МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Чернігівський національний технологічний університет

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З РОЗДІЛУ ДИСЦИПЛІНИ „ВИЩА МАТЕМАТИКА”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено
на засіданні кафедри вищої та
прикладної математики,
протокол № 2 від 16.09.2015 р.

Чернігів ЧНТУ 2015

Диференціальні рівняння першого порядку. Методичні вказівки до самостійної роботи з розділу дисципліни «Вища математика» для студентів усіх спеціальностей. /Укл.: Балюнов О.О. – Чернігів: ЧНТУ, 2015. – 27 с.

Укладач: БАЛЮНОВ ОЛЕКСІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ

Відповідальний за випуск: БАЛЮНОВ ОЛЕКСІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ, завідувач кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ, кандидат фізико-математичних наук

Рецензент: ЛОСЬ ВАЛЕРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності з розділом “Звичайні диференціальні рівняння” чинної Навчальної програми з вищої математики для технічних, технологічних та природничих спеціальностей вищих навчальних закладів.

Теорія диференціальних рівнянь широко застосовується в побудові математичних моделей як навколишніх природничих явищ, так і в моделюванні задач економіки, соціології тощо.

Мета цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу “Звичайні диференціальні рівняння” дисципліни “Вища математика”. Наведені приклади розв’язання основних стандартних задач сприяють розвиненню відповідних навичок.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять як довідковий матеріал та в якості посібника при проведенні самостійних та модульно-тестових робіт.

1 Основні поняття

Означення. Рівняння $F(x,y,y')=0$, що пов'язує між собою незлежну змінну, шукану (невідому) функцію $y(x)$ та її похідну $y'(x)$ називається *диференціальним рівнянням першого порядку.*

Якщо рівняння $F(x,y,y')=0$ можна записати у вигляді:

$$y'=f(x,y), \tag{1.1}$$

то кажуть, що це рівняння може бути розв'язано відносно похідної і таку форму рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ будемо називати *нормальною*.

В деяких випадках диференціальне рівняння першого порядку (1.1) краще записувати в *диференціальній* формі:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{1.2}$$

де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - відомі функції.

Форма (2) корисна тим, що тут змінні x і y рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію іншої, а тому в деяких випадках корисно за шукану функцію вважати змінну x і записувати рівняння (1.1) або (1.2) у вигляді $x'=g(x,y),$ де $g(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}$.

Означення. *Розв'язком* (або *інтегралом*) диференціального рівняння першого порядку на (a,b) називається будь-яка неперервно-диференційована функція $y=\varphi(x)$ або $x=\psi(y),$ яка при підстановці в це рівняння обертає його в тотожність на (a,b).

Графік функції $y=\varphi(x)$ або $x=\psi(y)$ в такому випадку називається *інтегральною кривою*, а процес знаходження розв'язків даного диференціального рівняння називається *інтегруванням* цього рівняння.

Задача знаходження розвя'зку диференціального рівняння першого порядку (1), що задовольняє *початковій умові* $y(x_0)=y_0$, називається *задачею Коші*.

Геометрично це рівносильно наступному: треба знайти ту інтегральну криву рівняння (1.1), що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Наведемо одну важливу теорему, доведення якої можна знайти в довільному підручнику з диференціальних рівнянь.

Теорема Коші-Пікара (достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку). Якщо у рівнянні $y'=f(x,y)$ функція $f(x,y)$ та її частинна похідна по $y:\frac{df}{dy}$ неперервні в деякій області D на площині XOY, яка містить в собі деяку точку (x_0,y_0), то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y=\varphi(x)$, який задовольняє умову: $y=y_0$ при $x=x_0$.

Загальним розв'язком рівняння (1.1) називається така сім'я функцій $y = \varphi(x, C)$, що залежить від параметра C, що:

1) $\forall (x_0, y_0) \in D$ з рівності $y_0 = \varphi(x_0, C)$ однозначно визначається параметр C;
2) $\forall\ C = C_0$, що визначається формулою $y_0 = \varphi(x_0, C)$, функція $y = \varphi(x, C_0)$ є розв'язком рівняння (1.1).

Геометрично загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ являє собою сім'ю інтегральних кривих, тобто сукупність ліній, що відповідають різним значенням сталої C.

Нормальна форма диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ допускає просту механічну інтерпретацію. Якщо позначити незалежну змінну через t, а шукану функцію через $x = x(t)$, і будемо розглядати t як час, а $x(t)$ як координату рухомої частинки, то при цьому розв'язок $x = \varphi(t)$ рівняння $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ визначає положення рухомої частинки в довільний момент часу t, тобто визначить закон руху частинки по осі X.

Часто загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку доводиться записувати у неявному вигляді: $\Phi(x, y, C) = 0$. Тоді співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$ називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка отримана із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при конкретному значенні сталої $C = C_0$.

Частинним інтегралом диференціального рівняння першого порядку називають рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$, яка отримана із загального інтеграла при фіксованому значенні C.

Геометрично теорема Коші - Пікара означає, що існує (притому єдина) функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку (x_0, y_0).

Розв'язати або, як часто кажуть, проінтегрувати диференціальне рівняння (1.1) або (1.2) – це означає:

1) знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо не задані початкові умови), або
2) знайти той частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам.

Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі Коші слід розуміти таким чином: якщо $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ – два її розв'язки, визначені на $M_1 = (a_1; b_1)$ та $M_2 = (a_2; b_2)$ відповідно, то $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ на $M = M_1 \cap M_2$.

Питання щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші є глибоким і цікавим, тому у спеціальній літературі з диференціальних рівнянь йому приділяється значна увага.

Розглянемо у зв'язку з цим зауваженням наступний приклад.

Приклад 1. Рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ розв'язане відносно похідної. Функції $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ і $y' = f_y'(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ визначені та неперервні для $y > 0,$ тому умови теореми Коші для рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ виконані у верхній півплощині $y > 0.$ Через кожну її точку проходить одна інтегральна крива. Легко перевірити, що в цій області функція $y = (x - C)^2$, де $x - C > 0,$ є загальним розв'язком рівняння. Дійсно, для довільного значення $C > 0$ $y' = 2(x - C),$ $2\sqrt{y} = 2(x - C),$ тобто $y' \equiv 2\sqrt{y}$. Задаючи будь-які початкові умови $x_0, y_0\ (y_0 > 0)$ можна підібрати значення $C_0 : y_0 = (x - C)^2, C_0 = x_0 - \sqrt{y_0}$ та виділити із сукупності розв'язків $y = (x - C)^2$ такий розв'язок $y = \left(x - x_0 + \sqrt{y_0}\right)^2$, що задовольняє заданим початковим умовам. Геометрично загальний розв'язок даного рівняння у верхній півплощині являє собою сімейство правих віток парабол $y = (x - C)^2$, $x - C > 0,$ тобто $\sqrt{y} = x - C.$ Кожна з цих віток зображає частинний розв'язок рівняння. Задаючи початкові умови $x_0, y_0\ (y_0 > 0),$ можна з усього сімейства виділити вітку такої параболи, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Зауваження. Знайдені частинні розв'язки рівняння не вичерпують всіх його розв'язків. Так, наприклад, якщо розглядати рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ в області $y \geq 0,$ то до знайдених вище інтегральних кривих $y = (x - C)^2$, де $x - C > 0,$ додається розв'язок $y \equiv 0,$ який при жодному значенні довільної сталої C не отримується із співвідношення $y = (x - C)^2$. Лінія $y = 0$ в кожній своїй точці дотикається до сім'ї кривих $y = (x - C)^2$. Такі лінії називають *огинаючими* сім'ї кривих. Розв'язки, в кожній точці яких порушуються умова єдиності, тобто через кожну точку проходить більше однієї інтегральної кривої, називають *особливими*. Отже, $y = 0$ - особливий розв'язок рівняння $y' = 2\sqrt{y}$.

Приклад 2. Показати, що задана функція є розв'язком заданого диференціального рівняння:

а) $y = (x + C)e^x$, $y' - y = e^x$;

б) $x^2 - xy + y^2 = C,$ $(x - 2y)dy = (2x - y)dx.$

Розв'язання. а) Знаходимо похідну даної функції $y' = e^x + (x+C)e^x$. Тепер підставимо значення y і y' в задане диференціальне рівняння $e^x + (x+C)e^x - (x+C)e^x = e^x$, отримали тотожність $e^x \equiv e^x$. Отже, функція $y = (x+C)e^x$ є розв'язком рівняння $y' - y = e^x$.

б) Знаходимо похідну даної неявної функції, для цього продиференціюємо обидві частини рівняння $x^2 - xy + y^2 = C$ по $x: 2x - y - xy' + 2yy' = 0,$ звідки $2x - y = (x-2y)y'$ або ж $(x-2y)dy = (2x-y)dx,$ бо $y' = \frac{dy}{dx}$. Отже, функція $x^2 - xy + y^2 = C$ є розв'язком рівняння $(x-2y)dy = (2x-y)dx.$

Приклад 3. З'ясувати, чи є розв'язком заданого диференціального рівняння задана функція:

$$(x+y)dx + xdy = 0,\ y = \frac{C^2 - x^2}{2x}.$$

Розв'язання. Знайдемо диференціал даної функції $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$:

$dy = y'dx = \left(\frac{C^2 - x^2}{2x}\right)' dx = \frac{-4x^2 - 2(C^2 - x^2)}{4x^2} dx = -\frac{C^2 + x^2}{2x^2} dx.$ Підставляючи $dy = -\frac{C^2 + x^2}{2x^2} dx$ та $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$ у вихідне рівняння, будемо мати:

$(x + \frac{C^2 - x^2}{2x})dx - x\frac{C^2 + x^2}{2x^2} dx = \frac{C^2 + x^2}{2x} dx - \frac{C^2 + x^2}{2x} dx = 0,$ тобто це означає, що $y = \frac{C^2 - x^2}{2x} -$ є розв'язком даного рівняння.

Приклад 4. Для заданої сім'ї кривих знайти лінії, що задовольняють заданим початковим умовам:

а) $x^2 - y^2 = C,\ y(0) = 5;$

б) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

Розв'язання. а) За умовою дана крива $x^2 - y^2 = C$ проходить через точку $M_0(0;5)$, тобто координати точки M_0 задовольняють рівнянню $x^2 - y^2 = C$. Підставляючи значення $x = 0, y = 5$, отримаємо, що $C = -25$. Отже, рівняння шуканої лінії буде таким: $x^2 - y^2 = -25$.

б) Оскільки $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, де c_1 і c_2 – довільні сталі, то $y' = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}$. Підставляючи у рівняння для шуканої функції та її похідної

$x = 0$ і враховуючи початкові умови, одержимо систему: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$, з якої $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$. Отже, $y = e^{-2x}$ – шукане рівняння лінії.

2 Геометрична інтерпретація

Диференціальному рівнянню (1.1) можна дати геометричне тлумачення. Справді, нехай $D \subset R_2$ - є область визначення диференціального рівняння (1.1). Візьмемо довільну точку $(x_0; y_0) \in D$ і підставимо в праву частину даного рівняння. Матимемо відповідне значення похідної

$$\frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) \tag{2.1}$$

Отже, точці $(x_0; y_0) \in D$ диференціальне рівняння (1) ставить у відповідність значення похідної. Тоді, якщо через точку $(x_0; y_0)$ проходить інтегральна крива диференціального рівняння (1.1), то $\frac{dy}{dx}$, як відомо, дорівнює $tg\alpha_0$, де α_0 - кут, утворений дотичною, проведеною до інтегральної кривої в точці $(x_0; y_0)$, з додатним напрямом осі OX, тобто

$$\alpha_0 = arctg\frac{dy}{dx} = arctg\ f(x_0; y_0). \tag{2.2}$$

Таким чином, диференціальне рівняння (2.1) в точці $(x_0; y_0) \in D$ ставить у відповідність певний напрям (кут), що визначається формулою (2.2). Тоді точці $(x_1; y_1) \in D$ диференціальне рівняння (1.1) ставить у відповідність напрям $\alpha_1 = arctg\ f(x_1; y_1)$ і т.д. Кожній точці $(x; y) \in D$ диференціальне рівняння (1.1) ставить у відповідність напрям

$$\alpha = arctg\ f(x; y). \tag{2.3}$$

Тому диференціальне рівняння (1.1) можна геометрично інтерпретувати як таке, що задає в області D поле напрямів. На *Рис.2.1* це поле зображене стрілками.

Напрям кожної стрілки визначається формулою (2.3). Як вже зазначалося, розв'язком диференціального рівняння (1.1) є крива, яку називають ще інтегральною кривою. Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $(x; y) \in D$, відрізняється від усіх інших кривих, які

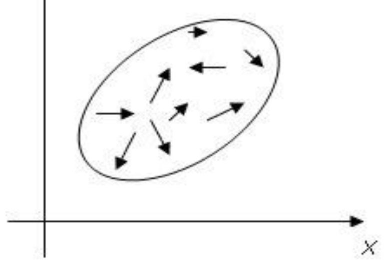

Рисунок 2.1- Поле напрямів

проходять через цю точку, тим, що напрям дотичної в даній точці до інтегральної кривої збігається з напрямом поля, що його задає дане диференціальне рівняння.

Тому геометрично задача інтегрування диференціального рівняння першого порядку може бути сформульована так: *знайти такі криві, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямом поля в цій точці.* На рисунку криву треба проводити так, щоб стрілки визначали в кожній точці напрям до кривої. Знаючи поле напрямів, задане диференціальним рівнянням, можна будувати криві, що задають інтегральні криві даного диференціального рівняння. Щоб побудувати поле напрямів, користуються *методом ізоклін.*

Означення. *Ізокліною* називається крива на площині XOY, в кожній точці якої поле має фіксований напрям.

Таким чином, усі інтегральні криві, які перетинають дану ізокліну, в точках перетину нахилені до осі OX під тим самим кутом. Звідси походить і назва „ізокліна” – лінія однакового напряму. Маючи диференціальне рівняння, можна написати рівняння ізокліни. Так, для диференціального рівняння (1.1) рівняння ізоклін має вигляд

$$f(x, y) = a, \tag{2.4}$$

де a - довільний параметр. Надаючи a різних значень, ми кожного разу діставатимемо на площині XOY рівняння ізокліни. При цьому напрям поля кожної ізокліни визначається формулою

$$\alpha = arctg\ a. \tag{2.5}$$

Приклад 5. Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямів, яке задає диференціальне рівняння $y' = x^2 + y^2$.

Розв’язання. Складемо рівняння сім’ї ізоклін $x^2 + y^2 = a$. Отже ізоклінами тут є кола з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{a}$. Якщо $a = 0$, то матимемо точку $(0;0)$, напрям поля в якій згідно з формулою (6), дорівнює нулю (напрям стрілки збігається з додатнім напрямом осі OX). При $a = 1$ дістаємо ізокліну $x^2 + y^2 = 1$, в кожній точці якої напрям поля дорівнює $\frac{\pi}{4} = arctg 1.$ Поле напрямів, задане диференціальним рівнянням $y' = x^2 + y^2$, показано на *Рис. 2.2*.

Приклад 6. Побудувати поле напрямів, задане диференціальним рівнянням $y' = x.$

Розв’язання. Складемо рівняння сім’ї ізоклін $x = a.$ Отже, ізоклінами даного диференціального рівняння є прямі, паралельні осі OY (*Рис. 2.3*). Поклавши $a = 0$, дістанемо ізокліну $x = 0$ - вісь OY, в кожній точці якої напрям поля паралельний осі OX . При $a = 1$ матимемо пряму $x = 1$, напрям поля кожної точки цієї прямої дорівнює $\frac{\pi}{4}$. При $a = 2$ матимемо ізокліну $x = 2$, напрям поля в кожній точці цієї прямої дорівнює $\alpha = arctg\ 2.$ При $a = -1$ дістанемо ізокліну

$x=-1,$ напрям поля тут в кожній точці дорівнює $-\frac{\pi}{4}$ і т.д. Якщо задати яку-небудь точку (початкову умову), наприклад, $(0;7)$, то можна побудувати наближено інтегральну криву, що проходить через цю точку. Для цього треба криву проводити так, щоб в точках її перетину з ізоклінами напрям дотичної збігався з напрямом поля. Інтегральна крива в даному разі нагадує параболу. Це невипадково, оскільки загальним розв'язком заданого диференціального рівняння є сім'я парабол $y=\frac{x^2}{2}+C.$ Тоді, скориставшись початковою умовою $y(0)=7,$ знаходимо параболу $y=\frac{x^2}{2}+7,$ яка проходить через точку $(0;7)$.

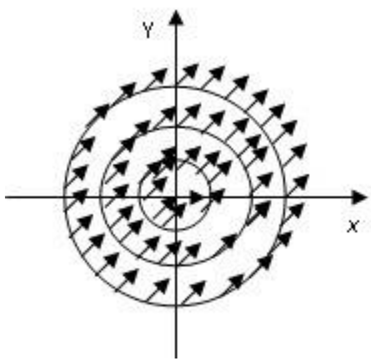

Рисунок 2.2-Поле напрямів

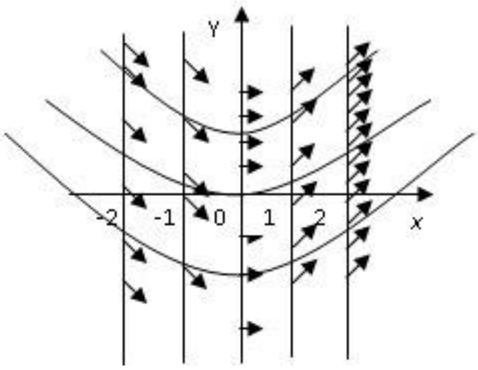

Рисунок 2.3-Поле напрямів

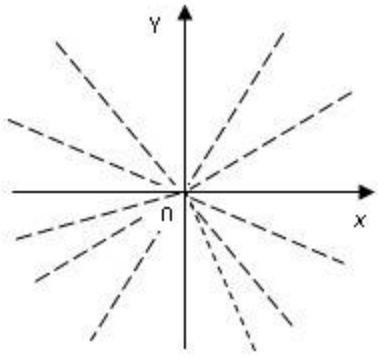

Рисунок 2.4-Поле напрямів

Приклад 7. Побудувати поле напрямів і знайти інтегральні криві рівняння

$y'=\frac{y}{x}.$

Розв'язання. Тут функція $f(x,y)=\frac{y}{x}$ в точці $(0;0)$ не визначена. Тому задане диференціальне рівняння в цій точці напряму не задає. Для точок $x=0$ і $y\neq 0$ розглядатимемо таке диференціальне рівняння $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}.$ Ізоклінами диференціального рівняння $y'=\frac{y}{x}$ є півпрямі $y=ax,$ що виходять з початку координат. Тому напрям поля в кожній точці $(x;y)$, відмінній від точки $(0;0)$, збігається з напрямом прямої, що проходить через цю точку і початок координат (*Рис.2.4*). Дане диференціальне рівняння можна записати ще так: $d(\ln y)=d(\ln x).$ Звідси $y=Cx,\ (x\neq 0),$ тобто загальним розв'язком заданого диференціального рівняння є сім'я півпрямих, що виходить з початку координат. До знайдених інтегральних кривих треба ще приєднати розв'язки диференціального рівняння $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$, відмінні від розв'язків $y'=\frac{y}{x}$. У даному разі це будуть півпрямі $x=0$ $(y\neq 0)$, тобто верхня і нижня частини осі OY.

Зауважимо, що не існує загального єдиного методу інтегрування диференціального рівняння першого порядку. Як правило, розглядають лише деякі окремі типи таких рівнянь, для кожного з яких дається свій особливий спосіб розв'язання.

3 Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з *відокремлюваними змінними*, якщо воно має вигляд:

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0. \tag{3.1}$$

Для розв'язання рівняння (3.1) поділимо обидві частини його на добуток $N_1(y)M_2(x)$, припускаючи, що $N_1(y)M_2(x)\neq 0$, тоді отримаємо:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0. \tag{3.2}$$

Проінтегрувавши обидві частини останньої рівності, отримаємо: $\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$, де $M(x)=\frac{M_1(x)}{M_2(x)}$, $N(y)=\frac{N_2(y)}{N_1(y)}$. Останнє співвідношення і являє собою загальний інтеграл диференціального рівняння (3.1), виражений в неявній формі.

Відмітимо, що рівнянню (3.1) можуть задовольняти розв'язки, які були втрачені при діленні на $N_1(y)M_2(x)$, тобто які одержуються з рівняння $N_1(y)M_2(x)=0.$ Якщо такі розв'язки не входять у знайдений загальний інтеграл, то вони є *особливими розв'язками рівняння* (3.1).

Рівняння $y'=f(x)\cdot g(y)$ (або $x'=f(x)\cdot g(y)$) зводиться до рівняння (3.2). Для цього достатньо покласти $y'=\frac{dy}{dx}$ ($x'=\frac{dx}{dy}$) та відокремити змінні.

Приклад 8. Розв'язати диференціальне рівняння $y'=-\frac{y}{x}\cdot$ Знайти розв'язок, що задовольняє початковій умові: $y(1)=1.$

Розв'язання. Подамо задане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\cdot$ Звідки, відокремлюючи змінні, будемо мати: $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$, а отже, $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$, тобто $\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|$, де довільна стала взята у вигляді логарифма. Після потенціювання одержимо загальний розв’язок $y=\frac{C}{x}$. При діленні на y ми могли загубити розв’язок $y=0,$ але такий розв’язок міститься у виразі $y=\frac{C}{x}$ при $C=0.$ Використавши задану початкову умову, отримаємо $C=1,$ а отже, шуканий частинний розв’язок буде мати вигляд: $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

Приклад 9. Знайти загальний розв’язок рівняння $(x-xy^2)dx+(y-yx^2)dy=0.$ Чи має воно особливі розв’язки?

Розв’язання. Дане рівняння можна записати у вигляді $x(1-y^2)dx+y(1-x^2)dy=0.$ Це рівняння з відокремлюваними змінними, тому поділивши обидві частини рівняння на $(1-y^2)(1-x^2),$ будемо мати: $\frac{x}{1-x^2}dx+\frac{y}{1-y^2}dy=0.$ Інтегруючи останнє, одержимо: $-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|=-\frac{1}{2}\ln|C|, C\neq 0$ (довільну сталу тут зручно записати як: $-\frac{1}{2}\ln|C|$). Після потенціювання одержимо загальний інтеграл вихідного рвняння $(1-y^2)(1-x^2)=C,$ де $C\neq 0.$ При діленні на $(1-y^2)(1-x^2)$ ми могли загубити розв’язоки $y=1,$ $y=-1,$ $x=1,$ $x=-1,$ але вони містяться у загальному інтегралі, якщо підставити додаткове значення $C=0.$ Таким чином, вихідне рівняння особливих розв’язків не має.

Приклад 10. Нехай в реторті є деяка кількість бактерій N_0. Експериментально встановлено, що швидкість розмноження бактарій пропорційна їх кількості. Знайти залежність приросту числа бактерій від часу.

Розв’язання. Позначимо чисельність бактерій в момент часу t через $N=N(t),$ тоді диференціальне рівняння шуканого процесу – швидкість приросту чисельності бактерій, буде мати вигляд: $\frac{dN}{dt}=kN,$ де $k>0-$ коефіцієнт пропорційності. З останнього знаходимо, що $\frac{dN}{N}=kdt,$ тобто $\ln|N|-\ln|C|=kt,$ що рівносильно такому: $N=Ce^{kt}$. Отже, отримали вираз для введеної шуканої функції $N(t)=Ce^{kt}$. Згідно умови задачі $N(0)=N_0$ при $t=0,$ тоді $N_0=C$ і матимемо наступну функціональну залежність: $N(t)=N_0e^{kt}$. Таким чином, чисельність бактерій відповідає експоненціальному закону.

4 Однорідні рівняння

Поняття однорідного диференціального рівняння першого порядку пов'язане з однорідними функціями.

Означення. Многочлен $P(x,y)=\sum\limits_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ називається *однорідним степеня* n, якщо всі члени його мають один порядок n, тобто для кожного $a_{ij}x^i y^j$ маємо, що $i+j=n$. Наприклад, $P(x,y)=2x^2-7xy+5y^2$ є однорідний многочлен другого степеню.

Означення. Функція $P(x,y)$ називається *однорідною функцією* k *-го степеню однорідності* відносно змінних x і y, якщо для будь-яких $\lambda>0$ виконується рівність $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k P(x,y)$. Наприклад:

1) функція $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ - однорідна першого степеню однорідності, бо
$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\cdot\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y);$$
2) функція $f(x,y)=xy-y^2$ - однорідна другого степеню однорідності, бо
$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y);$$
3) функція $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ - однорідна нульового степеню однорідності, бо
$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y).$$

Означення. Рівняння першого порядку $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ називається однорідним відносно x і y, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеню однорідності.

Означення. Рівняння виду $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ називається *однорідним* відносно змінних x і y, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними з однаковим степенем однорідності.

Наприклад, диференціальне рівняння $\sqrt{y^2+xy}\,dx+(x+2y)\,dy=0$ - є однорідним, бо функції $M(x,y)=\sqrt{y^2+xy}$ і $N(x,y)=x+2y$ однорідні першого степеню однорідності.

Зауважимо, що диференціальне однорідне рівняння виду $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ завжди зводиться до однорідного рівняння $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, де $f(x,y)-$ функція нульового степеню однорідності, бо рівняння

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ легко зводиться до такого $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)$ і $f(\lambda x,\lambda y)=-\dfrac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)}=-\dfrac{\lambda^k M(x,y)}{\lambda^k N(x,y)}=-\lambda^0\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$.

Покажемо, що інтегрування однорідного рівняння $y'=f(x,y)$ за допомогою спеціальної підстановки зводиться до інтегрування рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно, оскільки $f(x,y)-$однорідна функція нульового степеню однорідності, то для будь-якого $\lambda: f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y),$ зокрема при $\lambda=\dfrac{1}{x}: f(x,y)=f(1,\dfrac{y}{x})$. Це означає, що права частина рівняння $y'=f(x,y)$ фактично залежить від одного аргумента – відношення $\dfrac{y}{x}:\ f(x,y)=\varphi(\dfrac{y}{x}),$ тобто рівняння $y'=f(x,y)$ можна переписати так: $y'=\varphi(\dfrac{y}{x})$. Далі, ввівши нову невідому функцію $u=\dfrac{y}{x}$ $(y=ux)$, отримаємо замість рівняння $y'=\varphi(\dfrac{y}{x})$ таке $u'x+u=\varphi(u),$ бо $y'=u'x+u.$ Останнє рівняння вже допускає відокремлення змінних.

Приклад 11. Розв’язати диференціальне рівняння $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

Розв’язання. Права частина заданого рівняння є однорідна функція нульового степеню, бо

$f(tx,ty)=\dfrac{tx+ty}{tx-ty}=t^0\cdot\dfrac{x+y}{x-y}=t^0\cdot f(x,y)$. Тому дане диференціальне рівняння є однорідним. Зробимо підстановку $y=u\cdot x$, отримаємо: $u'x+u=\dfrac{1+u}{1-u}$ - рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні в області $u\neq 1(u\neq x)$, будемо мати: $\dfrac{1-u}{1+u^2}du=\dfrac{dx}{x}$, і, інтегруючи, $\int(\dfrac{1}{1+u^2}-\dfrac{u}{1+u^2})du=\int\dfrac{dx}{x}$, тобто $arctgu-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|=\ln|x|+C$. Дістаємо такий загальний інтеграл даного рівняння: $arctg\,\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\ln(1+\dfrac{y^2}{x^2})=\ln|x|+C$.

Приклад 12. Розв’язати диференціальне рівняння $y'=\dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x}+1\right)$.

Розв'язання. Дане рівняння є однорідним. Функція $f(x,y)=\frac{y}{x}(\ln\frac{y}{x}+1)$ визначена при $\frac{y}{x}>0$, тобто при $x>0, y>0$ або $x<0, y<0.$ Покладемо $\frac{y}{x}=u,\ \ y=u\cdot x$, тоді при цьому $y'=u'x+u$, будемо мати: $u'x+u=u(\ln u+1)$ - рівняння з відокремлюваними змінними відносно u. Розв'язуючи його в області $u>0, x>0$ або $u<0, x<0$, одержимо:
$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x},\ \ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|,\ C\neq 0$, тобто $u=e^{cx}.$ Повертаючись до заміни $u=\frac{y}{x}$, знайдемо $\frac{y}{x}=e^{cx}$, тобто $y=x\cdot e^{cx}.$ Отже, $y=x\cdot e^{cx}$ - сукупність розв'язків даного рівняння, де $C\in R\setminus\{0\}$. При відокремленні змінних загублено розв'язок $u=1$, тобто $y=x$. Оскільки його можна одержати з виразу $y=x\cdot e^{cx}$ при $C=0$, будемо мати, що $y=x\cdot e^{cx}$, де $C\in R$ є загальним розв'язком даного рівняння.

До однорідного диференціального рівняння можна звести диференціальне рівняння виду:
$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, де a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 - сталі величини і $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0,$ а $f-$довільна неперервна функція в даній області. Справді, шляхом введення заміни $\begin{cases}x=u+a\\ y=v+b\end{cases}$, де $a,b-$деякі числа, ми перетворимо попереднє рівняння до вигляду: $\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+a_1a+b_1v+b_1b+c_1}{a_2u+a_2a+b_2v+b_2b+c_2}\right)$, бо $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(v+b)}{d(u+u)}=\frac{dv}{du}.$ Для однорідності вільні члени повинні дорівнювати нулю, тобто $\begin{cases}aa_1+b_1b+c_1=0\\ a_2a+b_2b+c_2=0\end{cases}.$
Система алгебраічних рівнянь має єдиний розв'язок, бо $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0.$ Тому ми прийдемо до однорідного рівняння: $\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$відносно змінних u і v, яке зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними, якщо покласти $\frac{v}{u}=z$. Проінтегрувавши, знайдемо його загальний інтеграл $\Phi(u,v,C)=0.$ Підставивши сюди значення $u=x-a,\ v=y-b$ (числа a і b

знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь), дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$.

Приклад 13. Розв'язати диференціальні рівняння $y' = \dfrac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Розв'язання. Тут $a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = -3, a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = -1.$

Оскільки $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то дане диференціальне рівняння зводиться до однорідного шляхом заміни $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$, де a і b знайдемо із системи: $\begin{cases} a + b - 3 = 0 \\ a - b - 1 = 0 \end{cases}$, тобто $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$. Застосувавши підстановку $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 1 \end{cases}$, отримаємо таке рівняння: $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{u + v}{u - v}$, яке є однорідним. Враховуючи результат розв'язку приклада 11, отримаємо такий його загальний інтеграл: $arctg\,\dfrac{v}{u} - \dfrac{1}{2}\ln(1 + \dfrac{v^2}{u^2}) = \ln|u| + C.$ Підставивши сюди значення $u = x - 2,\ v = y - 1$, дістанемо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння: $arctg\,(\dfrac{y-1}{x-2}) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + \dfrac{(y-1)^2}{(x-2)^2}) = \ln|x - 2| + C$.

Наприкінці зазначимо, що у випадку $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ то слід застосувати підстановку $a_1x + b_1y = z.$ В цьому разі від рівняння $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ прийдемо до диференціального рівняння, яке допускає відокремлення змінних.

Приклад 14. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

Розв'язання. В даному випадку $a_1 = 2, b_1 = 1, a_2 = 4, b_2 = 2$ і оскільки $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то слід застосувати підстановку: $2x + y = z$, тобто $2 + y' = z'$. Тоді від даного рівняння прийдемо до диференціального рівняння, яке допускає відокремлення змінних: $z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$, тобто $z' = \frac{z-1}{2z+5} + 2 = \frac{5z+9}{2z+5}$, і $\frac{dz}{dx} = \frac{5z+9}{2z+5}$.

Відокремлюємо змінні: $\frac{2z+5}{5z+9}dz = dx$ та інтегруємо: $\int \frac{(2z+5)dz}{5z+9} = \int dx + C$, тобто $\frac{2}{5}\int dz + \frac{7}{5}\int \frac{dz}{5z+9} = x + C$, звідки $\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C$. Враховуючи те, що $z = 2x + y$, одержимо: $\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| = x + C$. При діленні на $5z+9$ (тобто на $10x+5y+9$) були загублені розв'язки $10x+5y+9=0$. Додаючи їх до отриманої сім'ї розв'язків, знаходимо загальний інтеграл у вигляді:
$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| = x + C$, $10x+5y+9=0$.

5 Лінійні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Означення. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{5.1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - задані неперервні функції від x, називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то таке диференціальне рівняння називається *лінійним однорідним*; якщо $Q(x) \neq 0$, то таке диференціальне рівняння називається *лінійним неоднорідним*.

Розрізняють два основних способи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

- метод Ейлера-Бернуллі;
- метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої).

Метод Лагранжа. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння можна знайти методом варіації довільної сталої (цей метод запропонував Лагранж). Розглянемо суть цього методу:

1) Візьмемо спочатку лінійне однорідне рівняння $y' + P(x)y = 0$, що відповідає даному неоднорідному. Це рівняння з відокремлюваними змінними, тому розділивши їх і проінтегрувавши, знаходимо:

$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|$, звідки $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, де $C = const\,(C \neq 0)$. При відокремленні змінних загублено розв'язок $y = 0$. Але його можна отримати із співвідношення $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ при $C = 0$. Отже, вираз

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (5.2)$$

– є загальним розв'язком рівняння $y' + P(x)y = 0$.

2) Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ будемо шукати у тому ж вигляді (5.2), припустивши, що C - деяка невідома функція від x, тобто у вигляді:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \qquad (5.3)$$

Підставляючи (5.3) у дане неоднорідне диференціальне івняння, матимемо:
$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$, звідки
$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$. Інтегруючи його, знаходимо: $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$, де C – довільна стала.

Таким чином, для будь-якого значення C функція

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right) \qquad (5.4)$$

є розв'язком рівняння $y' + P(x)y = Q(x).$

Приклад 15. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - 2x \cdot y = (x+1)e^{x^2} \;.$$

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним. Функції $P(x) = -2x$ та $Q(x) = (x+1)e^{x^2}$ неперервні всюди. Розв'яжемо дане рівняння методом Лагранжа.

Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння $y' - 2xy = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \;\; \frac{dy}{y} = 2xdx, \;\; \ln|y| = x^2 + \ln|C|, \;\; y = C \cdot e^{x^2}.$$

Тепер будемо шукати загальний розв'язок даного рівняння у вигляді:

$y = C(x) \cdot e^{x^2}$. Тоді $y' = C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot 2xe^{x^2}$. Підставляючи y та y' в дане рівняння $y' - 2xy = (x+1)e^{x^2}$, після зведення подібних, одержимо:

$C'(x) \cdot e^{x^2} = (x+1)e^{x^2}$, тобто $C'(x) = x+1$, звідси $C(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$, де C - довільна стала.

Отже, загальний розв’язок даного рівняння має, вигляд: $y=\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}+C\right)\cdot e^{x^2}$.

Метод Ейлера-Бернуллі. Метод Ейлера-Бернуллі полягає у наступному: розв’язок рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$ шукається у вигляді

$$y=U(x)V(x), \tag{5.5}$$

де одна з функцій довільна. Враховуючи те, що $y'=U'(x)V(x)+V'(x)U(x)$, дістанемо $U'(x)V(x)+V'(x)U(x)+P(x)U(x)V(x)=Q(x)$, звідки після групування матимемо:

$$U'(x)V(x)+U(x)(V'(x)+P(x)V(x))=Q(x). \tag{5.6}$$

Далі виберемо $V(x)$ таким чином, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто $V'(x)+P(x)V(x)=0, \dfrac{dV(x)}{V(x)}=-P(x)dx$, звідки $V(x)=Ce^{-\int P(x)dx}$. В останній рівності покладем $C=1: V(x)=e^{-\int P(x)dx}$ (враховуючи те, що $V(x)$-довільна функція). Останнє підставимо в рівняння (5.6):

$U'(x)e^{-\int P(x)dx}+0=Q(x)$, тобто $U'(x)=Q(x)e^{-\int P(x)dx}$, звідки $U(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}+C$, де C – довільна стала. Таким чином, дістали:

$$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C\right)e^{-\int P(x)dx} \tag{5.7}$$

– загальний розв’язок даного рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$, який збігається з розв’язком (5.4), знайденим за методом варіації довільної сталої.

Приклад 16. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння
$4y^2dx+(x+e^{\frac{1}{2y}})dy=0,\ y(e)=\dfrac{1}{2}$.

Розв’язання. Перепишемо дане рівняння у такому вигляді: $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{4y^2}\cdot x=-\dfrac{e^{\frac{1}{2y}}}{4y^2}$,

або $x'+\dfrac{1}{4y^2}\cdot x=-\dfrac{e^{\frac{1}{2y}}}{4y^2}$. Ми отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння відносно $x=x(y)$, де функція $P(y)=\dfrac{1}{4y^2}$, $Q(y)=-\dfrac{e^{\frac{1}{2y}}}{4y^2}$ неперервні при всіх $y\neq 0$. Знайдемо загальний його розв’язок методом Ейлера-Бернуллі. Покладемо $x=u\cdot v$, де $u=u(y), v=v(y)$ - деякі функції від y, тоді

$x' = u'v + v'u$ та отримаємо: $u'v + v'u + \frac{u \cdot v}{4y^2} = -\frac{e^{\frac{1}{2y}}}{4y^2}$, або

$u'v + (v' + \frac{v}{4y^2}) \cdot u = -\frac{e^{\frac{1}{2y}}}{4y^2}$. Далі підберемо функцію $v = v(y)$ так, щоб вираз у дужках останнього рівняння був рівним нулю, тобто розв'яжемо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$v' + \frac{v}{4y^2} = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{4y^2}$, $\ln|v| = \frac{1}{4y} + C$, $v = e^{\frac{1}{4y}+c}$. Оскільки нам достатньо якого-небудь одного ненульового розв'язку $v = v(y)$, то візьмемо самий простий $v = e^{\frac{1}{4y}}$. Тоді, для знаходження функції $u(y)$ розв'яжемо наступне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $u' \cdot e^{\frac{1}{4y}} = -\frac{e^{\frac{1}{2y}}}{4y^2}$,

$u' = -\frac{e^{\frac{1}{2y}} : e^{\frac{1}{4y}}}{4y^2} = -\frac{e^{\frac{1}{4y}}}{4y^2}$, $du = -\frac{e^{\frac{1}{4y}}}{4y^2} dy$, звідки

$u = -\int e^{\frac{1}{4y}} \frac{dy}{4y^2} = \int e^{\frac{1}{4y}} \cdot d(\frac{1}{4y}) = e^{\frac{1}{4y}} + C$. Таким чином,

$x = u \cdot v = (e^{\frac{1}{4y}} + C) \cdot e^{\frac{1}{4y}}$ - є загальним розв'язком вихідного рівняння. Із цього сімейства кривих нам треба виділити ту, яка проходить через точку $(e; \frac{1}{2})$.

Підставивши значення $x = e, y = \frac{1}{2}$ в рівняння цього сімейства, визначимо C:

$e = (e^{\frac{1}{2}} + C)e^{\frac{1}{2}}$, тобто $C = 0$. Отже, $x = e^{\frac{1}{2y}}$ - шуканий частинний розв'язок вихідного рівняння.

Означення. Рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1, \tag{5.8}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - неперервні функції від x, називається *рівнянням Бернуллі*.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного: поділивши всі члени рівняння на y^n, отримаємо: $y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$. Далі, зробимо заміну $Z = y^{-n+1}$, тоді

$dz = (1-n)y^{-n}dy$ і матимемо: $z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ - лінійне диференціальне рівняння.

Зауважимо, рівняння Бернуллі можна розв'язувати одразу шляхом підстановки $y = U(x) \cdot V(x)$.

Приклад 17. Розв'язати диференціальне рівняння $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$.

Розв'язання. Дане рівняння зводиться до вигляду: $y' - \frac{4}{x}y = 2x^2\sqrt{y}$, тобто це рівняння Бернуллі $(n = \frac{1}{2})$. Покладемо $y = u \cdot v$, де $u = u(x), v = v(x)$ - деякі функції від x, тоді $y' = u'v + v'u$ та отримаємо рівняння $u'v + v'u - \frac{4}{x}u \cdot v = 2x\sqrt{u \cdot v}$ або $u'v + u(v' - \frac{4}{x}v) = 2x\sqrt{u \cdot v}$.(*) Підберемо функцію $v = v(x)$ так, щоб $v' - \frac{4}{x}v = 0$, тобто розв'язуємо рівняння з відокремлюючими змінними: $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$, $\ln|v| = 4\ln|x| + 4\ln|C|$, $v = \left(x \cdot C\right)^4$.

Обираючи найпростіший ненульовий розв'язок (при $C = 1$), знаходимо $v = x^4$.

Підставляючи $v = x^4$ у рівняння (*), будемо мати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, з якого знайдемо функцію $u(x)$: $u' \cdot x^4 = 2x\sqrt{u \cdot x^4}$, $u' \cdot x^4 = 2x^3\sqrt{u}$, $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$,

$\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|xC|,\ C \neq 0$, тобто $u = \ln^2|x \cdot C|,\ C \neq 0$.

Отже, $y = u \cdot v = x^4 \cdot \ln^2|x \cdot C|,\ C \neq 0$. Легко бачити, що $y = 0$ - особливий розв'язок вихідного рівняння. Таким чином, $y = u \cdot v = x^4 \cdot \ln^2|x \cdot C|, C \neq 0,\ \ y = 0$ - шукані розв'язки.

6 Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Означення. Рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (6.1)$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - неперервні і диференційовні, для яких виконується рівність:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (6.2)$$

причому $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - неперервні в деякій області.

Доведено, що якщо $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$, тому рівняння (6.1) $\Leftrightarrow du(x,y)=0$, а значить $u(x,y)=C$ - загальний інтеграл рівняння (6.1).

Приклад 18. Знайти загальний інтеграл рівняння: $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$.

Розв'язання. Тут $P(x,y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x,y)=e^y+x+x\cos y$. Перевіримо виконання умови (6.2) : $\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y,$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$, а значить дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо функцію u, використовуючи рівності $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\sin y$ та $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x+x+x\cos y$. Інтегруючи першу рівність по x (вважатимемо y сталою), знаходимо: $u(x,y)=\int(e^x+y+\sin y)dx=e^x+xy+x+x\sin y+\varphi(y)$, де $\varphi(y)$ - довільна диференційована по y функція. Знайдемо $\varphi(y)$, продиференціювавши отриману рівність по y та врахувавши другу рівність $(\frac{\partial u}{\partial y}=e^x+x+x\cos y)$:

$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+\varphi'(y)=e^y+x+x\cos y$, звідки $\varphi'(y)=e^y$, тобто $\varphi(y)=e^y+C_1$. Отже, $u(x,y)=e^x+xy+x+x\sin y+e^y+C_1$.

Загальним інтегралом є співвідношення $e^x+xy+x+x\sin y+e^y+C_1=C_2$ або : $e^x+xy+x+x\sin y+e^y=C$, де $C=C_1-C_2$.

Приклад 19. З сімейства інтегральних кривих диференціального рівняння $2x\cos^2 y+(2y-x^2\sin 2y)y'=0$ вибрати ту, яка проходить через точку $(1;0)$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння в диференціальній формі, а саме в такому вигляді: $2x\cos^2 y dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$. Маємо $P(x,y)=2x\cos^2 y$, $Q(x,y)=2y-x^2\sin 2y$, і оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=-4x\cos y\sin y=-2x\sin 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\sin 2y$, то з рівності частинних похідних випливає, що це рівняння в повних диференціалах. Це означає, що існує така функція $u(x,y)$, для якої

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y$. Проінтегрувавши другу рівність, знайдемо $u(x, y)$ з точністю до довільної функції від x: $u(x, y) = \int (2y - x^2 \sin 2y)dy = y^2 + \frac{1}{2}x^2 \cos 2y + \varphi(x)$. Для знаходження $\varphi(x)$, продиференціюємо знайдену функцію по x та прирівняємо до вже відомого значення $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y$: $\frac{\partial u}{\partial x} = x\cos 2y + \varphi'(x) = 2x\cos^2 y$, звідси $\varphi'(x) = 2x\cos^2 y - x\cos 2y = 2x\cos^2 y - x(2\cos^2 y - 1) = x$, тобто $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1$. Таким чином, рівняння сімейства інтегральних кривих буде мати вигляд: $y^2 + \frac{1}{2}x^2 \cos 2y + \frac{1}{2}x^2 = C$. З цього сімейства кривих треба виділити ту, яка проходить через точку $(1;0)$. Підставивши значення $x = 1, y = 0$ в останнє рівняння, одержимо, що $C = -1$.

Значить, рівняння шуканої кривої таке: $y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 = 0$.

Зауважимо, що умова (6.2) може не виконуватись, але рівняння (6.1) можна звести до рівняння в повних диференціалах за допомогою множення на деяку функцію $\mu = \mu(x, y)$.

Так рівняння $ydx - xdy = 0$ не є рівнянням у повних диференціалах , бо $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, а $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Якщо обидві частини рівняння помножити на функцію $\mu = \frac{1}{y^2}$, дістанемо диференціальне рівняння $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ - у повних диференціалах: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$.

Означення. Функція $\mu = \mu(x, y)$, після множення на яку обох частин диференціального рівняння останнє зводиться до диференціального рівняння в повних диференціалах, називається *інтегруючим множником*.

Отже, для диференціального рівняння $ydx - xdy = 0$ функція $\mu = \frac{1}{y^2}$ є інтегруючим множником.

У теорії диференціальних рівнянь доведено, що для будь-якого диференціального рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ з неперервними функціями $P(x,y)$, $Q(x,y)$ в деякій області, існує інтегруючий множник. Задача про знаходження інтегруючого множника зводиться до інтегрування диференціального рівняння в частинних похідних. Ця задача є значно складнішою, ніж інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.

Проте може статися так, що інтегруючий множник є функцією тільки однієї змінної x або y, тоді знаходження цього інтегруючого множника спрощується. В цьому разі можна легко знайти навіть формулу для інтегруючого множника:

— якщо $\mu=\mu(x)$, то $\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}$, причому вираз $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ повинен залежати тільки від x;

— якщо $\mu=\mu(y)$, то $\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}dy}$, при чому підінтегральний вираз повинен залежати тільки від y.

Приклад 20. Знайти інтегруючий множник та розв’язати рівняння

$$(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0.$$

Розв’язання. Тут $\frac{\partial P}{\partial y}=4xy-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. Отже $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$. Оскільки відношення $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=\frac{4xy-1-1}{2xy^2-y}=\frac{-2}{y}$ не залежить від x, то інтегруючий множник можна знайти за формулою $\mu(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}dy}=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\frac{1}{y^2}$ (вважатимемо, що стала інтегрування дорівнює 1). Помноживши обидві частини заданого рівняння на інтегруючий множник $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$, дістанемо рівняння у повних диференціалах: $(2x-\frac{1}{y})dx+(1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y})dy=0$, $P(x,y)=2x-\frac{1}{y}$, $Q(x,y)=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$. Знайдемо загальний інтеграл цього рівняння. Позначимо $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}$. Перший вираз зінтегруємо по x :

$u(x, y) = \int (2x - \frac{1}{y})dx = x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y)$. Останнє продиференціюємо по y : $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$, звідки отримаємо $\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}$, тобто $\varphi'(y) = 1 + \frac{1}{y}$, а $\varphi(y) = y + \ln|y| + C_1$. Остаточно матимемо: $u(x, y) = x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| + C_1$.

Таким чином, $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C$ - загальний інтеграл рівняння.

Рекомендована література

1. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб. Кн. 1/ Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва; За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 1994. — 288 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.
4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. — К.: Либідь, 2003. — 504 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1979. — 175 с.