (x_0,y_0) у заданому напрямі;

4) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0,y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A,B)$ (до нормального вектора);

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S}=(m,n)$ (канонічне рівняння);

6) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - рівняння прямої у відрізках, a і b - величина напрямлених відрізків, що відтинаються прямою на координатних осях;

7) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$.

Якщо задано загальне рівняння прямої, то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою $k=-\dfrac{A}{B}$.

Якщо k_1,k_2 - кутові коефіцієнти двох прямих, то кут Θ між ними визначається за формулою $tg\Theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ $(k_1\cdot k_2\neq -1)$.

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Якщо задане рівняння прямої $L: Ax+By+C=0$ і точка $M_0(x_0,y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою $p(M_0,L)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

4.2. Види рівнянь площини

1) $Ax+By+C_Z+D=0$ - загальне рівняння площини, вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ - вектор, нормальний до цієї площини (перпендикулярний);

2) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ - рівняння площини у відрізках, де a,b,c - довжина напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях;

3) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$;

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ - рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Умова паралельності двох площин $A_1x + B_1y + C_{1Z} + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_{2Z} + D_2 = 0$ має вигляд $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, а умовою перпендикулярності цих площин є рівність $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Кут між двома заданими площинами визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Відстань $p(M_0, Q)$ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q: $Ax + By + C_Z + D = 0$;

$$p(M_0, Q) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

При розв'язанні задач на пряму лінію в просторі скористаємось наступними її рівняннями:

1) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ - канонічні рівняння прямої, де (x_0, y_0, z_0) - задана точка, а вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ - напрямний вектор прямої;

2) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$;

3) $\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ - параметричні рівняння прямої в просторі, де $t \in R$ - деякий параметр;

4) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ - загальні рівняння прямої, що визначена перетином двох площин.

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ обчислюється за формулою $\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Умови паралельності та перпендикулярності цих прямих відповідно $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ та $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Відстань $p(M_0,L)$ від точки M_0 до прямої L, де $L:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$; точка $A(x_1,y_1,z_1)\in L$, $\vec{S}(m,n,p)$ визначається за формулою $p(M_0,L)=\dfrac{\left|\vec{A}\vec{M}_0\times\vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}$.

Щоб знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax+By+C_Z+D=0$, слід розв'язати спільно ці три рівняння.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Задані вершини трикутника $A(-2,-3)$, $B(5,4)$, $C(-1,2)$. Скласти рівняння медіани AM.

Розв'язання. Точка M - середина сторони BC, тому $x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{5-1}{2}=2$; $y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{4+2}{2}=3$; $M(2,3)$.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки A і M, знайдемо рівняння медіани $AM:\dfrac{x+2}{2+2}=\dfrac{y+3}{3+3}$, звідки $3x-2y=0$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,2)$:

а) та точку $N(3,5)$;

б) паралельно вектору $\vec{S}=(0,-1)$;

в) перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(3,-5)$.

Розв'язання. Складаючи рівняння прямої, треба передусім вибрати той вигляд рівняння, який швидше приводить до мети.

а) Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Маємо: $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{5-2}$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$; $3x-2y+1=0$.

б) Використаємо канонічне рівняння прямої $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Маємо: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{-1}$, $x-1=0$.

в) Використаємо рівняння прямої, заданої точки та нормальним вектором: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Маємо $3(x-1)-5(y-2)=0$; $3x-5y+7=0$.

Приклад 3. Знайдіть відстань $p(L_1,L_2)$ між прямими $L_1:3x-4y+5=0$, $L_2:6x-8y-13=0$.

Розв'язання. $L_1\|L_2$, бо $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-4}{-8}\neq\dfrac{5}{-13}$.

Щоб знайти відстань між прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку і знайдемо відстань від неї до другої прямої. Поклавши, наприклад, у першому рівнянні $x=1$, отримаємо $y=1$. Таким чином, точка $M(1,2)\in L_1$. використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо $p(L_1,L_2)=\dfrac{|6\cdot 1-8\cdot 2|-13}{\sqrt{36+64}}=\dfrac{23}{10}=2{,}3$.

Приклад 4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2{,}3{,}-1)$ паралельно площині $5x-y+3z=5$.

Розв'язання. Скориставшись рівнянням площини, що проходить через задану точку, запишемо $A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$. Із паралельності площини випливає, що нормальний вектор $\vec{n}=(A,B,C)=(5,-1,3)$, тому рівняння цієї площини має вигляд $5(x-2)-(y-3)+3(z+1)=0$ або $5x-y+3z-4=0$.

Приклад 5. Написати рівняння площини P, що проходить через точки $M_1(1{,}1{,}1)$ і $M_2(0{,}2{,}1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(2{,}0{,}1)$.

Розв'язання. Знайдемо $\vec{M_1M_2}$; $\vec{M_1M_2}=(-1{,}1{,}0)$. За нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n}=\vec{M_1M_2}\times\vec{a}$:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(1{,}1{,}-2).$$

Скористаємось далі рівнянням площини, заданої точкою $M_1(1{,}1{,}1)$ і нормальним вектором $\vec{n}(1{,}1{,}-2)$:

$$(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0; \qquad P: x+y-2z=0.$$

Приклад 6. Задана площа $P: -2x+y-z-1=0$ і точка $M(1{,}1{,}1)$. Написати рівняння площини P', що проходить через точку M паралельно площині P.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини, що проходить через точку, перпендикулярно до нормального вектора. Через те, що $P'\|P$, їх нормальні вектори рівні: $\vec{n}_p=\vec{n}_{p'}=(-2{,}1{,}-1)$:

$$-2(x-1)+(y-1)-(z-1)=0; \qquad P': -2x+y-z+2=0.$$

Приклад 7. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ площини $3x+5y-z-2=0$.

Розв'язання. Зведемо канонічне рівняння прямої до параметричного вигляду: $x=4t+12$, $y=3t+9$, $z=t+1$.

Підставимо ці вирази в рівняння площини та отримаємо

$$3(4t+12)+5(3t+9)-t-1-2=0,$$

звідки $t=3$.

Задана пряма та площина перетинаються в точці з координатами $x=4\cdot 3+12=24$, $y=3\cdot 3+9=18$, $z=3+1=4$.

Приклад 8. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+y-z=0;\\ 2x-y+2=0.\end{cases}$

Написати канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Канонічні рівняння прямої: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Знайдемо точку $A(x_0, y_0, z_0) \in L$. З цією метою задаємо одну з координат, наприклад $x=0$, а дві інші отримаємо з систем рівнянь, що одержана з даної при $x=0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} y - z = 0; \\ -y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2; \\ y = 2. \end{cases}$$

Маємо: $A(0,2,2) \in L$.

За напрямний вектор $\vec{S}$ візьмемо вектор $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{n}_2 = (2,-1,0)$ - нормальні вектори площини, лінією перетину яких є задана пряма.

Таким чином,

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = (-1,-2,-3),$$

і канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3}; \qquad L: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Приклад 9. Відомі координати вершин трикутника $A(-1,2)$, $B(5,-1)$, $C(-4,-5)$. Знайти: 1) довжину сторони AB; 2) рівняння сторін AB і AC і їх кутові коефіцієнти; 3) внутрішній кут B у радіанах з точністю до 0,01; 4) рівняння медіани AE; 5) рівняння і довжину висоти CD; 6) рівняння прямої,яка проходить через точку M перетину цієї прямої з висотою CD.

Розв'язання. 1. Відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ (рис. 1) знаходимо за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

У нашому випадку $AB = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

2. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки площини, має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Підставляючи у (2) координати точок A і B, отримаємо рівняння сторони AB:

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x+1}{5+1};\ \frac{y-2}{3} = \frac{x+1}{6};\ \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{2};\ 2y - 4 = -x - 1;\ x + 2y - 3 = 0.$$

Якщо рівняння знайденої прямої звести до вигляду $y = kx + b$, то знайдемо кутовий коефіцієнт прямої. У нас $2y = -x + 3$ або $y = -0{,}5x + 1{,}5$.

Отже, $k_{AB} = -\dfrac{1}{2}$.

Аналогічно отримаємо рівняння прямої BC і знайдемо її кутовий коефіцієнт:

$$\frac{y+1}{-5+1} = \frac{x-5}{-4-5};\ \frac{y+1}{-4} = \frac{x-5}{-9};\ -9y - 9 = -4x + 20;\ 4x - 9y - 29 = 0;\ k_{BC} = \frac{4}{9}$$

3. Для знаходження внутрішнього кута B трикутника ABC скористаємось формулою:

$$tgB = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} \qquad (3)$$

Використовуючи попередньо знайдені кутові коефіцієнти за формулою (3), знаходимо:

$$tgB = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{9}} = \frac{17}{14} \approx 1{,}2143.$$

За таблицями В.М. Брадіса або користуючись мікрокалькулятором, знаходимо кут $B \approx 0{,}88$ рад.

4. Щоб записати рівняння медіани AE, спочатку знайдемо координати середини відрізка BC:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + (-4)}{2} = \frac{1}{2};\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-1) + (-5)}{2} = -3.$$

Використовуючи (2), запишемо рівняння медіани AE:

$$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1};\ \frac{3}{2} = (y-2) = -5(x+1);\ 3(y-2) = -10(x+1);\ 10x + 3y + 4 = 0.$$

5. Рівняння висоти CD запишемо як рівняння прямої, яка проходить через точку C у заданому напрямі k_{CD}:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (4)$$

Оскільки пряма AB і CD взаємно перпендикулярні, то між їх кутовими коефіцієнтами існує залежність $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = 2$. За (4) маємо рівняння висоти

$$y + 5 = 2(x + 4);\ 2x - y + 3 = 0$$

Довжину висоти знайдемо за формулою відстані від точки до прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

Підставивши в (5) замість x_0, y_0 координати точки C, а замість A, B, C коефіцієнти прямої AB, маємо

$$d = CD = \frac{|-4 + 2(-5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}}.$$

6. Шукана пряма EK паралельна до AB, тому $k_{EK} = k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

Використовуючи (4),замість x_0, y_0 підставимо координати точки E, отримаємо

$$y + 3 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ 2x + 6 = -x + \frac{1}{2};\ 2x + 4y + 11 = 0\ \ (EK).$$

Для відшукання координат точки M розв'язуємо систему рівнянь, якими описуються прямі EK і CD:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 11 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання її $x=-2{,}3$; $y=-1{,}6$. Отже, $M(-2{,}3;-1{,}6)$.

Приклад 10. Задано прямі l_1 та l_2 і точка *M*;

$l_1: \quad 4x+y-8=0, \quad l_2 \quad x-5y-2=0, \quad M(-4{,}7).$

Знайти:

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на осі координат;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;

3) точку *N* перетину прямих l_1 і l_2;

4) рівняння прямої, що проходить через точку *M* паралельно прямій l_2 перпендикулярно до прямої l_2;

5) відстань від точки *M* до прямої l_2: $p(M,l_2)$;

Усі результати ілюструвати графічно.

Розв'язання

1) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$, де k - кутовий коефіцієнт прямої, b - відрізок, що відтинається прямою на осі ординат з точністю до знака.

Приведемо рівняння прямої l_1 до означеного вигляду:

$l_1: y=-4x+8; \quad k=-4, b=8.$

2) Рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a і b з точністю до знака визначають довжини відрізків, що відтинаються на осях координат;

$l_1: \quad 4x+y-8=0,$	$l_2: \quad x-5y-2=0,$
$4x+y=8,$	$x-5y=2,$
$\frac{x}{8/4}+\frac{y}{8}=1,$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{2/5}=1,$
$a=2; \ b=8,$	$a=2; \ b=-0{,}4.$
$A_1(2;0)\in l_1; \ A_2(0;8)\in l_1$	$B_1(2;0)\in l_2; \ B_2(0;-0{,}4)\in l_2.$

3) Рівняння прямих l_1, l_2 утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши цю систему, знайдемо точку перетину l_1 і l_2:

$$\begin{cases} 4x+y-8=0; \\ x-5y-2=0. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на 5 та склавши ліві і праві частини рівнянь, отримаємо:

$$21x-42=0,$$

$$x=2.$$

Підставимо в перше рівняння $y=2(-4)+8=0.$

Точка $N(2{,}0)$ - точка перетину прямих l_1 і l_2.

4) $l_2: \ x-5y-2=0; \quad M(-4{,}7).$

а) шукана пряма l_3; $l_3 \| l_2$.

Очевидно , що $\vec{n}_{l3}=\vec{n}_{l2}$, $\vec{n}_{l3}$, $\vec{n}_{l2}$ - нормальні вектори прямих l_3, l_2 відповідно; $\vec{n}_{l3}=(1,-5).$

Рівняння прямої, що задана точкою і нормальним вектором $\vec{n}(A,B)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;$$
$$l(x+4y)-5(y-7)=0;$$
$$l_3: x-5y+39=0;\ \ K_1(0;7{,}8)\in l_3.$$

б) шукана пряма l_4; $l_4 \perp l_2$.

Запишемо рівняння прямої l_2 як рівняння прямої, що проходить через дві точки $B_1(2{,}0)$; $B_2(0;-0{,}4)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}:$$
$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{-0{,}4-0};$$

$\vec{S}_{l2}=(1;0{,}2)$, $\vec{S}_{l2}$ - напрямний вектор прямої l_2, але $\vec{S}_{l2}=\vec{n}_{l4}$, $\vec{n}_{l4}$ - нормальний вектор прямої l_4. Запишемо рівняння l_4 як рівняння прямої, що задана точкою $M(-4{,}7)$ і нормальним вектором $\vec{n}_{l4}=(1;-0{,}2)$:

$$l(x+4)+0{,}2(y-7)=0;$$
$$x+0{,}2y+2{,}6=0;$$
$$10x+2y+26=0;$$
$$l_4: 5x+y+13=0;$$
$$K_2(-2{,}6;0)\in l_4.$$

5) Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої l: $Ax+By+C=0$ визначається за формулою

$$p(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$
$$M(-4{,}7);\ \ l_2: x-5y-2=0;$$
$$p(M,l_2)=\frac{|1-(-4)-5\cdot 7-2|}{\sqrt{1+25}}=\frac{41}{\sqrt{26}}.$$

Приклад 11. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M:

$P_1: 5x+3z-7=0,\ \ L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3},\ \ M(2,-3{,}0).$

Знайти:

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площині P_1;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно l_1;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;

6) відстань від точки M до площини $P_1: p(M,P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої $L_1: p(M,L_1)$.

Розв'язання

Згідно з умовою $\vec{n}_{P_1}=(5{,}0{,}3)$, $\vec{S}_{L_1}=(1{,}2{,}3)$, $\vec{n}_{P_1}$. $\vec{S}_{L_1}$ - нормальний вектор площини P_1 і напрямний вектор прямої L_1 відповідно.

1) Враховуючи, що $P_2 \| P_1$, маємо $\vec{n}_{P_2} = \vec{n}_{P_1}$, $\vec{n}_{P_2} = (5,0,3)$, $M(2,-3,0) \in P_2$.

Рівняння площини, що задана точкою $M(x_0, y_0, z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n}(A,B,C)$, має вигляд $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Шукане рівняння: $5(x-2)+0(y+3)+3(z-0)=0$, $P_2: 5x+3z-10=0$.

2) Враховуючи, що $P_3 \perp L_1$, отримуємо $\vec{n}_{P_3} = \vec{S}_{L_1}$, $\vec{n}_{P_3} = (1,2,3)$, $M(2,-3,0) \in P_3$; $1(x-2)+2(y+3)+3(z-0)=0$, $P_3: x+2y+3z+4=0$.

3) Враховуючи, що $P_1 \perp L_2$, отримуємо $\vec{n}_{P_1} = \vec{S}_{L_2}$, $\vec{S}_{L_2} = (5,0,3)$, $M(2,-3,0) \in L_2$.

Рівняння прямої, задано. точкою $M(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S} = (m,n,p)$, має вигляд $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$; $L_2: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{x-0}{3}$.

4) Завдяки тому що $L_3 \| L_1$, отримуємо $\vec{S}_{L_1} = \vec{S}_{L_3}$; $\vec{S}_{L_3} = (1,2,3)$; $M(2,-3,0) \in L_3$; $L_3: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-0}{3}$.

5) Рівняння площини P_1 і прямої L_1 утворюють систему, розв'язок якої дасть координати точки N перетину прямої і площини: $\begin{cases} 5x+3z-7=0; \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3}. \end{cases}$

У рівнянні прямої перейдемо до параметричного завдання:

$$\begin{cases} 5x+3z-7=0, \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3} = t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3z-7=0, \\ x=t, \\ y=2\cdot t+1, \\ z=3\cdot t-1; \end{cases}$$

$5\cdot t+3(3\cdot t-1)-7=0,$

$5\cdot t+9\cdot t-3-7=0,$

$14\cdot t=10,$

$t=\dfrac{5}{7};$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{7}, \\ y=2\cdot\dfrac{5}{7}+1=\dfrac{17}{7}, \\ z=3\cdot\dfrac{5}{7}-1=\dfrac{8}{7}, \end{cases} \qquad N\left(\frac{5}{7},\frac{17}{7},\frac{8}{7}\right).$$

6) $\rho(M,P_1) = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|5\cdot 2+0(-3)+3\cdot 0-7|}{\sqrt{5^2+0^2+3^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

7) $\rho(M,P_1) = \dfrac{\left|\vec{AM}\times\vec{S}_{l4}\right|}{\left|\vec{S}_{l4}\right|}$, де $A(x_1,y_1,z_1) \in L_1$.

З рівняння прямої L_1 випливає, що $A(0,1,-1) \in L_1$; $M(2,-3,0)$;

$$\vec{AM} = (2-0,-3-1,0+1) = (2,-4,1); \quad \vec{S}_{L1} = (1,2,3);$$

$$\vec{AM}\times\vec{S}_{L1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-4&1\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&1\\2&3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2&-4\\1&2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=-14\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}=(-14,-5,8);$$

$$\left|\vec{AM}\times\vec{S}_{L1}\right|=\sqrt{196+25+64}=\sqrt{285};$$

$$\left|\vec{S}_{L1}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};$$

$$\rho(M,P_1)=\frac{\sqrt{285}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{285}{14}}.$$

Приклад 12. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1(3;2)$ і $M_2(2;3)$.

Розв'язання:

Нехай $M(x,y)$ - довільна точка шуканого геометричного місця точок.

За умовою $\left|\overline{M_1M}\right|=\left|\overline{M_2M}\right|$, де

$\left|\overline{M_1M}\right|=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$, $\left|\overline{M_2M}\right|=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, тоді $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ або після спрощень $x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2-6y+9\Rightarrow y-x=0$.

Це рівняння прямої.

Завдання для самостійної роботи

Приклад 1. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3.

Варіанти завдань

1. $M_1(-3;4;-7), M_2(1;5;-4), M_3(-5;-2;0), M_0(-12;7;-1)$.
2. $M_1(-1;2;-3), M_2(4;-1;0), M_3(2;1;-2), M_0(1;-6;-5)$.
3. $M_1(-3;-1;1), M_2(-9;1;-2), M_3(3;-5;4), M_0(-7;0;-1)$.
4. $M_1(1;-1;1), M_2(-2;0;3), M_3(2;1;-1), M_0(-2;4;2)$.
5. $M_1(1;2;0), M_2(1;-1;2), M_3(0;1;-1), M_0(2;-1;4)$.
6. $M_1(1;0;2), M_2(1;2;-1), M_3(2;-2;1), M_0(-5;-9;1)$.
7. $M_1(1;2;-3), M_2(1;0;1), M_3(-2;-1;6), M_0(3;-2;-9)$.
8. $M_1(3;10;-1), M_2(2;3;-5), M_3(-6;0;-3), M_0(-6;7;-10)$.
9. $M_1(-1;2;4), M_2(-1;-2;-4), M_3(3;0;-1), M_0(-2;3;5)$.
10. $M_1(0;-3;1), M_2(-4;1;2), M_3(2;-1;5), M_0(-3;4;-5)$.
11. $M_1(1;3;0), M_2(4;-1;2), M_3(3;0;1), M_0(4;3;0)$.
12. $M_1(-2;-1;-1), M_2(0;3;2), M_3(3;1;-4), M_0(-21;20;-16)$.
13. $M_1(-3;-5;6), M_2(2;1;-4), M_3(0;-3;-1), M_0(3;6;68)$.
14. $M_1(2;-4;-3), M_2(5;-6;0), M_3(-1;3;-3), M_0(2;-10;8)$.
15. $M_1(1;-1;2), M_2(2;1;2), M_3(1;1;4), M_0(-3;2;7)$.

16. $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1)$, $M_3(-1;0;1)$, $M_0(5;-4;5)$.
17. $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0)$, $M_3(-10;5;8)$, $M_0(-12;1;8)$.
18. $M_1(7;2;4)$, $M_2(7;-1;-2)$, $M_3(-5;-2;-1)$, $M_0(10;1;8)$.
19. $M_1(2;1;4)$, $M_2(3;5;-2)$, $M_3(-7;-3;2)$, $M_0(-3;1;8)$.
20. $M_1(-1;-5;2)$, $M_2(-6;0;-3)$, $M_3(3;6;-3)$, $M_0(10;-8;-7)$.
21. $M_1(0;-1;-1)$, $M_2(-2;3;5)$, $M_3(1;-5;-9)$, $M_0(-4;-13;6)$.
22. $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0)$, $M_3(1;2;4)$, $M_0(-3;-6;-8)$.
23. $M_1(2;-1;-2)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(5;0;-6)$, $M_0(14;-3;7)$.
24. $M_1(-2;0;-4)$, $M_2(-1;7;1)$, $M_3(4;-8;-4)$, $M_0(-6;5;5)$.
25. $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2)$, $M_3(-2;-6;-3)$, $M_0(-1;-8;7)$.
26. $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_0(-13;-8;16)$.
27. $M_1(2;-1;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_0(-5;3;7)$.
28. $M_1(1;1;2)$, $M_2(-1;1;3)$, $M_3(2;-2;4)$, $M_0(2;3;8)$.
29. $M_1(2;3;7)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(6;3;7)$, $M_0(-5;-4;8)$.
30. $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_0(-3;-7;6)$.

Приклад 2. Написати рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно вектору BC.

Варіанти завдань

1. $A(1;0;-2)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;-3;2)$.
2. $A(-1;3;4)$, $B(-1;5;0)$, $C(2;6;1)$.
3. $A(4;-2;0)$, $B(1;-1;-5)$, $C(-2;1;-3)$.
4. $A(-8;0;7)$, $B(-3;2;4)$, $C(-1;4;5)$.
5. $A(7;-5;1)$, $B(5;-1;-3)$, $C(3;0;-4)$.
6. $A(-3;5;-2)$, $B(-4;0;3)$, $C(-3;2;5)$.
7. $A(1;-1;8)$, $B(-4;-3;10)$, $C(-1;-1;7)$.
8. $A(-2;0;-5)$, $B(2;7;-3)$, $C(1;10;-1)$.
9. $A(1;9;-4)$, $B(5;7;1)$, $C(3;5;0)$.
10. $A(-7;0;3)$, $B(1;-5;-4)$, $C(2;-3;0)$.
11. $A(0;-3;5)$, $B(-7;2;6)$, $C(-3;2;4)$.
12. $A(5;-1;2)$, $B(2;-4;3)$, $C(4;-1;3)$.
13. $A(-3;7;2)$, $B(3;5;1)$, $C(4;5;3)$.
14. $A(0;-2;8)$, $B(4;3;2)$, $C(1;4;3)$.
15. $A(1;-1;5)$, $B(0;7;8)$, $C(-1;3;8)$.
16. $A(-4;0;9)$, $B(12;4;11)$, $C(8;5;15)$.
17. $A(3;-3;6)$, $B(1;9;-5)$, $C(6;6;-4)$.
18. $A(2;1;7)$, $B(9;0;2)$, $C(9;2;3)$.
19. $A(-7;1;-4)$, $B(8;11;-3)$, $C(9;9;-1)$.
20. $A(1;0;-6)$, $B(-7;2;1)$, $C(-9;6;1)$.

21. $A(-3;1;0)$, $B(6;3;3)$, $C(9;4;-2)$.
22. $A(-4;-2;5)$, $B(3;-3;-7)$, $C(9;3;-7)$.
23. $A(0;-8;10)$, $B(-5;5;7)$, $C(-8;0;4)$.
24. $A(1;-5;-2)$, $B(6;-2;1)$, $C(2;-2;-2)$.
25. $A(0;7;-9)$, $B(-1;8;-11)$, $C(-4;3;-12)$.
26. $A(-3;-1;7)$, $B(0;2;-6)$, $C(2;3;-5)$.
27. $A(5;3;-1)$, $B(0;0;-3)$, $C(5;-1;0)$.
28. $A(-1;2;-2)$, $B(13;14;1)$, $C(14;15;2)$.
29. $A(7;-5;0)$, $B(8;3;-1)$, $C(8;5;1)$.
30. $A(-3;6;4)$, $B(8;-3;5)$, $C(10;-3;7)$.

Приклад 3. Знайти кут між площинами: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Варіанти завдань

1. $A_1 = 1, B_1 = -3, C_1 = 0, D_1 = 5, A_2 = 2, B_2 = -1, C_2 = 5, D_2 = -16$.
2. $A_1 = 1, B_1 = -3, C_1 = 1, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = 0, C_2 = 1, D_2 = -1$.
3. $A_1 = 4, B_1 = -5, C_1 = 3, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = -4, C_2 = -1, D_2 = 9$.
4. $A_1 = 3, B_1 = -1, C_1 = 2, D_1 = 15, A_2 = 5, B_2 = 9, C_2 = -3, D_2 = -1$.
5. $A_1 = 6, B_1 = 2, C_1 = -4, D_1 = 17, A_2 = 9, B_2 = 3, C_2 = -6, D_2 = -4$.
6. $A_1 = 1, B_1 = -\sqrt{2}, C_1 = 1, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = \sqrt{2}, C_2 = -1, D_2 = 3$.
7. $A_1 = 0, B_1 = 3, C_1 = -1, D_1 = 0, A_2 = 0, B_2 = 2, C_2 = 1, D_2 = 0$.
8. $A_1 = 6, B_1 = 3, C_1 = -2, D_1 = 0, A_2 = 1, B_2 = 2, C_2 = 6, D_2 = -12$.
9. $A_1 = 1, B_1 = 2, C_1 = 2, D_1 = -3, A_2 = 16, B_2 = 12, C_2 = -15, D_2 = -1$.
10. $A_1 = 2, B_1 = -1, C_1 = 5, D_1 = 16, A_2 = 1, B_2 = 2, C_2 = 3, D_2 = 8$.
11. $A_1 = 2, B_1 = 2, C_1 = 1, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = 0, C_2 = 1, D_2 = -1$.
12. $A_1 = 3, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = -4, A_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = 1, D_2 = 5$.
13. $A_1 = 3, B_1 = -2, C_1 = -2, D_1 = -16, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = -3, D_2 = -7$.
14. $A_1 = 2, B_1 = 2, C_1 = 1, D_1 = 9, A_2 = 1, B_2 = -1, C_2 = 3, D_2 = -1$.
15. $A_1 = 1, B_1 = 2, C_1 = 2, D_1 = -3, A_2 = 1, B_2 = -1, C_2 = 2, D_2 = 5$.
16. $A_1 = 3, B_1 = 2, C_1 = -3, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = 1, D_2 = -7$.
17. $A_1 = 1, B_1 = -3, C_1 = -2, D_1 = -8, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = -1, D_2 = 3$.
18. $A_1 = 3, B_1 = -2, C_1 = 3, D_1 = 23, A_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = 1, D_2 = 5$.
19. $A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 3, D_1 = -7, A_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = 1, D_2 = -1$.
20. $A_1 = 1, B_1 = -2, C_1 = 2, D_1 = 17, A_2 = 1, B_2 = -2, C_2 = 0, D_2 = -1$.
21. $A_1 = 1, B_1 = 2, C_1 = 0, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = 0, D_2 = 6$.
22. $A_1 = 2, B_1 = 0, C_1 = -1, D_1 = 5, A_2 = 2, B_2 = 3, C_2 = 0, D_2 = -7$.
23. $A_1 = 5, B_1 = 3, C_1 = 1, D_1 = -18, A_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = 0, D_2 = -9$.
24. $A_1 = 4, B_1 = 0, C_1 = 3, D_1 = -2, A_2 = 1, B_2 = 2, C_2 = 2, D_2 = 5$.
25. $A_1 = 1, B_1 = 4, C_1 = -1, D_1 = 1, A_2 = 2, B_2 = 1, C_2 = 4, D_2 = -3$.
26. $A_1 = 0, B_1 = 2, C_1 = 1, D_1 = -9, A_2 = 1, B_2 = -1, C_2 = 2, D_2 = -1$.

27. $A_1 = 2$, $B_1 = -6$, $C_1 = 14$, $D_1 = -1$, $A_2 = 5$, $B_2 = -15$, $C_2 = 35$, $D_2 = -3$.
28. $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = 7$, $D_1 = -1$, $A_2 = 2$, $B_2 = -2$, $C_2 = 0$, $D_2 = -5$.
29. $A_1 = 3$, $B_1 = -1$, $C_1 = 0$, $D_1 = -5$, $A_2 = 2$, $B_2 = 1$, $C_2 = 0$, $D_2 = -3$.
30. $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $C_1 = \sqrt{2}$, $D_1 = -3$, $A_2 = 2$, $B_2 = 3$, $C_2 = 0$, $D_2 = -7$.

Приклад 4. Написати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Варіанти завдань

1. $A_1 = 2$, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $D_1 = -2$, $A_2 = 2$, $B_2 = -1$, $C_2 = -3$, $D_2 = 6$.
2. $A_1 = 1$, $B_1 = -3$, $C_1 = 2$, $D_1 = 2$, $A_2 = 1$, $B_2 = 3$, $C_2 = 1$, $D_2 = 14$.
3. $A_1 = 1$, $B_1 = -2$, $C_1 = -1$, $D_1 = -4$, $A_2 = 2$, $B_2 = 2$, $C_2 = -1$, $D_2 = -8$.
4. $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $D_1 = -2$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = -2$, $D_2 = 2$.
5. $A_1 = 2$, $B_1 = 3$, $C_1 = 1$, $D_1 = 6$, $A_2 = 1$, $B_2 = -3$, $C_2 = -2$, $D_2 = 3$.
6. $A_1 = 3$, $B_1 = 1$, $C_1 = -1$, $D_1 = -6$, $A_2 = 3$, $B_2 = -1$, $C_2 = 2$, $D_2 = 0$.
7. $A_1 = 1$, $B_1 = 5$, $C_1 = 2$, $D_1 = 11$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = -1$, $D_2 = -1$.
8. $A_1 = 3$, $B_1 = 4$, $C_1 = -2$, $D_1 = 1$, $A_2 = 2$, $B_2 = -4$, $C_2 = 3$, $D_2 = 4$.
9. $A_1 = 5$, $B_1 = 1$, $C_1 = -3$, $D_1 = 4$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = 2$, $D_2 = 2$.
10. $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = -1$, $D_1 = -2$, $A_2 = 1$, $B_2 = -2$, $C_2 = 1$, $D_2 = 4$.
11. $A_1 = 4$, $B_1 = 1$, $C_1 = -3$, $D_1 = 2$, $A_2 = 2$, $B_2 = -1$, $C_2 = 1$, $D_2 = 8$.
12. $A_1 = 3$, $B_1 = 3$, $C_1 = -2$, $D_1 = -1$, $A_2 = 2$, $B_2 = -3$, $C_2 = 1$, $D_2 = 6$.
13. $A_1 = 6$, $B_1 = -7$, $C_1 = -4$, $D_1 = -1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 7$, $C_2 = -1$, $D_2 = -5$.
14. $A_1 = 8$, $B_1 = -1$, $C_1 = -3$, $D_1 = -1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 1$, $C_2 = 1$, $D_2 = 10$.
15. $A_1 = 6$, $B_1 = -5$, $C_1 = -4$, $D_1 = 8$, $A_2 = 6$, $B_2 = 5$, $C_2 = 3$, $D_2 = 4$.
16. $A_1 = 1$, $B_1 = 5$, $C_1 = -1$, $D_1 = -5$, $A_2 = 2$, $B_2 = -5$, $C_2 = 2$, $D_2 = 5$.
17. $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $C_1 = 1$, $D_1 = 6$, $A_2 = 1$, $B_2 = -3$, $C_2 = -2$, $D_2 = 3$.
18. $A_1 = 5$, $B_1 = 1$, $C_1 = 2$, $D_1 = 4$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = -3$, $D_2 = 2$.
19. $A_1 = 4$, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $D_1 = 2$, $A_2 = 2$, $B_2 = -1$, $C_2 = -3$, $D_2 = -8$.
20. $A_1 = 2$, $B_1 = 1$, $C_1 = -3$, $D_1 = -2$, $A_2 = 2$, $B_2 = -1$, $C_2 = 1$, $D_2 = 6$.
21. $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $C_1 = -2$, $D_1 = -2$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = 1$, $D_2 = 2$.
22. $A_1 = 1$, $B_1 = 5$, $C_1 = -1$, $D_1 = 1$, $A_2 = 1$, $B_2 = -1$, $C_2 = 2$, $D_2 = -1$.
23. $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = 1$, $D_1 = -2$, $A_2 = 1$, $B_2 = -2$, $C_2 = -1$, $D_2 = 4$.
24. $A_1 = 6$, $B_1 = -7$, $C_1 = -1$, $D_1 = -2$, $A_2 = 1$, $B_2 = 7$, $C_2 = -4$, $D_2 = -5$.
25. $A_1 = 1$, $B_1 = 5$, $C_1 = 2$, $D_1 = -5$, $A_2 = 2$, $B_2 = -5$, $C_2 = -1$, $D_2 = 5$.
26. $A_1 = 1$, $B_1 = -3$, $C_1 = 1$, $D_1 = 2$, $A_2 = 1$, $B_2 = 3$, $C_2 = 2$, $D_2 = 14$.
27. $A_1 = 2$, $B_1 = 3$, $C_1 = -2$, $D_1 = 6$, $A_2 = 1$, $B_2 = -3$, $C_2 = 1$, $D_2 = 3$.
28. $A_1 = 3$, $B_1 = 4$, $C_1 = 3$, $D_1 = 1$, $A_2 = 2$, $B_2 = -4$, $C_2 = -2$, $D_2 = 4$.
29. $A_1 = 3$, $B_1 = 3$, $C_1 = 1$, $D_1 = -1$, $A_2 = 2$, $B_2 = -3$, $C_2 = -2$, $D_2 = 6$.
30. $A_1 = 6$, $B_1 = -5$, $C_1 = 3$, $D_1 = 8$, $A_2 = 6$, $B_2 = 5$, $C_2 = -4$, $D_2 = 4$.

Приклад 5. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0.$

Варіанти завдань

1. $x_0=2, y_0=3, z_0=-1, k=-1, l=-1, m=4, A=1, B=2, C=3, D=-14$.
2. $x_0=-1, y_0=3, z_0=-1, k=3, l=-4, m=5, A=1, B=2, C=-5, D=20$.
3. $x_0=1, y_0=-5, z_0=1, k=-1, l=4, m=2, A=1, B=-3, C=7, D=-24$.
4. $x_0=1, y_0=0, z_0=-3, k=1, l=0, m=2, A=2, B=-1, C=4, D=0$.
5. $x_0=5, y_0=3, z_0=2, k=-1, l=-1, m=0, A=3, B=1, C=-5, D=-12$.
6. $x_0=-1, y_0=-2, z_0=3, k=-3, l=2, m=-2, A=1, B=3, C=-5, D=9$.
7. $x_0=1, y_0=2, z_0=-1, k=-2, l=1, m=-1, A=1, B=-2, C=5, D=17$.
8. $x_0=1, y_0=2, z_0=4, k=2, l=0, m=1, A=1, B=-2, C=4, D=19$.
9. $x_0=-2, y_0=1, z_0=-4, k=-1, l=1, m=-1, A=2, B=-1, C=3, D=23$.
10. $x_0=-2, y_0=2, z_0=-3, k=1, l=0, m=0, A=2, B=-3, C=-5, D=-7$.
11. $x_0=1, y_0=1, z_0=-2, k=2, l=-1, m=3, A=4, B=2, C=-1, D=-11$.
12. $x_0=1, y_0=-1, z_0=1, k=1, l=0, m=-1, A=3, B=-2, C=-4, D=-8$.
13. $x_0=-2, y_0=1, z_0=-3, k=-1, l=1, m=2, A=1, B=2, C=-1, D=-2$.
14. $x_0=-3, y_0=2, z_0=-2, k=1, l=-5, m=3, A=5, B=-1, C=4, D=3$.
15. $x_0=2, y_0=2, z_0=4, k=2, l=-1, m=3, A=1, B=3, C=5, D=-42$.
16. $x_0=3, y_0=4, z_0=4, k=-1, l=5, m=2, A=7, B=1, C=4, D=-47$.
17. $x_0=-3, y_0=1, z_0=1, k=2, l=3, m=5, A=2, B=3, C=7, D=-52$.
18. $x_0=3, y_0=-1, z_0=-3, k=2, l=3, m=2, A=3, B=4, C=7, D=-16$.
19. $x_0=5, y_0=2, z_0=-4, k=-2, l=0, m=-1, A=2, B=-5, C=4, D=24$.
20. $x_0=1, y_0=8, z_0=-5, k=8, l=-5, m=12, A=1, B=-2, C=-3, D=18$.
21. $x_0=3, y_0=1, z_0=-5, k=1, l=-1, m=0, A=1, B=7, C=3, D=11$.
22. $x_0=5, y_0=-3, z_0=1, k=-1, l=5, m=2, A=3, B=7, C=-5, D=-11$.
23. $x_0=1, y_0=2, z_0=6, k=7, l=1, m=-1, A=4, B=1, C=-6, D=-5$.
24. $x_0=3, y_0=-2, z_0=8, k=1, l=-1, m=0, A=5, B=9, C=4, D=-25$.
25. $x_0=-1, y_0=0, z_0=-1, k=-2, l=0, m=3, A=1, B=4, C=13, D=-23$.
26. $x_0=1, y_0=3, z_0=-5, k=6, l=1, m=3, A=3, B=-2, C=5, D=-3$.
27. $x_0=2, y_0=1, z_0=-3, k=4, l=-3, m=-2, A=3, B=-1, C=4, D=0$.
28. $x_0=1, y_0=-2, z_0=3, k=2, l=-5, m=-2, A=1, B=2, C=-5, D=16$.
29. $x_0=1, y_0=3, z_0=-2, k=1, l=0, m=-2, A=3, B=-7, C=-2, D=7$.
30. $x_0=-3, y_0=2, z_0=-5, k=0, l=-3, m=11, A=5, B=7, C=9, D=-32$.

Приклад 6. Знайти координати точки A, рівновіддаленою від точок B і C.

Варіанти завдань

1. $A(0;0;z), B(5;1;0), C(0;2;3)$.
2. $A(0;0;z), B(3;3;1), C(4;1;2)$.
3. $A(0;0;z), B(3;1;3), C(1;4;2)$.
4. $A(0;0;z), B(-1;-1;-6), C(2;3;5)$.
5. $A(0;0;z), B(13;4;6), C(10;-9;5)$.
6. $A(0;0;z), B(5-;-5;-6), C(-7;6;2)$.
7. $A(0;0;z), B(-18;1;0), C(15;-10;2)$.
8. $A(0;0;z), B(10;0;-2), C(9;-2;1)$.
9. $A(0;0;z), B(-6;7;5), C(8;-4;3)$.
10. $A(0;0;z), B(6;-7;1), C(-1;2;5)$.
11. $A(0;0;z), B(7;0;-15), C(2;10;-12)$.
12. $A(0;y;0), B(3;0;3), C(0;2;4)$.
13. $A(0;y;0), B(1;6;4), C(5;7;1)$.
14. $A(0;y;0), B(-2;8;10), C(6;11;-2)$.
15. $A(0;y;0), B(-2;-4;6), C(7;2;5)$.
16. $A(0;y;0), B(2;2;4), C(0;4;2)$.
17. $A(0;y;0), B(0;-4;1), C(1;-3;5)$.
18. $A(0;y;0), B(0;5;-9), C(-1;0;5)$.
19. $A(0;y;0), B(-2;4;-6), C(8;5;1)$.
20. $A(0;y;0), B(7;3;-4), C(1;5;7)$.
21. $A(0;y;0), B(0;-2;4), C(-4;0;4)$.
22. $A(x;0;0), B(0;1;3), C(2;0;4)$.
23. $A(x;0;0), B(4;0;5), C(5;4;2)$.
24. $A(x;0;0), B(8;1;-7), C(10;-2;1)$.
25. $A(x;0;0), B(3;5;6), C(1;2;3)$.
26. $A(x;0;0), B(4;5;-2), C(2;3;4)$.
27. $A(x;0;0), B(-2;0;6), C(0;-2;-4)$.
28. $A(x;0;0), B(1;5;9), C(3;7;11)$.
29. $A(x;0;0), B(4;6;8), C(2;4;6)$.
30. $A(x;0;0), B(1;2;3), C(2;6;10)$.

Приклад 7. Задано прямі l_1 та l_2 і точка M.

Знайти:

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на координат;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;

3) точку N перетину прямих l_1 і l_2;

4) рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно прямій l_2 і перпендикулярно до прямої l_2;

5) відстань від точки M до прямої l_2: $p(M, l_2)$.

Усі результати ілюструвати графічно.

Варіанти завдань

1. $l_1: 5x+3y+8=0$, $l_2: x-4y+20=0$; M (7, -2).
2. $l_1: 3x+2y+2=0$, $l_2: 4x-3y+31=0$; M (6, 0).
3. $l_1: x-5y+9=0$, $l_2: 3x+2y+10=0$; M (7, 3).
4. $l_1: 5x+2y+13=0$, $l_2: 2x-5y+11=0$; M (6, 4).
5. $l_1: 4x+y+10=0$, $l_2: 3x+7y-5=0$; M (5, -4).
6. $l_1: 5x+2y+17=0$, $l_2: 2x-3y+3=0$; M (5, 2).
7. $l_1: 9x-5y+17=0$, $l_2: 4x+y+14=0$; M (8, 4).
8. $l_1: 3x-2y-16=0$, $l_2: x+7y+10=0$; M (-10, 3).
9. $l_1: 2x+3y-15=0$, $l_2: 3x-7y-11=0$; M (-5, -4).
10. $l_1: x-7y+8=0$, $l_2: 2x+5y-22=0$; M (-4, -7).
11. $l_1: 3x-8y+6=0$, $l_2: x+2y-12=0$; M (-8, -3).
12. $l_1: 2x-3y+17=0$, $l_2: 4x-y+9=0$; M (6, -2).
13. $l_1: 3x-y+10=0$, $l_2: 5x-2y+2=0$; M (3, 10).
14. $l_1: 11x+6y+9=0$, $l_2: 3x-y+16=0$; M (5, -4).
15. $l_1: 2x+3y-5=0$, $l_2: 3x+y-4=0$; M (2, 3).
16. $l_1: 3x-2y+7=0$, $l_2: 5x+y+3=0$; M (1, 4).
17. $l_1: 2x-3y+5=0$, $l_2: 2x+5y-12=0$; M (3, -4).
18. $l_1: 4x-3y+5=0$, $l_2: x+4y-13=0$; M (-2, -3).
19. $l_1: 3x+y-7=0$, $l_2: 2x-3y-1=0$; M (-5, -8).
20. $l_1: 2x+5y-14=0$, $l_2: x-3y+4=0$; M (-4, -4).
21. $l_1: 5x+2y+12=0$, $l_2: 4x+3y+5=0$; M (-7, -8).
22. $l_1: 4x+y-13=0$, $l_2: x-5y-8=0$; M (-4, 7).
23. $l_1: 3x-2y-13=0$, $l_2: 2x+7y+8=0$; M (-1, 9).
24. $l_1: 2x-3y+3=0$, $l_2: 3x+y-12=0$; M (-5, -6).
25. $l_1: 4x+y+5=0$, $l_2: 5x-2y+16=0$; M (4, -5).
26. $l_1: 5x+y-7=0$, $l_2: 3x-2y-12=0$; M (-6, 8).
27. $l_1: 2x-3y-5=0$, $l_2: 4x+y-17=0$; M (-5, -2).
28. $l_1: 8x+3y-4=0$, $l_2: 2x+5y-18=0$; M (8, 3).
29. $l_1: 2x-3y+13=0$, $l_2: 2x+7y-8=0$; M (7, 4).
30. $l_1: 5x+y+7=0$, $l_2: 7x-2y+20=0$; M (5, -6).
31. $l_1: x+2y-3=0$, $l_2: 3x-4y+11=0$; M (2, 9).

Приклад 8. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M.

Знайти:

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площини P_1;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;

6) відстань від точки M до площини $P_1 : p(M, P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої $L_1 : p(M, L_1)$.

Варіанти завдань

1. $P_1 : 5x - 3z + 2 = 0$, $L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$, $M(0,2,3)$.

2. $P_1 : x - 3y + 2z + 4 = 0$, $L_1 : \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-3}$, $M(1,0,-3)$.

3. $P_1 : 2x - 3y + 7z + 2 = 0$, $L_1 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{4}$, $M(-4,5,0)$.

4. $P_1 : 3x + y - 2z = 0$, $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+4}{1}$, $M(2,-1,0)$.

5. $P_1 : 4x - 2y + z = 0$, $L_1 : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3}$, $M(3,0,-2)$.

6. $P_1 : 5x + 3y - 6 = 0$, $L_1 : \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{5}$, $M(-2,1,1)$.

7. $P_1 : x + 3y - z = 0$, $L_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$, $M(0,0,4)$.

8. $P_1 : 2x - 5z + 3 = 0$, $L_1 : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$, $M(1,-1,0)$.

9. $P_1 : 3x - 4y - 4z = 0$, $L_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{1}$, $M(0,5,5)$.

10. $P_1 : x + 2y + 2z - 5 = 0$, $L_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$, $M(0,0,4)$.

11. $P_1 : 4x - 3y + 1 = 0$, $L_1 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$, $M(1,-2,1)$.

12. $P_1 : x + 2y - 3z + 4 = 0$, $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+4}{-1}$, $M(-1,0,3)$.

13. $P_1 : 2x - y + 2z - 3 = 0$, $L_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$, $M(0,2,-1)$.

14. $P_1 : 4x - y + z + 1 = 0$, $L_1 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$, $M(1,-1,2)$.

15. $P_1: 5x+2z-3=0$, $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$, $M(2,3,0)$.

16. $P_1: 6x-5y+2=0$, $L_1: \frac{x}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{2}$, $M(2,5,1)$.

17. $P_1: 3y+5z-4=0$, $L_1: \frac{x+5}{-2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{1}$, $M(0,-2,3)$.

18. $P_1: 3x-4y-5=0$, $L_1: \frac{x+2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $M(1,0,-4)$.

19. $P_1: x-3y+2z-1=0$, $L_1: \frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{4}$, $M(1,2,3)$.

20. $P_1: 2x+y-3z=0$, $L_1: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-3}$, $M(0,3,4)$.

21. $P_1: 3x+2z-5=0$, $L_1: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z+2}{4}$, $M(-1,2,-1)$.

22. $P_1: 3x+2y-z=0$, $L_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$, $M(1,0,2)$.

23. $P_1: x-3y+2z-1=0$, $L_1: \frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{4}$, $M(1,3,2)$.

24. $P_1: 4x-y-2z+3=0$, $L_1: \frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$, $M(1,0,-1)$.

25. $P_1: 5x+3z-7=0$, $L_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$, $M(2,-3,0)$.

26. $P_1: 3x+2y-6=0$, $L_1: \frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{5}$, $M(3,0,-2)$.

27. $P_1: 5x-y+2z=0$, $L_1: \frac{x-5}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$, $M(1,2,-1)$.

28. $P_1: 2x-3y+z+1=0$, $L_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$, $M(0,1,-2)$.

29. $P_1: x+2y-3z=0$, $L_1: \frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$, $M(2,0,1)$.

30. $P_1: 3x-4z+11=0$, $L_1: \frac{x}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$, $M(2,9,0)$.

31. $P_1: 4x+3y-9=0$, $L_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{-5}$, $M(1,-2,1)$.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть відомі вам рівняння прямих (загальне, з кутовим коефіцієнтом, прямої, що проходить через дві точки, у відрізках на осях, параметричне тощо).
2. Запишіть координати середини відрізка.
3. Як визначити кут між прямими?
4. Умова паралельності та перпендикулярності прямих.
5. Запишіть основні види рівнянь площин.
6. Як визначити відстань від точки до площини?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко І.П. Вища математика для економістів / І.П.Васильченко. - К., 2002. - 454 с.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова та ін. - К.: КНЕУ, 1996. - 396 с.
3. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с.
4. Высшая математика для экономистов : Учебник для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш.Кремер. – 2-е издание перераб и дои. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 471 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2009.-648 с.
7. Дюженкова Л.І. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: навч. посібник. – К.: Вища школа, 2003.- Ч 2.- 470 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Назієв Е.Х., Владіміров В.М., Миронець О.А. - К. ,1997. - 149 с.
9. Макаренко В.О. Вища математика для економістів : Навч. посібник / Макаренко В.О. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
10. Математические методы в экономике / Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 368 с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: підручник. – К.: Техніка, 2003.-Ч 2.-600 с.
12. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. -М.: Айрис-Пресс, 2000.-Ч. 1-2.-252 с.
13. Тевяшев А.Д. Вища математика. Загальний курс : Збірник задач і вправ. 2-е вид. доп. і доопрац / А.Д.Тевяшев,О.Г.Литвин. – Х.: Рубікон, 1999. – 320 с.

ЗМІСТ