

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З МАТЕМАТИКИ
для слухачів підготовчих курсів**

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри вищої і
прикладної математики,
протокол № 10 від 15.04.2015р.

Чернігів 2015

Збірник задач до практичних занять і самостійної роботи з математики для слухачів підготовчих курсів. Укл.: Мурашковська В.П., – Чернігів: ЧНТУ, 2015. – 126с.

Укладач: Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач

Відповідальний за випуск: Балюнов Олексій Олександрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

Рецензент: Корнієнко Світлана Петрівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

ВСТУП.....	6
1 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ.....	7
2 ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ	10
2.1 АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ.....	10
2.1.1 Числа і вирази.....	10
2.1.2 Рівняння, нерівності та їх системи	11
2.1.3 Функції	13
2.1.4 Початки аналізу.....	14
2.1.5 Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики.....	14
2.2 ГЕОМЕТРІЯ	15
2.2.1 Планіметрія.....	15
2.2.2 Стереометрія.....	16
3 ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ.....	18
3.1 ТЕМА: Арифметичні обчислення. Тотожні перетворення. Прогресії.....	18
3.1.1 Самостійна робота	18
3.1.2 Тестові завдання	20
3.1.3 Відповіді.....	24
3.2 ТЕМА: Цілі раціональні рівняння і нерівності.	25
Дробово - раціональні рівняння і нерівності. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля. Системи рівнянь і нерівностей.....	25
3.2.1 Самостійна робота	25
3.2.2 Тестові завдання.....	29
3.2.3 Відповіді.....	35
3.3 ТЕМА: Ірраціональні рівняння та нерівності. Системи рівнянь і нерівностей	37
3.3.1 Самостійна робота.....	37
3.3.2 Тестові завдання	38
3.3.3 Відповіді.....	41

3.4 ТЕМА: Показникові та логарифмічні перетворення. Показникові рівняння та нерівності. Логарифмічні рівняння та нерівності. Системи рівнянь і нерівностей	42
3.4.1 Самостійна робота	42
3.4.2 Тестові завдання.....	44
3.4.3 Відповіді.....	48
3.5 ТЕМА: Основні тригонометричні формули. Тригонометричні рівняння і нерівності. Системи рівнянь і нерівностей	49
3.5.1 Самостійна робота	49
3.5.2 Тестові завдання	51
3.5.3 Відповіді.....	55
3.6 ТЕМА: Елементарні функції та їх властивості. Побудова графіків методом геометричних перетворень	57
3.6.1. Самостійна робота.....	57
3.6.2 Тестові завдання.....	59
3.6.3 Відповіді.....	63
3.7 ТЕМА: Похідна функції. Її геометричний і механічний зміст. Застосування похідної. Первісна. Інтеграл	68
3.7.1 Самостійна робота	68
3.7.2 Тестові завдання.....	72
3.7.3 Відповіді.....	77
3.8 ТЕМА: Векторна алгебра	79
3.8.1 Самостійна робота	79
3.8.2 Тестові завдання.....	81
3.8.3 Відповіді.....	89
3.9 ТЕМА: Планіметрія	90
3.9.1 Самостійна робота	90
3.9.2 Тестові завдання.....	92
3.9.3 Відповіді.....	99
3.10 ТЕМА: СТЕРЕОМЕТРІЯ.....	100

3.10.1 Самостійна робота	100
3.10.2 Тестові завдання.....	103
3.10.3 Відповіді.....	110
Додаток А – Довідковий матеріал	111
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	123

ВСТУП

Сучасний етап розвитку освітньої галузі вимагає вирішення цілої низки питань, що стосуються зовнішнього незалежного оцінювання як суспільного явища взагалі: з одного боку – як ефективного інструменту освітнього моніторингу, а з іншого – як нової системи вступних випробувань до вищих навчальних закладів. Особливої уваги потребує створення відповідної методики підготування до цього виду контролю знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів. Систематична робота в цьому напрямку передбачає охоплення всього програмного матеріалу з математики.

Збірник задач до практичних занять і самостійної роботи з математики для слухачів підготовчих курсів можна використовувати для підготовки до екзамену з математики у формі ЗНО, а також студентами першого курсу для самопідготовки і усунення прогалин з елементарної математики.

1 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Головна мета діяльності підготовчих курсів з математики спрямована на те, щоб за порівняно короткий період підняти рівень знань слухачів, надати їм можливість оволодіти новими знаннями та практичними навичками, систематизувати вже набуті, розвинути свої здібності та отримати віру в себе.

Метою вивчення дисципліни є підготовка майбутніх абітурієнтів до складання тестів ЗНО і поглиблення знань з математики для подальшого успішного навчання у ВНЗ.

Завданням дисципліни є:

- ознайомити слухачів з особливостями програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики і специфікою процедури проведення ЗНО в поточному навчальному році;

- забезпечити свідоме і міцне оволодіння учнями системи математичних знань, навичок і умінь необхідних для складання ЗНО з математики та достатніх для успішного засвоєння базових і спеціальних навчальних предметів обраного ВНЗ;

- узагальнити і систематизувати знання учнів з курсу елементарної математики, якими вони повинні володіти (згідно з Програмою ЗНО);

- розширити та поглибити вивчення деяких тем з математики,

- вивчення яких обмежено, або не передбачено в середній школі;

- виробляти навички роботи з тестовими завданнями.

Слухач повинен знати:

- зміст основних понять, означень, аксіом, теорем, які вживаються в математиці;

- закони дій над числами і виразами;

- означення, властивості і графіки елементарних функцій;

- методи розв’язання рівнянь, нерівностей та систем;
- основні тригонометричні формули;
- властивості логарифмічних функцій;
- методи розв’язання тригонометричних рівнянь, систем та нерівностей;
- поняття послідовності і границі, арифметичної і геометричної
- прогресій;
- поняття похідної, її геометричне і фізичне тлумачення;
- поняття невизначеного і визначеного інтегралів;
- поняття випадкової події і її ймовірності;
- теореми планіметрії та стереометрії;
- найпростіші фігури планіметрії і стереометрії і їх властивості;
- специфіку процедури проведення ЗНО з математики в поточному навчальному році;
- сертифікаційні характеристики тестового зошита (базового і поглибленого рівнів).

Слухач повинен уміти:

- будувати математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики;
- виконувати математичні розрахунки (виконувати дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, складати та розв’язувати задачі на пропорції, наближені обчислення тощо);
- виконувати перетворення виразів (розуміти змістове значення кожного елемента виразу, знаходити допустимі значення змінних, знаходити числові значення виразів при заданих значеннях змінних тощо);
- будувати й аналізувати графіки найпростіших функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості;
- розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи, розв’язувати текстові задачі за допомогою рівнянь, нерівностей та їхніх систем;
- розв’язувати найпростіші комбінаторні задачі та обчислювати ймовірності випадкових подій;
- аналізувати інформацію, що подана в графічній, табличній, текстовій та інших формах.

- знаходити на рисунках геометричні фігури та встановлювати їхні властивості;
- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур (довжини, величини кутів, площі, об'єми);
- засвоїти методику роботи з тестовими завданнями;
- застосовувати здобуті знання з математики в практичній діяльності.

Слухач повинен мати уяву:

- про метод математичної індукції і його застосування для доведення тотожностей;
- про операції над множинами і подіями;
- про закони розширення числових множин і множину комплексних чисел;
- про нестандартні методи розв'язання рівнянь і нерівностей;
- про границі змінних величин;
- про застосування методу координат і векторної алгебри при розв'язанні геометричних задач;
- про випадкові величини і закони їх розподілу.

2 ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ

2.1 АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

2.1.1 Числа і вирази

- Множини чисел. Переріз та об'єднання множин. Натуральні числа і нуль. Читання і запис натуральних чисел. Порівняння натуральних чисел. Дії над натуральними числами.
- Подільність натуральних чисел. Дільники і кратні натурального числа. Парні і непарні числа. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10. Ділення з остачею. Прості і складені числа. Розкладання натурального числа на прості множники. Найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне.
- Звичайні дроби. Порівняння звичайних дробів. Правильний і неправильний дріб. Ціла та дробова частина числа. Основна властивість дроби. Скорочення дроби. Середнє арифметичне кількох чисел. Основні задачі на дроби.
- Додатні та від'ємні числа. Протилежні та взаємно-обернені числа. Цілі числа. Раціональні числа, їх порівняння та дії над ними. Пропорція та її основна властивість. Обчислення дробових виразів.
- Означення арифметичного квадратного кореня. Властивості арифметичного квадратного кореня. Формула складного радикалу. Ірраціональні числа, їх порівняння та дії над ними. Обчислення виразів, що містять квадратні корені.
- Модуль числа. Означення та геометричний зміст модуля. Властивості модулів. Перетворення та обчислення виразів, що містять модулі.
- Відсотки. Основні задачі на відсотки.
- Степінь з натуральним показником. Означення та властивості.
- Степінь з цілим та раціональним показником. Означення та властивості. Обчислення виразів, що містять степені.
- Арифметичний корінь n -ої степені та його властивості.
- Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.

- Корінь многочлена. Ділення многочленів. Теорема Безу та її наслідки.
- Перетворення раціональних та ірраціональних виразів.
- Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса числового аргументу.
- Залежність між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу. Тригонометричні функції суми та різниці двох аргументів, половинного і подвійного аргументів. Формули зведення. Формули універсальної підстановки. Перетворення суми тригонометричних функцій в добуток та добуток в суму. Введення допоміжного кута.
- Перетворення тригонометричних виразів та обчислення їх значень. Доведення тригонометричних тотожностей.
- Означення логарифма. Основна логарифмічна тотожність. Властивості логарифмів. Десятковий та натуральний логарифм. Порівняння логарифмів.
- Перетворення та обчислення логарифмічних виразів.

2.1.2 Рівняння, нерівності та їх системи

- Лінійне рівняння. Розв'язок лінійного рівняння. Лінійне рівняння з модулем. Лінійне рівняння з параметром.
- Система лінійних рівнянь. Методи підстановки, додавання та порівняння для розв'язування системи лінійних рівнянь. Графічний метод. Система лінійних рівнянь з параметром.
- Лінійна нерівність. Лінійна нерівність з модулем. Лінійна нерівність з параметром.
- Квадратне рівняння. Формули коренів квадратного рівняння. Теорема Вієта та її застосування. Квадратне рівняння з параметром. Співвідношення між коренями квадратного тричлена (застосування теореми Вієта) в завданнях з параметром.
- Квадратна нерівність. Умови розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданих точок. Квадратна нерівність з параметром.
- Дробово-раціональне рівняння. Текстові задачі на складання рівнянь.

- Дробово-раціональна нерівність. Визначення розв'язків нерівності. Рівносильні нерівності. Розв'язування дробово-раціональних нерівностей різними методами.
- Системи нелінійних раціональних рівнянь та нерівностей. Однорідні, колові та симетричні системи рівнянь.
- Текстові задачі на складання систем рівнянь. Розв'язування задач на рух, роботу, суміші та сплави, складні відсотки.
- Рівняння та нерівності вищих степенів. Розв'язування рівнянь вищих степенів методами розкладання на множники та введення допоміжної змінної.
- Ірраціональні рівняння. Розв'язування ірраціональних рівнянь методами: рівнянь-наслідків, рівносильних перетворень, введення нової змінної. Ірраціональні рівняння, що містять змінну під знаком модуля.
- Ірраціональні нерівності. Розв'язування ірраціональних нерівностей методами рівносильних перетворень та загальним методом.
- Системи ірраціональних рівнянь та нерівностей. Способи їх розв'язання.
- Тригонометричні рівняння. Найпростіші тригонометричні рівняння. Розв'язування тригонометричних рівнянь різними методами. Параметр в тригонометричному рівнянні.
- Тригонометричні нерівності. Найпростіші тригонометричні нерівності. Розв'язування тригонометричних нерівностей за допомогою координатного кола або графіків тригонометричних функцій.
- Системи тригонометричних рівнянь. Розв'язування завдань підвищеної складності.
- Найпростіші показникові рівняння та нерівності. Розв'язування показникових рівнянь та нерівностей методами зведення до однієї основи та введення нової змінної.
- Найпростіші логарифмічні рівняння та нерівності. Методи зведення до однієї основи та введення нової змінної при розв'язуванні логарифмічних рівнянь та нерівностей.
- Степенево-показникові рівняння та нерівності.
- Розв'язування логарифмічних та показникових рівнянь і нерівностей різними методами.

- Системи логарифмічних і показникових рівнянь та нерівностей.
- Розв'язування завдань підвищеної складності. Завдання підвищеної складності. Завдання з параметрами.

2.1.3 Функції

- Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення, область значень функції.
- Графік функції. Зростання і спадання, парність і непарність, періодичність функції.
- Загальний підхід до побудови графіків функцій (без застосування похідних). Дії з графіками (додавання, множення, ділення, побудова складених функцій).
- Лінійна функція, її властивості і графік. Часткові випадки лінійної функції. Взаємне розташування прямих ліній.
- Квадратична функція, її властивості і графік. Побудова параболи (напрям віток, координати вершини). Елементарні перетворення графіка квадратичної функції.
- Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості і графік. Побудова гіперболи. Елементарні перетворення графіка оберненої пропорційності.
- Функція обернена до даної. Графіки та властивості функцій $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$.
- Графік рівняння з двома змінними. Елементарні перетворення графіків. Застосування графіків для розв'язування завдань з параметрами.
- Тригонометричні функції, їх властивості і графіки. Обернені тригонометричні функції.
- Показникова функція, її властивості і графік. Перетворення графіка функції.
- Логарифмічна функція, її властивості і графік. Перетворення графіка функції.

2.1.4 Початки аналізу

- Числові послідовності. Арифметична і геометрична прогресії.
- Формула n -го члена прогресії та суми її n перших членів. Характеристична властивість кожної прогресії.
- Формула суми членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $|q| < 1$.
- Означення похідної, її механічний і геометричний зміст.
- Похідна. Таблиця похідних. Похідна суми, добутку, частки. Похідна складеної функції.
- Рівняння дотичної до графіка функції. Умови паралельності та перпендикулярності дотичних до заданої прямої.
- Застосування похідної до дослідження функцій. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Екстремум функції. Необхідна умова екстремуму.
- Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Задачі на екстремум.
- Застосування похідної до побудови графіків функцій.
- Означення первісної. Таблиця первісних елементарних функцій. Правила знаходження первісних.
- Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.
- Площа криволінійної трапеції. Площа фігури обмеженої лініями.

2.1.5 Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики

- Перестановки (без повторень), кількість перестановок. Розміщення (без повторень), кількість розміщень. Комбінації (без повторень). Біном Ньютона. Розв'язування комбінаторних задач.
- Ймовірність випадкових подій. Найпростіші випадки підрахунку ймовірностей випадкових подій.

- Статистичні характеристики рядів даних. Побудова математичних моделей реальних об'єктів, процесів і явищ та дослідження цих моделей засобами математики.

2.2 ГЕОМЕТРІЯ

2.2.1 Планіметрія

- Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі, їх ознаки і властивості. Рівність і подібність геометричних фігур. Відношення площ подібних фігур.
- Приклади перетворення геометричних фігур: осьова та центральна симетрія, поворот, паралельний перенос, гомотетія.
- Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника. Внутрішні та зовнішні кути многокутника. Правильні многокутники.
- Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна кола. Залежність між відрізами у колі. Дотична до кола. Дуга кола. Сектор, сегмент.
- Центральні і вписані кути, їхні властивості.
- Довжина кола і довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.
- Довільний трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їхні властивості. Коло вписане в трикутник та описане навколо нього. Периметр і площа трикутника.
- Прямокутний трикутник. Теорема Піфагора. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.
- Рівносторонній трикутник.
- Довільний чотирикутник. Периметр та площа чотирикутника. Коло вписане в чотирикутник та описане навколо нього.
- Паралелограм та його властивості. Площа паралелограма. Прямокутник, ромб, квадрат.
- Трапеція та її властивості. Види трапецій. Площа трапеції. Опорні задачі для трапеції.

- Декартові координати на площині. Координати середини відрізка, довжина відрізка. Рівняння прямої. Рівняння кола.
- Вектори на площині. Операції над векторами. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Застосування векторів до розв'язування задач координатно-векторним методом.

2.2.2 Стереометрія

- Площина. Простір. Аксиоми стереометрії, їх наслідки.
- Паралельні і мимобіжні прямі. Ознака і властивості паралельних прямих.
- Паралельність прямої і площини. Паралельні площини. Ознаки і властивості паралельності.
- Паралельне проектування, його властивості. Зображення просторових фігур на площині.
- Перпендикулярність прямих. Перпендикулярність прямої і площини. Ознака і властивості перпендикулярності.
- Перпендикулярність прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри. Кут між мимобіжними прямими.
- Відстані в просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими, між двома фігурами.
- Ортогональне проектування, його застосування в технічному кресленні. Площа ортогональної проекції многокутника.
- Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин. Ознака і властивості перпендикулярності площин. Кут між площинами.
- Приклади перетворення геометричних фігур у просторі. Види симетрії. Подібність і гомотетія.
- Декартові координати в просторі. Відстань між точками. Координати середини відрізка.
- Вектори в просторі. Рівність, колінеарність та компланарність векторів. Операції над векторами. Кут між векторами. Скалярний добуток векторів.

- Многогранники. Вершини, ребра, грані многогранника. Види многогранників. Правильні многогранники. Побудова перерізів многогранників.
- Призма. Пряма і похила призма. Правильна призма. Площа поверхні і об'єм призми.
- Паралелепіпед. Види паралелепіпедів. Площа поверхні і об'єм паралелепіпеда.
- Піраміда. Правильна піраміда. Площа поверхні і об'єм піраміди.
- Тіла обертання: циліндр, конус. Твірна. Площа бічної та повної поверхні. Об'єм тіла обертання.
- Тіла обертання: сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина дотична до сфери. Переріз кулі. Площа поверхні сфери. Об'єм кулі.
- Комбінації тіл обертання. Комбінації многогранника і кулі: куля вписана в призму або піраміду і описана навколо них. Задачі підвищеної складності з використанням комбінації тіл.

3 ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

3.1 ТЕМА: Арифметичні обчислення. Тотожні перетворення. Прогресії

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Знати додатні та від'ємні числа; протилежні та взаємно-обернені числа; цілі числа; раціональні числа; їх порівняння та дії над ними. Вивчити поняття кореня n -го степеня і арифметичного кореня n -го степеня, властивості кореня n -го степеня. Пропорція та її основна властивість. Обчислення дробових виразів. Арифметична і геометрична прогресії формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій.

3.1.1 Самостійна робота

1. Знайти значення кореня:

а) $\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[4]{0,0001}$; в) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

2. Спростити вираз:

а) $\sqrt[3]{b^4\sqrt{b}}$; б) $\sqrt[6]{p^5\sqrt{p}}$; в) $\sqrt[4]{a^{33}\sqrt{a^7}}$.

3. Подайте у вигляді степеня або добутку степенів вираз:

а) $a^{-0,8}a^{1,3}$; б) $(a^{-0,4})^8$; в) $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}} \cdot \left(a^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}$; г) $a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{5}{12}}$;

д) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{6}{11}}$; є) $(a^3)^{-0,7} \cdot (a^{-0,4})^{-5} : (a^{-0,5})^8$.

4. Обчисліть:

а) $\left(\sqrt[3]{4^3\sqrt{2^3\sqrt{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}$; б) $\left(\sqrt[4]{25^3\sqrt{5^4\sqrt{125}}}\right)^{\frac{8}{3}}$.

5. Обчисліть:

а) $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}-3} - \sqrt{11}$; б) $\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{12}} - \frac{3}{\sqrt{10}+3} - \sqrt{15}$.

6. Спростіть вираз:

а) $\frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + \sqrt{27}\right)(\sqrt{a} - \sqrt{3})}{a - \sqrt{3a} + 3} - \sqrt{(a+3)^2 - 12a}; a > 3;$

б) $\frac{2xy^2}{3ab} \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}; a > 0, b > 0, x > 0;$

в) $\frac{(x^2 - y)(y + x\sqrt{y} + x^2)}{y\sqrt{y} - x^3};$ г) $\frac{3}{4m\sqrt{n}} \sqrt{\frac{16m^4n^3}{27x}}; n > 0, x > 0;$

д) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}.$

7. Знайти значення виразу $16^{-4n} \cdot 16^{6n}$ при $n = \frac{1}{4}$.

8. (a_n) - арифметична прогресія, $a_1 = 3$, $d = -2$. Знайти a_{11} .

9. (a_n) - арифметична прогресія, $a_1 = 5$, $a_2 = 7$. Знайти a_{21} .

10. Чому дорівнює сума нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 6$, $b_2 = -3$?

11. Знайти різницю арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 12, а восьмий член дорівнює -9.

12. Знайти номер арифметичної прогресії: 8; 8,4; 8,8; ... , який дорівнює 12,4.

13. Знайти перший член нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $\frac{1}{3}$, а сума дорівнює 72.

3.1.2 Тестові завдання

1. Обчисліть значення виразу $\sqrt{3^2 - 4\sqrt{(-9)^2}}$.

А	Б	В	Г	Д
0	$2\sqrt{3}$	6	12	4

2. Спростіть вираз $(1 + \sqrt{12})^2 - 4\sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
13	$13 - 8\sqrt{3}$	11	$11 - 8\sqrt{3}$	-4

3. Порівняйте $3\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[3]{53}$.

А	Б	В	Г
$3\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{53}$	$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{53}$	$3\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{53}$	порівняти неможливо

4. Знайдіть значення виразу $9^{4m} \cdot 9^{-2m}$ при $m = \frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
1	81	3	9	4

5. Обчисліть значення виразу $27^{\frac{1}{3}} + 25^{\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
19	14	13	8	14

6. Знайдіть значення виразу: $\frac{\sqrt{(a+5)^2 - 20a}}{a-5}$, якщо $a = 4,3$.

А	Б	В	Г	Д
-1	-4	1,2	1	4

7. Спростіть вираз: $\sqrt{16a^2} - \sqrt{(a-2)^2}$, $a < 0$.

А	Б	В	Г	Д

$3a+2$	$3a-2$	$-3a+2$	$-3a-2$	$5a-2$
--------	--------	---------	---------	--------

8. Знайдіть різницю $N - M$, якщо $N = \frac{2}{9} + \frac{5}{6}$, $M = \frac{7}{15} + \frac{3}{10}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{13}{45}$	$-\frac{1}{90}$	$-\frac{87}{90}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

9. Обчисліть: $(0,1)^{-2} \cdot (0,9)^0 \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-4} \right)^{-0,5} : (0,81)^{-0,5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4000}{81}$	40	$\frac{405}{2}$	4	$\frac{1}{25}$

10. Знайдіть значення x , якщо: $\frac{0,75 - \frac{1}{6}}{0,3 + \frac{8}{15}} = \frac{1,12}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
1,6	1,8	1	4	2

11. Із чисел -9; -8; -7; 3; 4; 5 вибрати два числа і перемножити їх. Найменший можливий результат дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
12	-72	-21	-36	-45

12. Якому проміжку належить число $\frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 0,1)	(0,1; 0,2)	(0,2; 0,3)	(0,3; 0,4)	(0,4; 0,5)

13. Знайти значення виразу: $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
0	$-\sqrt{12}$	$6\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{42}$

14. Якщо $\frac{2}{a} = b - \frac{1}{c}$, то $a =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2c}{bc-1}$	$\frac{bc-2}{c}$	$\frac{c}{1-bc}$	$\frac{c}{bc+2}$	$\frac{2b+c}{c}$

15. Знайти значення виразу: $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

А	Б	В	Г	Д
4	6	$-2\sqrt{3}$	-4	Інша відповідь

16. Розташуйте в порядку зростання числа $2^{30}; 3^{20}; 7^{10}$.

А	Б	В	Г	Д
$7^{10}; 2^{30}; 3^{20}$	$7^{10}; 3^{20}; 2^{30}$	$2^{30}; 3^{20}; 7^{10}$	$2^{30}; 7^{10}; 3^{20}$	$3^{20}; 2^{30}; 7^{10}$

17. Яка з послідовностей є арифметичною прогресією?

А	Б	В	Г	Д
1; 2; 3; 5	0; 1; 0; -1	-1; 0; 2; 3	-1; 0; 1; 2	-1; 2; 3; 5

18. Яка з послідовностей є геометричною прогресією?

А	Б	В	Г	Д
0; 1; 0; 1	1; 2; 4; 6	1; 2; 4; 8	-1; 2; 4; 8	-1; -2; 4; 8

19. Розташуйте числа в порядку зростання $2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}$; і 4.

А	Б	В	Г	Д
$4; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}; 4; 2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}; 2\sqrt{3}; 4$	$2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}; 4$	$4; 3\sqrt{2}; 2\sqrt{3}$

20. Значення виразу $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
-1	5	1	0	$\sqrt[3]{13}$

21. Звільнившись від ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

одержали:

А	Б	В	Г	Д
$-\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$	$3-2\sqrt{2}$	$6+4\sqrt{2}$	0

22. Скоротивши дріб $\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ одержали:

А	Б	В	Г	Д
$x^{\frac{1}{2}} + 1$	$x^{\frac{1}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}} - 1$	$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$	1

3.1.3 Відповіді

Самостійна робота

1. а) 4; б) 0,1; в) -2; г) 1,5. 2. а) $\sqrt[12]{b^3}$; б) $\sqrt[5]{p}$; в) $a^3\sqrt{a}$.

3. а) $a^{0,5}$; б) $a^{-3,2}$; в) $a^{\frac{1}{3}}$; г) $a^{\frac{1}{4}}$; д) $a^{\frac{2}{11}}b^{\frac{8}{55}}$; є) $a^{3,9}$.

4. а) $2^{\frac{4}{81}}$; б) $5^{\frac{31}{18}}$. 5. а) -3; б) $12-3\sqrt{10}+9$.

6. а) 0; б) $\sqrt{\frac{xya}{2}}$; в) $-x-\sqrt{y}$; г) $\frac{mn}{\sqrt{3x}}$; д) $\frac{2(a+b)}{\sqrt{ab}(a-b)}$.

7. 4. 8. -17. 9. 49. 10. 4. 11. -3. 12. 13. 13. 48.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
А	А	В	В	Г	А	Г	А	Б	А	Д	Г	А	А	А	А	Г	В

19	20	21	22
Г	В	В	Б

3.2 ТЕМА: Цілі раціональні рівняння і нерівності.

Дробово - раціональні рівняння і нерівності. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля. Системи рівнянь і нерівностей

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Розпізнавати класи рівнянь, нерівностей, їхніх систем, методи їх розв'язання; застосовувати загальні методи (розкладання на множники, заміна змінної, функціональні методи) до розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем; розв'язувати задачі, які зводяться до рівнянь.

3.2.1 Самостійна робота

1. Розв'язати лінійні рівняння:

а) $5x = -15$; б) $-7x = 2$; в) $-7x + 3,5 = -\frac{1}{3}x - 2$; г) $x - 3 = 5x + 8$;

д) $(x - 3) - 2(3x + 1) = 2$; е) $-3(2 + x) - (1 - 6x) = 7$.

2. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 3; \\ x - y = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y = -9; \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

3. Розв'язати рівняння, що містять модуль:

а) $|5x - 1| = 7$; б) $|2x + 1| = -5$; в) $|2|x| - 1| = 3$.

4. Розв'язати квадратні рівняння:

а) $x^2 + 6x = 0$; б) $4x^2 - 1 = 0$; в) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

г) $x^2 - x - 12 = 0$; д) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; е) $2x^2 - x - 1 = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^7 = 8$; б) $x^9 = -16$; в) $x^8 = 1$; г) $(x + 3)^3 = 27$.

6. Чому дорівнює сума та добуток коренів рівняння $x^2 + 9x - 2 = 0$?

7. При яких значеннях b рівняння $3x^2 + bx + 12 = 0$ не має коренів?

8. При якому значенні c рівняння $6x^2 - 4x + c = 0$ має один корінь?

9. Розв'язати біквдратні рівняння:

а) $3x^4 - 28x^2 + 9 = 0$; б) $(x^2 - 6x + 9)^2 + 2(x - 3)^2 = 3$.

10. Розв'язати рівняння методом групування:

а) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; б) $(x + 3)(x^2 + 5) = (x + 3)(7x - 1)$;

в) $x^4 - x^3 - 8x + 8 = 0$.

11. Розв'язати дробово-раціональні рівняння:

а) $(x^2 + 6)(x - 3) - x^3 = (1 - x)(3x + 7) + 5$; б) $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$;

в) $\frac{x + 3}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 3} = 2\frac{1}{2}$;

г) $\frac{x^2}{(2x + 3)^2} - \frac{7x}{2x + 3} + 6 = 0$;

д) $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 1) = 0$;

е) $\frac{x + 23}{x + 3} + \frac{2x - 14}{x - 4} = 10$;

ж) $\frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$;

з) $\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$.

12. Розв'язати нерівності:

а) $3x \leq -15$; б) $-7x > 4$; в) $-2x < x - 2$; г) $x - 3 \geq 5x + 8$;

д) $(x - 3) - (3x + 1) < 0$; е) $-\frac{1}{2}(2 + x) + 3(1 - 6x) > 8$.

13. Відомо, що $-9 < x < 6$. Оцінити значення виразу $\frac{1}{3}x + 2$.

14. Розв'язати нерівності з модулем:

а) $|x - 1| < 7$; б) $|2x + 1| > 5$.

15. Розв'язати систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x + 1 < 9, \\ -2x < 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x \leq 10, \\ \frac{x}{3} \leq -2. \end{cases}$

16. Розв'язати квадратні нерівності:

а) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$; б) $x^2 + 2x - 8 > 0$; в) $x^2 < x$; г) $4 - x^2 \leq 0$;

д) $x^2 + 10x + 25 > 0$; є) $x^2 + 3x + 10 > 0$.

17. Розв'язати нерівність методом інтервалів:

а) $x^2 - 9 \geq 0$; б) $x(4 - x)(x + 1) \geq 0$; в) $(x - 5)(2x + 1)^2 \leq 0$;

г) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$; д) $x^2 - 11x + 30 \leq 0$; є) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 5) \leq 0$;

ж) $x^3(3 - x)(x + 2) > 0$; з) $\frac{2x^3 - x^4 + 3x^2}{x^2 + x + 6} > 0$; і) $(x + 2)(x - 3) > 0$;

к) $(x^4 - 9x^2)(-x^2 - 3) \geq 0$; л) $-\frac{2x - 4}{x + 5} > 0$.

18. Знайти абсцису середини відрізка, кінцями якого є точки, координати

яких задовольняють умову
$$\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$$
.

19. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + a \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок (якщо таких значень декілька, то у

відповіді запишіть їх суму).

20. Обчисліть значення виразу $\frac{x_1 \cdot x_2}{(x_1 + x_2)^2}$, якщо x_1 та x_2 - корені

квадратного рівняння:

а) $x^2 - (\sqrt{3} + 1) \cdot x - (2 + \sqrt{3}) = 0$; б) $x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

21. Розв'язати рівняння $x^2 + \left(\frac{x}{2x - 1}\right)^2 = 2$.

22. Розв'язати рівняння $||5x - 1| - 2| - 3| = 4$.

23. Знайти найбільше значення параметра a , при якому система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ ||y| + x = a \end{cases} \text{ має два розв'язки.}$$

24. Розв'яжіть нерівність $|1 - x| > x - 2$.

25. Розв'яжіть нерівність $\frac{1-x}{(x+2)^2} \geq 0$.

26. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(x+5)(x-4)^2(x-3) \leq 0$.

27. Вкажіть найменше число, яке є розв'язком нерівності

$$(x-2)(x+4)^2(x^2-5x+12) \geq 0.$$

28. Знайдіть добуток всіх цілих розв'язків нерівності $\frac{x+2}{x^2(1-x)} \geq 0$.

29. Вкажіть найменший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0.$$

30. Вкажіть найменше число, яке є розв'язком нерівності $\frac{x^2+2x-3}{|x-2|} < 0$.

31. Розв'яжіть нерівність **а)** $\frac{2x-1}{x} < 1$; **б)** $\frac{4}{(x^2+2x+1)(x-1)} \geq 0$.

32. Розв'яжіть нерівність $(2x+3)^2 - (x+1)(x-10) < 43$. У відповіді запишіть кількість цілих розв'язків. Якщо цілих розв'язків нескінченість, то у відповіді запишіть число 100.

33. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 2)^2} < 0$. Вкажіть, скільки цілих розв'язків

має нерівність.

34. Вкажіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{-x^2 + 4x - 5}{x^2 - 9x + 14} \geq 0$.

35. Вкажіть сумарну довжину проміжків, які є розв'язками нерівності

$$\frac{|x - 2|}{x^2 - 2x - 3} < 0.$$

3.2.2 Тестові завдання

1. Розв'яжіть рівняння $-9x + 1,5 = -\frac{1}{4}x + 5$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	$-\frac{1}{4}$	-0,4	-0,6	Рівняння не має коренів

2. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
1,5; -2,5	$1\frac{2}{3}; -1$	$-1\frac{2}{3}; -1$	$1\frac{2}{3}; 1$	Рівняння не має коренів

3. Яка пара є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$?

А	Б	В	Г	Д
(4;2)	(2;4)	(5;1)	(4;-2)	(-4;-2)

4. Яке із чисел є розв'язком нерівності $x^2 + 2x - 3 \geq 0$?

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	-1	0	-2,5

5. Якщо $2 \leq a \leq 3$, то ...

А	Б	В	Г	Д
$-2 \leq -a \leq -3$	$-3 \leq -a \leq -2$	$-3 \leq a \leq -2$	$-2 \leq a \leq -3$	Інша відповідь

6. Розв'яжіть рівняння $|2x-1|=3$.

А	Б	В	Г	Д
2	-2; 1	-1; 2	-2	Рівняння не має коренів

7. Знайдіть суму коренів рівняння: $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
7	-7	2,(3)	-2,(3)	Рівняння не має коренів

8. Корінь рівняння $(1.8 - 6x) : 9 = -\frac{19}{15}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
-2.2	-1.1	1.1	2.2	4.4

9. Якщо $\frac{33+44}{44+55} = \frac{33}{44} + x$, то $x = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{33}{44}$	$\frac{33}{35}$	$\frac{44}{55}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

10. Обчислити суму коренів рівняння $2x^2 - 4x - 9 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-4	4	-2	2	Коренів немає

11. Вкажіть кількість коренів рівняння $|3x - 2| = 2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	∞	\emptyset

12. Вкажіть, скільки коренів має рівняння $x|x| - 5x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
4	3	2	1	∞

13. Вкажіть корінь рівняння $|x^2 - 6x + 8| = 1$, який належить проміжку $(-\infty; 2]$.

А	Б	В	Г	Д
$3 - \sqrt{2}$	$3 + 2\sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$1 - 2\sqrt{2}$

14. Числа $-4 + \sqrt{3}i$ і $-4 - \sqrt{3}i$ є коренями рівняння...

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + 8x + 13 = 0$	$x^2 - 8x + 13 = 0$	$x^2 - 8x - 13 = 0$	$x^2 + 8x - 13 = 0$	$x^2 - 16x = 9$

15. Вкажіть всі значення a , при яких рівняння $3x - |a|x = 5$ не має розв'язків

А	Б	В	Г	Д
± 3	3	-3	0	Таких не існує

16. Вкажіть всі значення a, b , при яких система рівнянь $\begin{cases} y = ax + 4 \\ y = bx - 3 \end{cases}$ не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$a = 1; b = 1$	$a = b$	$a \neq b$	Таких a, b не існує	$a \geq b$

17. Розв'язати рівняння $\frac{x-x}{x-3} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
\emptyset	R	$(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$	3

18. Вкажіть кількість коренів рівняння $|3-2x| = 2x-3$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	∞	\emptyset

19. Вкажіть, скільки коренів має рівняння $5x|x| + x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
4	3	2	1	∞

20. За яких значень m , рівняння $4x^2 + 2x - m = 0$ має тільки один корінь?

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	0,25	-0,25	Таких не існує

21. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(-1; 1)$

22. Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$(3x-2)(3x+2) - 3x(x-4) \leq 44 ?$$

А	Б	В	Г	Д
2	0	7	5	∞

23. Вкажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x - 14} < 0.$$

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	-3	6	7

24. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-2)^3}{2-x} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x < -2$	$x < 2$	$x > 2$	$x \neq 2$	Інша відповідь

25. Розв'яжіть нерівність $(x-1)^4 < (x-1)^3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(2; +\infty)$	$(1; 2)$	$(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$	$(-1; 1) \cup (1; +\infty)$

26. Розв'яжіть нерівність $|-x| < x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$x = 0$	\emptyset

27. Розв'язати нерівність $12 - x - x^2 \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$	$[-4; 3]$	$(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$	$[-3; 4]$

28. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 64}{x - 5} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-8; 5) \cup (8; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-5; 8)$	$[5; +\infty)$

29. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[5; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 5]$	$(-\infty; 1) \cup (1; 5]$	$(1; 5]$

30. Розв'яжіть нерівність $\frac{(2-x)(x+3)}{(x+1)^2} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3] \cup [2; +\infty)$	$[-3; -1) \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (-1; 2]$	$[-3; -1) \cup (-1; 2]$	$[-3; 2]$

31. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x+1)^3}{(x-3)} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (1; 3)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	$(-1; +\infty)$	$(3; +\infty)$

32. Розв'яжіть нерівність $(2x-1)^4 < (2x-1)^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

3.2.3 Відповіді

Самостійна робота

1. а) -3 ; б) $\frac{-2}{7}$; в) $\frac{33}{40}$; г) $\frac{-11}{4}$; д) $\frac{-7}{5}$; е) $\frac{14}{3}$. 2. а) $(-2;5)$ б) $(0;-3)$.

3. а) $\left\{\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right\}$; б) \emptyset ; в) $\{-2;2\}$.

4. а) $\{0;-6\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; в) $\{2;3\}$; г) $\{-3;4\}$; д) $\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$; е) $\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

5. а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[3]{-16}$; в) ± 1 ; г) 0 . 6. $x_1 + x_2 = -9$; $x_1 x_2 = -2$. 7. ± 12 . 8. $\frac{2}{3}$.

9. а) $\left\{\pm 3;\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; б) $\{2;4\}$. 10. а) $\{-3;2;3\}$; б) $\{-3;1;6\}$; в) $\{1;2\}$.

11. а) $\{3\}$; б) $\{3\}$; в) $\{-8;7\}$; г) $\left\{-3;-\frac{7}{11}\right\}$; д) $\{-3;1\}$; е) $\{1;2\}$; ж) $\{-6\}$;

з) $\{2\}$.

12. а) $(-\infty;5]$; б) $\left(-\infty;-\frac{4}{7}\right)$; в) $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; г) $\left(-\infty;-\frac{11}{4}\right]$; д) $(-2;+\infty)$;

е) $\left(-\infty;-\frac{12}{37}\right)$. 13. $(-1;4)$. 14. а) $(-6;8)$; б) $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.

15. а) $(-3;8)$; б) $[-10;-6]$.

16. а) $(-\infty;-7]\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$; в) $(0;1)$;

г) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; д) $x \neq -5$; е) \square .

17. а) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; б) $(-\infty;-1]\cup[0;4]$; в) $(-\infty;5]$; г) $[-2;2)\cup(2;3]$;

д) $[5;6]$; е) $[-5;1]\cup\{5\}$; ж) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$; з) $(-1;0)\cup(0;3)$;

і) $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; к) $[-3;3]$; л) $(-5;2)$.

18. 0 . 19. $a = 2$. 20. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{6}$. 21. $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2};1\right\}$. 22. $\{-1,6;2\}$.

23. $a = 2$. 24. \square . 25. $(-\infty; -2) \cup (-2; 1]$. 26. 4. 27. -4. 28. 2. 29. -8.
 30. -2. 31. а) $(0; 1)$; б) $(1; +\infty)$. 32. 8. 33. 2. 34. 6. 35. 4.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	Б	А	А	Б	В	В	Г	Д	Г	Г	Б	А	А	А	Б	Г	Г	Г	Г

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Б	А	Б	Г	В	Д	В	В	Г	Г	В	В

3.3 ТЕМА: Ірраціональні рівняння та нерівності. Системи рівнянь і нерівностей

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчити поняття кореня n -го степеня і арифметичного кореня n -го степеня, властивості кореня n -го степеня; степінь з довільним дійсним показником. Методи розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

3.3.1 Самостійна робота

1. При якому значенні x виконується рівність $5^x = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}$?

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}$; б) $\sqrt[3]{x} + 6 = 0$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{x} - 2 = 0$; г) $\sqrt[5]{4x+2} = 0$;

д) $\sqrt[5]{4x+2} = 3$;

є) $\sqrt[3]{2x-3} = -3$; ж) $\sqrt{2x-3} = -3$.

3. Розв'яжіть рівняння $x - 2 - \sqrt{2x^2 - 9x - 2} = 0$. Якщо рівняння має декілька коренів, то у відповіді вкажіть їх суму.

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} = 2$.

5. Розв'яжіть рівняння $(x-5)(x+2)\sqrt{x-3} = 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x-5} < 2$; б) $\sqrt{4x+21} < x+4$; в) $\sqrt{x+26} \geq x-4$; г) $x - \sqrt{1-|x|} < 0$

7. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$

8. Розв'яжіть нерівність $(x+5)\sqrt{x^2-2x-3} \leq 0$. У відповіді запишіть найбільший цілий розв'язок.

9. Знайдіть суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} ||x|-3| \leq 2 \\ x + \sqrt{x} + 1 \geq 0 \end{cases}$.

10. Розв'язати нерівність

а) $\sqrt{-x^2+6x-5} < 8-2x$; б) $\sqrt{x^2-4x+3} \geq x+1$.

11. Знайти кількість цілих розв'язок нерівності $(x^2-10)\sqrt{x-2} \leq 0$.

3.3.2 Тестові завдання

1. Знайдіть корінь рівняння $\sqrt{x-1} = 5$.

А	Б	В	Г	Д
6	1	26	3	27

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{5-x}\sqrt{3-x}\sqrt{x+4} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-4;3;5	-4;-3;5	-4;3	3;5	-4;5

3. Визначте кількість коренів рівняння $(x^2-9)(x-5)\sqrt{2-x} = 0$

А	Б	В	Г	Д
4	3	2	1	0

4. Вкажіть корінь рівняння $\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{2x+5} = \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x+2}$.

А	Б	В	Г	Д
-3	1	-1	3	-2

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 1} + (x + 1)^2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-1	-1;1	1	0	∅

6. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x - 2} = x$.

А	Б	В	Г	Д
-2;1	-2;-1	-1;2	1;2	Інша відповідь

7. Вкажіть проміжок, якому належать корені рівняння $\sqrt{x - 5} = 7 - x$.

А	Б	В	Г	Д
[0;5,3]	[5,5;6,3]	[7;10]	[11;12,5]	Інша відповідь

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$. Знайдіть суму $x + y$ для

отриманого розв'язку системи.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

9. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x} > x\sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$x < 1$	$x > 1$	$0 < x < 1$	$x \geq 0$	$0 \leq x < 1$

10. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{-x} < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 4)$	$[0; 4)$	$(-4; 0]$	$[-2; 0)$	Інша відповідь

11. Розв'яжіть нерівність $\sqrt[4]{x^2} < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 2)$	$(-4; 4)$	$(-2; 2)$	$(0; 4)$

12. Рівняння $x + 2 = \sqrt{x + 4}$ має:

А	Б	В	Г	Д
Два корені з різними знаками	Два корені з однаковими знаками	Один корінь, рівний нулю	Один додатний корінь	Один від'ємний корінь

13. Найменшим цілим розв'язком нерівності $\sqrt{x-5} \geq 3$ є число:

А	Б	В	Г	Д
Більше від 6	Менше від 5	Менше від 10	Більше від 14	Розв'язку немає

14. Областю допустимих значень змінної рівняння

$$\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{2x - 1} \text{ є:}$$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$	$(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$	$[6; +\infty)$	$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	\emptyset

15. Множина розв'язків нерівності $(x-3) \cdot \sqrt{x+1} \geq 0$ має вигляд:

А	Б	В	Г	Д
$[3; +\infty)$	$[3; +\infty) \cup \{-1\}$	$[-1; +\infty)$	$[-1; 3]$	\emptyset

3.3.3 Відповіді

Самостійна робота

1. $\frac{5}{6}$. 2. а) $\frac{8}{9}$; б) -216; в) 1296; г) $-\frac{1}{2}$; д) 60,25; є) -12; ж) \emptyset .

3. 6. 4. \emptyset . 5. {3;5}.

6. а) [5;9); б) $(-5,25;-5) \cup (1;+\infty)$; в) [4;9]; г) $\left[-1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

7. 2. 8. 3. 9. 15. 10. а) [1;3); б) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. 11. 2.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	В	Б	Б	А	Г	Б	А	В	В	В	В	А	В	Б

3.4 ТЕМА: Показникові та логарифмічні перетворення. Показникові рівняння та нерівності. Логарифмічні рівняння та нерівності. Системи рівнянь і нерівностей

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчити властивості показникової та логарифмічної функцій; методи розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей.

3.4.1 Самостійна робота

1. Обчислити значення виразу:

а) $\log_6 3 + \log_6 12$; б) $\log_3 36 - \log_3 4$; в) $\log_6 9 + \log_6 4$; г) $\log_{0,4} \left(2 + \sin \frac{\pi}{6} \right)$;

д) $0,16^{\log_{0,4} 4}$; е) $27^{\log_3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)}$; ж) $\frac{\log_3 8}{\log_3 2}$; з) $\log_3 8 \cdot \log_2 3$; и) $\lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$.

2. Яка з наведених рівностей є правильною?

а) $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$; б) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1}{2}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -2$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{1}{2}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $0,5^x = 0,25$; б) $3^{2x-x^2} = 11^{2x-x^2}$; в) $\left(\frac{5}{7} \right)^x = \frac{7}{5}$; г) $\left(\frac{1}{2} \right)^x \cdot \left(\frac{16}{27} \right)^x = \left(\frac{3}{2} \right)^3$.

4. Розв'язати нерівності:

а) $3^{2x+4} > 9$; б) $\left(\frac{4}{7} \right)^x \geq \frac{4}{7}$; в) $0,2^{x+3} \geq 5$; г) $\left(\frac{\pi}{3} \right)^x < \left(\frac{\pi}{3} \right)^3$; д) $\left(\frac{1}{2} \right)^x \leq \frac{1}{8}$;

е) $(\sin 2)^{5-x} \geq \sin^2 2$.

5. Розв'язати рівняння:

а) $\log_5 x = -2$; б) $\log_2(x^2 + 3x) = 2$; в) $\log_2 \log_2 \log_3 x = 0$; г) $2 \cdot 7^{\log_7 x} = x^2 - 3$.

6. Розв'язати нерівності:

а) $\log_7 x < \log_7 10$; **б)** $\log_{\frac{1}{6}}(1-x) < \log_{\frac{1}{6}} 2$; **в)** $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 7$;

г) $\log_5(x+1) > 1$; **д)** $\log_2(x-3) < 3$.

7. Розв'яжіть рівняння: $\lg \log_3 \log_{0,5} x = 0$.

8. Розв'яжіть нерівність і у відповіді запишіть найменший цілий розв'язок

$$4^{\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 2^{\sqrt{x}}.$$

9. Розв'яжіть нерівність і у відповіді запишіть найбільший цілий розв'язок

$$\log_{0,2}(x^2 - 2x - 3) \geq -1.$$

10. Розв'яжіть нерівність і у відповіді запишіть найбільший цілий

від'ємний розв'язок $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

11. Знайдіть суму коренів рівняння $\log_3(x^2 - 3x)^2 - \log_3(1 - 2x)^2 = \log_3 4$.

12. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^{2y-x} = 32 \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -2 \end{cases}$. У відповіді запишіть

добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком вказаної системи рівнянь.

13. Знайдіть суму $x+y$, якщо пара (x,y) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2^{2x+1} + 2^y = 40 \\ 2^{x+1} + 2^{y-1} = 12 \end{cases}$$

3.4.2 Тестові завдання

1. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{2} \cdot 2^{\log_2 10}$.

А	Б	В	Г	Д
20	10	5	$\log_2 10$	0

2. Обчисліть значення виразу $\lg 25 + \lg 4$.

А	Б	В	Г	Д
100	$\lg 29$	2	10	4

3. Розв'яжіть рівняння $3^x = \frac{1}{9}$.

А	Б	В	Г	Д
-3	3	-2	2	1

4. Розв'яжіть рівняння $\log_6 x = -2$.

А	Б	В	Г	Д
12	-2	$\frac{1}{36}$	36	$-\frac{1}{3}$

5. Розв'яжіть нерівність $0,2^{x-2} \geq 0,008$.

А	Б	В	Г	Д
$[5; +\infty)$	$(-\infty; 5]$	$(-\infty; 6]$	$[-6; 0)$	$[6; +\infty)$

6. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{2}{9}} x > \log_{\frac{2}{9}} 6$.

А	Б	В	Г	Д
$(6; +\infty)$	$(-\infty; 6)$	$(0; 6)$	$[-6; 0)$	$(0; 6) \cup (6; +\infty)$

7. Обчисліть $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-2

8. Розташуйте числа в порядку зростання: $a = \log_{\sqrt{3}} 2, b = \sqrt{3} - 2, c = (\sqrt{3})^2$

А	Б	В	Г	Д
$c < a < b$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < a < c$	$b < c < a$

9. Обчислити $125^{\log_5^2 3}$, якщо $3^{\log_5 3} = a$.

А	Б	В	Г	Д
a^5	a^3	a^2	a	Інша відповідь

10. Обчисліть $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2 \log_{25} 2}$.

А	Б	В	Г	Д
5	3	16	9	Інша відповідь

11. Обчисліть $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 7$

А	Б	В	Г	Д
ab	1	2	3	4

12. Якщо $\log_c a = x, \log_c b = y$, то $\frac{x+y}{2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\log_c ab$	2	$\log_c \sqrt{ab}$	$a+b$

13. Розв'яжіть рівняння: $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	3	0,25	-0,25	-0,5

14. Вкажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $0,4^{2x-1} = 0,064$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)$	$[-2; -1)$	$(-1; 0)$	$[0; 1)$	$(1; 2]$

15. Розв'яжіть рівняння: $0,125^x = 2 \cdot 4^x$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	-1	-2	$-\frac{1}{3}$

16. Розв'яжіть рівняння: $\frac{1-2^{2x}}{2^x-1} = -2$

А	Б	В	Г	Д
0	1	-1	\emptyset	2

17. Розв'яжіть рівняння: $\frac{2}{x} + 2^{-x} = \sqrt{\frac{25}{4^x}}$

А	Б	В	Г	Д
1	-1	1; 2	0	\emptyset

18. Відомо, що $0,7^m > 0,7^n$. Порівняйте m і n .

А	Б	В	Г	Д
$m < n$	$m > n$	$m = n$	$m \geq n$	порівняти неможливо

19. Відомо, що $\log_{0,8} m > \log_{0,8} n$. Порівняйте m і n .

А	Б	В	Г	Д
$m > n$	$m = n$	$m < n$	порівняти неможливо	$m \geq n$

3.4.3 Відповіді

Самостійна робота

1. а) 2; б) 2; в) 2; г) -1; д) 16; є) 8; ж) 3; з) 3; і) 0.

2. а) так; б) ні; в) ні; г) ні. 3. а) 2; б) $\{0;2\}$; в) -1; г) -1.

4. а) $x > -1$; б) $x \leq 1$; в) $x \leq -4$; г) $x < 3$; д) $x \geq 3$; є) $x \geq 3$.

5. а) $\frac{1}{25}$; б) $\{-4;1\}$; в) 9; г) 3.

6. а) $(0;10)$; б) $(-\infty;-1)$; в) $(7;+\infty)$; г) $(4;+\infty)$; д) $(3;11)$.

7. $\frac{1}{8}$. 8. 2. 9. 4. 10. -3. 11. 6. 12. -3. 13. 7.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	В	В	В	Б	В	А	Г	Б	В	Д	Г	Д	Д	А	Г	В	А	В	

3.5 ТЕМА: Основні тригонометричні формули. Тригонометричні рівняння і нерівності. Системи рівнянь і нерівностей

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчити тригонометричні функції числового аргументу; основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу; формули зведення; тригонометричні формули додавання та наслідки з них; обернені тригонометричні функції.

3.5.1 Самостійна робота

1. Знайти радіанну міру кутів: 45° ; 105° ; 330° .

2. Знайти градусну міру кутів, радіанна міра яких дорівнює: $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{3}$; $1\frac{3}{4}\pi$; 5π .

3. Знайти значення виразу $\sqrt{(2\cos 30^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\sin 60^\circ)^2}$.

4. Який знак має:

а) $\cos 170^\circ$; б) $\operatorname{ctg}(-220^\circ)$; в) $\sin \frac{13\pi}{8}$.

5. Визначити знак виразу: $\sin 2 \cos 3,5$.

6. Порівняти:

а) $\operatorname{ctg} 220^\circ$ і $\operatorname{tg} 320^\circ$; б) $\cos 3$ і $\sin 1$.

7. Знайти значення виразу:

а) $4\sin(-60^\circ) - 3\operatorname{ctg}(-60^\circ) + 5\cos(-30^\circ)$;

б) $2\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos \pi - 2\sin \frac{\pi}{4}$.

8. Знайти значення виразу:

а) $\cos 420^\circ$; б) $\operatorname{ctg}(-780^\circ)$; в) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{4}$.

9. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:

а) $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{2}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

10. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

11. Визначити знак виразу $\sin 124^\circ \cos 203^\circ \operatorname{tg}(-280^\circ)$.

12. Спростіть вираз:

а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$;

б) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$;

г) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

13. Спростіть вираз:

а) $\sin \alpha \cos 3\alpha + \cos \alpha \sin 3\alpha$;

б) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ}{1 - \operatorname{tg} 14^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha}$.

14. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\cos(5x - 8) = -1$; д) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$; е) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) + 1 = 0$.

15. Знайдіть значення виразу:

а) $\arcsin(-1) + \arccos 1 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;

б) $4 \arcsin 1 + 3 \arccos 0 - 2 \arccos(-1) + 3 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

16. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin^2 3x - 3 \sin 3x + 2 = 0$; б) $1 - \cos 6x = \sin 3x$;

в) $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$; г) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

17. Розв'яжіть нерівність $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) \geq \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$.

18. Розв'яжіть рівняння $2\cos\frac{1}{3}x = \sqrt{3}$.

19. Обчисліть значення виразу $2\cos 240^\circ + 3\operatorname{tg} 135^\circ$.

20. Розв'яжіть рівняння $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

3.5.2 Тестові завдання

1. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 160^\circ < 0$	$\cos 250^\circ > 0$	$\operatorname{tg} 140^\circ > 0$	$\operatorname{ctg} 200^\circ > 0$	$\cos 250^\circ = 0$

2. Обчисліть значення виразу $2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
-4	2	-1	0	-5

3. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	1

4. Обчисліть значення виразу $\cos 39^\circ \cos 21^\circ - \sin 39^\circ \sin 21^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

5. Розв'яжіть рівняння $tg4x = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3} + \pi k,$	$\frac{\pi}{12} + \pi k,$	$\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4},$	$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4},$	$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4},$
$k \in Z$	$k \in Z$	$k \in Z$	$k \in Z$	$k \in \square$

6. Обчисліть $\cos(210^\circ)$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	Інша відповідь

7. Обчисліть $\sin \frac{5}{2}\pi + \cos 5\pi$

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

8. Спростити вираз $\frac{tg24^\circ + tg21^\circ}{1 - tg21^\circ \cdot tg24^\circ}$

А	Б	В	Г	Д
1	$tg3^\circ$	-1	$-ctg3^\circ$	$-tg3^\circ$

9. Обчисліть $\left(4\sqrt{3} + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(7 - 3tg \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{3}$

А	Б	В	Г	Д
24	12	27	21	-27

10. Знайти значення виразу $\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2\cos(\pi - \alpha)}$, якщо $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	Інша відповідь

11. Обчисліть $2 - tg(-135^\circ)ctg(-135^\circ)$

А	Б	В	Г	Д
0	-1	3	2	1

12. Обчисліть $3ctg\alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

А	Б	В	Г	Д
4	$\frac{4}{5}$	3	-4	$-\frac{4}{5}$

13. Знайти значення виразу $\frac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha + 4\sin\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{13}$	$\frac{11}{13}$	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{13}$

14. Знайти значення виразу $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$

А	Б	В	Г	Д
0	$2 + \sqrt{3}$	3	$2 - \sqrt{3}$	Інша відповідь

15. Обчислити $\sin\frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7\pi}{9}$	$-\frac{7\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{9}$	Інша відповідь

16. Обчислити $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8\pi}{9}$

17. Обчислити $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{\sqrt{2}}{5}$	Інша відповідь

18. Обчислити $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\sqrt{15}$	$\frac{\sqrt{17}}{2}$	$\sqrt{15}$	$-\sqrt{17}$	Інша відповідь

19. Обчислити $\operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos(-1) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	π

20. Спростіть вираз $\sin 3,5\alpha \cos 1,5\alpha - \sin 1,5\alpha \cos 3,5\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$.

А	Б	В	Г	Д
0	$2\sin^2 \alpha$	$\sin 5\alpha + \cos^2 \alpha$	$\sin 5\alpha - \cos^2 \alpha$	$2\cos 2\alpha$

3.5.3 Відповіді

Самостійна робота

1. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{6}$. 2. $22,5^\circ$; 60° ; 315° ; 900° . 3. 2.

4. а) «-»; б) «-»; в) «-». 5. «-». 6. а) «>»; б) «<».

7. а) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$; б) $-7-\sqrt{2}$. 8. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) -1.

9. а) $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10. $\frac{7}{8}$. 11. «+». 12. а) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$; б) 0; в) $\sin^3 \alpha$; г) 1.

13. а) $\sin 4\alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$; в) $\sqrt{3}$; г) 1.

14. а) $x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $x = \pm \pi + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

в) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$;

г) $x = \frac{8 + \pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$;

д) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

е) $x = \left[\begin{array}{l} 3\pi - 6\pi n, n \in \mathbf{Z} \\ -\frac{3\pi}{2} - 6\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$

15. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{15\pi}{4}$.

16. а) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) $x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z} \\ (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$;

$$\text{в) } x = \left[\begin{array}{l} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \\ \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right]; \quad \text{г) } x = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \\ -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right].$$

$$17. x \in \left[-5 - 4\pi n; -\frac{7\pi}{3} - 4\pi n \right], n \in \mathbf{Z}. \quad 18. x = \pm \frac{\pi}{2} + 6\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$19. -4.$$

$$20. x = \left[\begin{array}{l} (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \\ (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right].$$

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Г	А	Б	Д	Г	А	В	А	В	Б	Д	Г	Б	В	Г	А	В	А	Г	А

3.6 ТЕМА: Елементарні функції та їх властивості. Побудова графіків методом геометричних перетворень

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Знаходити область визначення та область значення функції, користуватися різними способами завдання функцій, встановлювати за графіком функції її найважливіші властивості; розпізнавати і будувати графіки показникових, логарифмічних та тригонометричних функцій і на них ілюструвати властивості функцій; застосовувати показникові, логарифмічні та тригонометричні функції до опису найпростіших реальних процесів.

3.6.1. Самостійна робота

1. Знайдіть область визначення функції : а) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

б) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $f(x) = \sqrt{\frac{(x-7)(x+10)}{x-2}}$.

2. Задайте функцію, обернену до функції :

а) $y = x - 3$; б) $y = \frac{1}{6}x + 2$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt{x+1}$;

д) $y = x^2$, де $x \in (-\infty; 0]$.

3. Скільки коренів має рівняння (розв'язати графічно):

а) $x^3 + x = 2$; б) $\sin x = 1$, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\sin x = 1$?

4. Дослідити на парність функцію:

а) $f(x) = 4x^7 - 2x^3$; б) $f(x) = x^2(2x - x^3)$; в) $f(x) = x^2 + 4\cos x$;

г) $f(x) = x^3 + \cos x$; д) $f(x) = \frac{3|x|}{x^2 + 2}$; е) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 - \sin x}$;

ж) $f(x) = \frac{(1 - \lg x)(x + 1)}{x + 1}$.

5. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = 2 \sin x$; г) $y = \sin(-x)$.

6. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos \frac{x}{2}$; в) $y = \frac{1}{2} \cos x$; г) $y = |\cos x|$.

7. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; в) $y = \operatorname{tg} x + 2$; г) $y = \operatorname{tg}(-x)$.

8. Якого найбільшого значення може набувати функція $f(x) = 5^{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$?

9. Яка область визначення функції:

а) $f(x) = \sqrt[4]{\lg x}$; б) $f(x) = \log_{-x} 2$ в) $f(x) = \lg \frac{1 - 2x}{x + 1}$;

г) $f(x) = \log_7(5 - x)$; д) $f(x) = \frac{1}{2 - \log_2 x}$.

10. Побудувати графік функції: а) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3} + 3$;

б) $y = \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x + 1}$.

11. Знайдіть найбільше значення функції: а) $y = -x^2 + 4x - 3$;

б) $y = 2x + 3 - x^2$.

12. Знайдіть найменший додатний період функції: **а)** $y = \cos \frac{2x}{5}$;

б) $y = \sin \frac{3x}{2}$; **в)** $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; **г)** $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$; **д)** $y = 1 - \sin \frac{x}{3} + 3 \cos \frac{3x}{2}$.

13. Знайти множину значень функції: **а)** $y = 5 + 3 \sin 2x$;

б) $y = 3 - 5 \cos 4x$; **в)** $y = \frac{7}{5 + 2 \cos x}$; **г)** $y = \frac{3}{4 - 2 \sin 2x}$.

3.6.2 Тестові завдання

1. Яка область визначення функції $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$?

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1]$	$[0; 1]$	$[-1; 1]$

2. Знайдіть нулі функції $y = x - \frac{4}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
4	2	-2	-4; 4	-2; 2

3. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2 - 1$	$y = x - 1$	$y = -\frac{1}{x}$	$y = \frac{2}{x}$	$y = \sqrt{x} - 1$

4. Яка функція є оберненою до функції $y = x + 4$?

А	Б	В	Г	Д
$y = -x + 4$	$y = \frac{1}{x + 4}$	$y = x - 4$	$y = x + 4$	$y = -x - 4$

5. Яка з даних функцій є ні парною, ні непарною?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$	$f(x) = x^2 + \cos x$	$f(x) = x^2 + \sin x$	$f(x) = x \sin x$	$f(x) = \sin x$

6. Як треба перенести графік функції $y = \cos x$, щоб отримати графік функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$?

А	Б	В	Г	Д
на $\frac{\pi}{4}$ одиниць вправо	на $\frac{\pi}{4}$ одиниць вліво	на $\frac{\pi}{4}$ одиниць вгору	на $\frac{\pi}{4}$ одиниць вниз	на $\frac{\pi}{4}$ одиниць вліво і вниз

7. Знайдіть область значень функції $y = 2 \cos x + 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[2; 4]$	$[1; 5]$	$[-5; 5]$	$[-1; 5]$

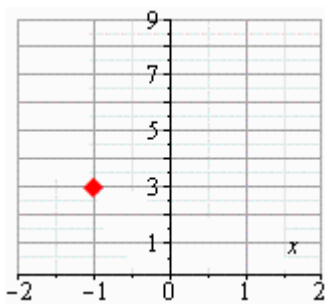
8. Яка множина значень функції $y = 3^x + 4$?

А	Б	В	Г	Д
$(4; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(7; +\infty)$	$(-4; +\infty)$

9. Вкажіть область визначення функції $f(x) = \log_9(7 - x)$?

А	Б	В	Г	Д
$(7; +\infty)$	$(-\infty; 7)$	$[7; +\infty)$	$(-\infty; 7]$	$(0; 7]$

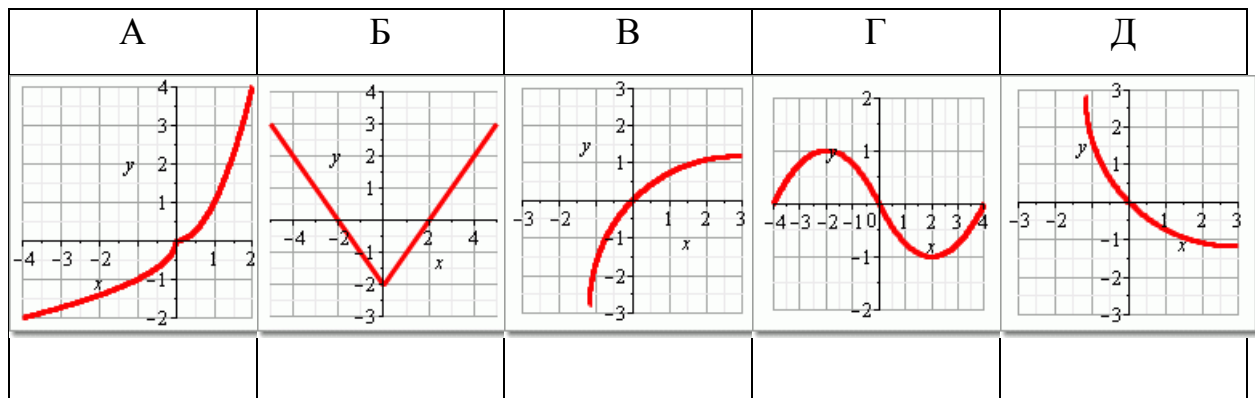
10. На малюнку зображена точка, через яку проходить графік функції



$y = f(x)$. Вкажіть функцію $y = f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = -x$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = 3^{-x}$	$f(x) = \log_3 x$	$f(x) = x^3$

11. Вкажіть графік непарної функції.



12. Задані функції : а) $y = x - 2$; б) $y = \sqrt{(x-2)^2}$; в) $y = (\sqrt{x-2})^2$.

Вкажіть вірне твердження.

А	Б	В	Г	Д
Графіки усіх функцій співпадають	Співпадають тільки графіки першої і другої функцій	Співпадають тільки графіки першої і третьої функцій	Співпадають тільки графіки другої і третьої функцій	Графіки усіх функцій різні

13. Областю визначення якої з наведених функцій є проміжок $(9; +\infty)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x+9}$	$y = \frac{9}{\sqrt{x+9}}$	$y = \sqrt{9-x}$	$y = \sqrt{x-9}$	$y = \frac{9}{\sqrt{x-9}}$

14. Укажіть графік функції $y = -x - 1$.

А	Б	В	Г	Д

15. Яка з наведених функцій не є зростаючою?

А	Б	В	Г	Д
$y = e^x$	$y = \text{ctgx}$	$y = \pi^x$	$y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$	$y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$

3.6.3 Відповіді

Самостійна робота

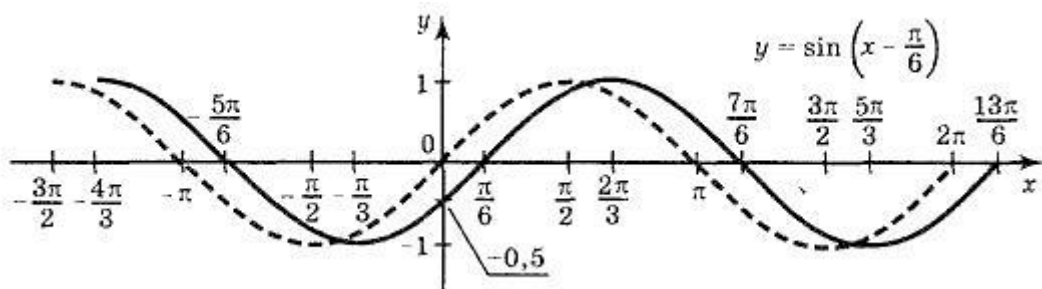
1. а) $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; б) $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $x \in [-10; 2) \cup [7; +\infty)$.

2. а) $y = x + 3$; б) $y = 6x - 12$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = x^2 - 1$, де $x \in [0; +\infty)$;

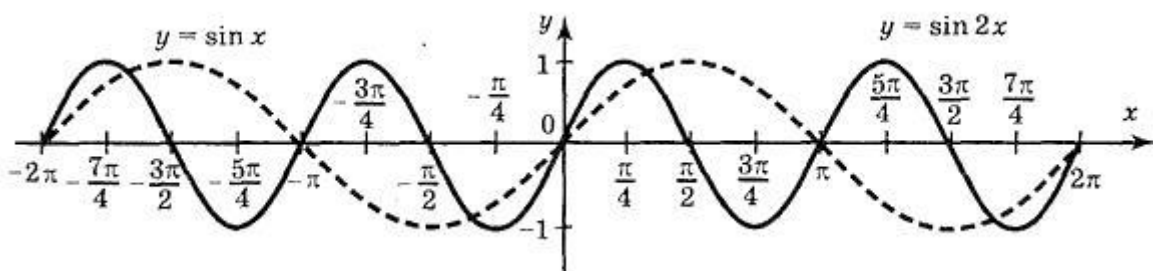
д) $y = -\sqrt{x}$. 3. а) один; б) один; в) безліч.

4. а) непарна; б) непарна; в) парна; г) ні парна ні непарна; д) парна; е) ні парна ні непарна; ж) ні парна ні непарна.

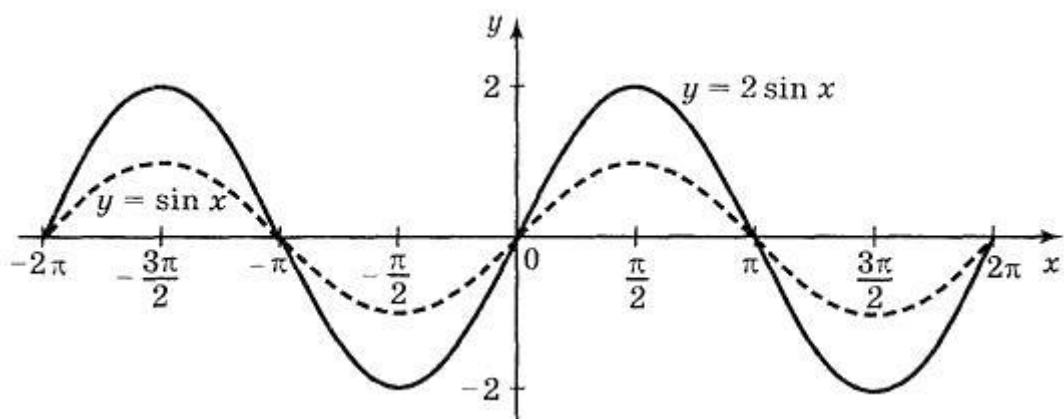
5. а)



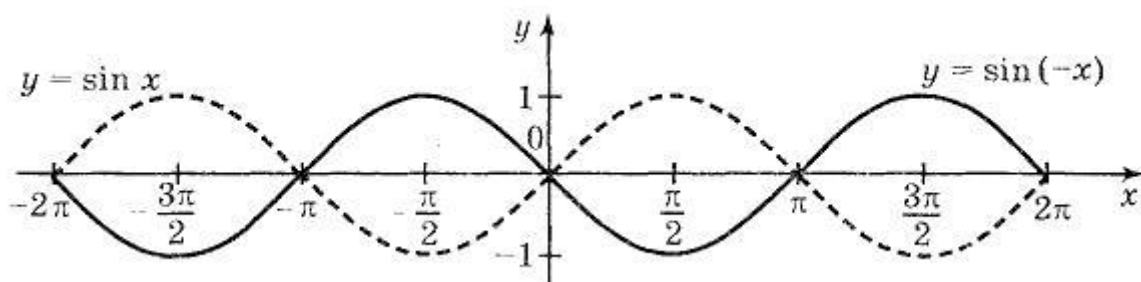
5. б)



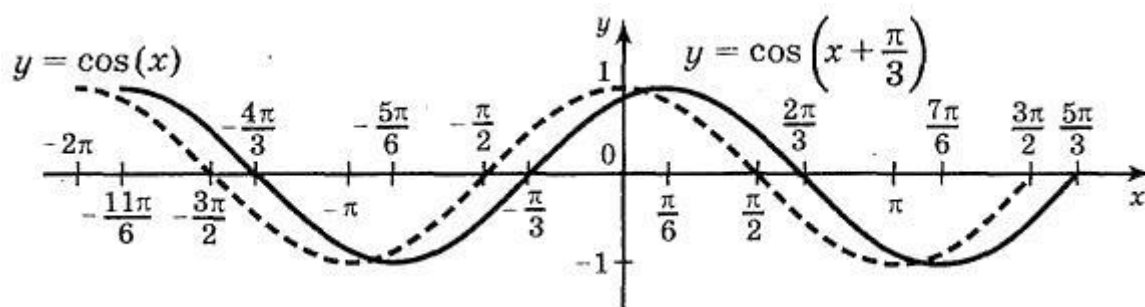
5. в)



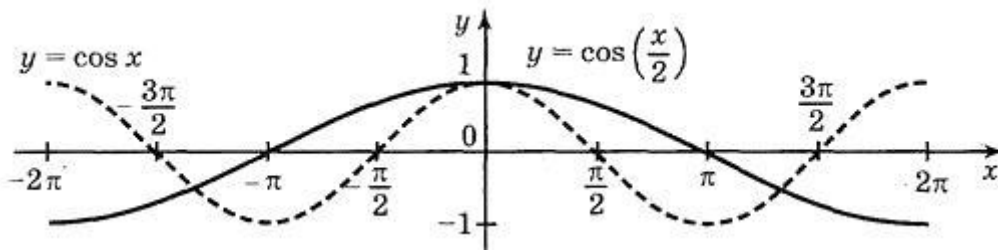
5. г)



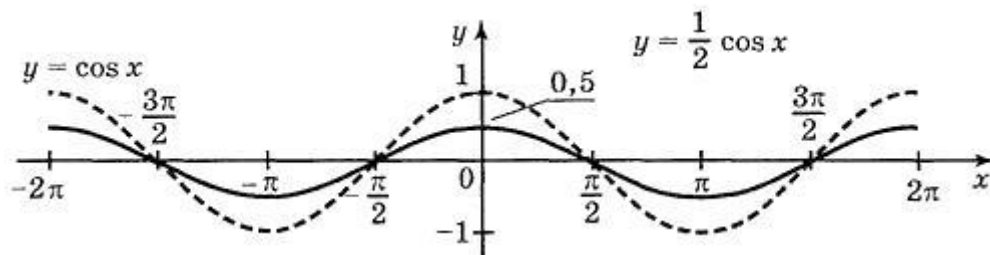
6. а)



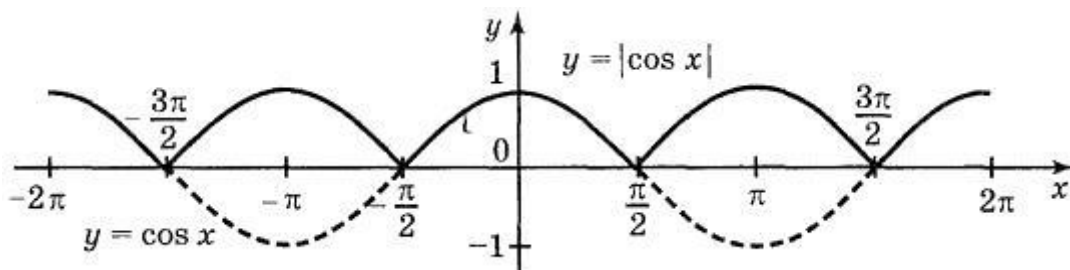
6. б)



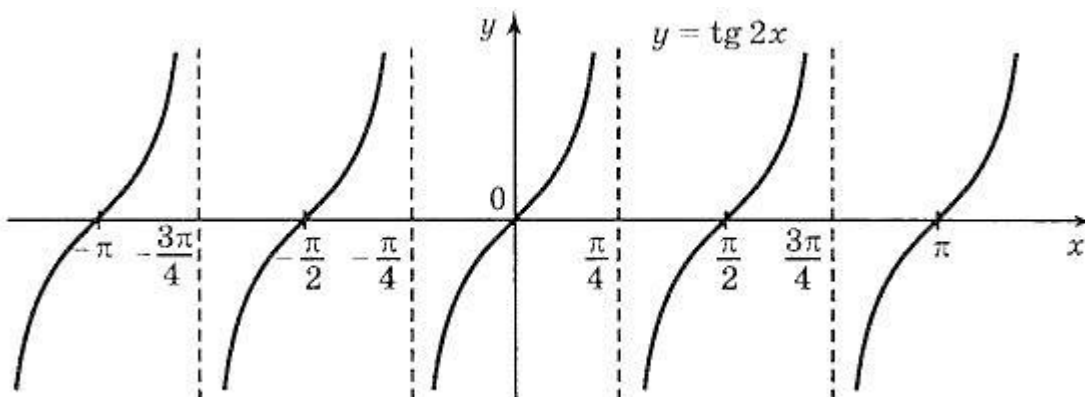
6. в)



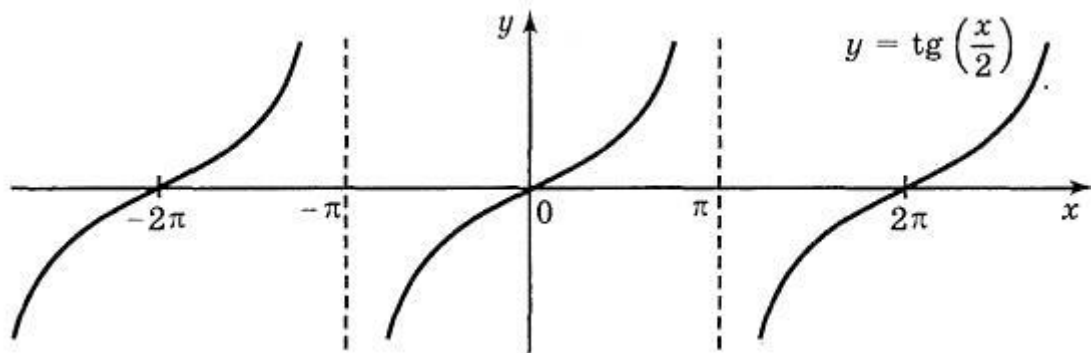
6. г)



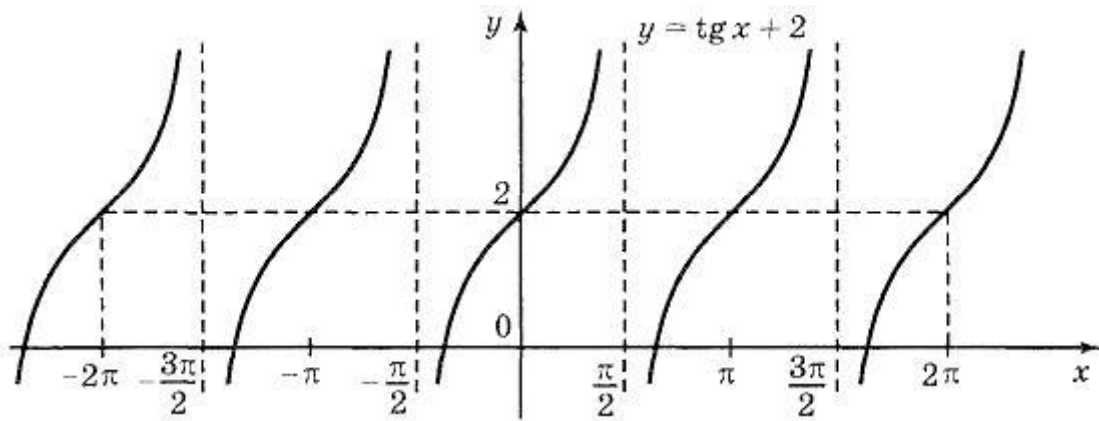
7. а)



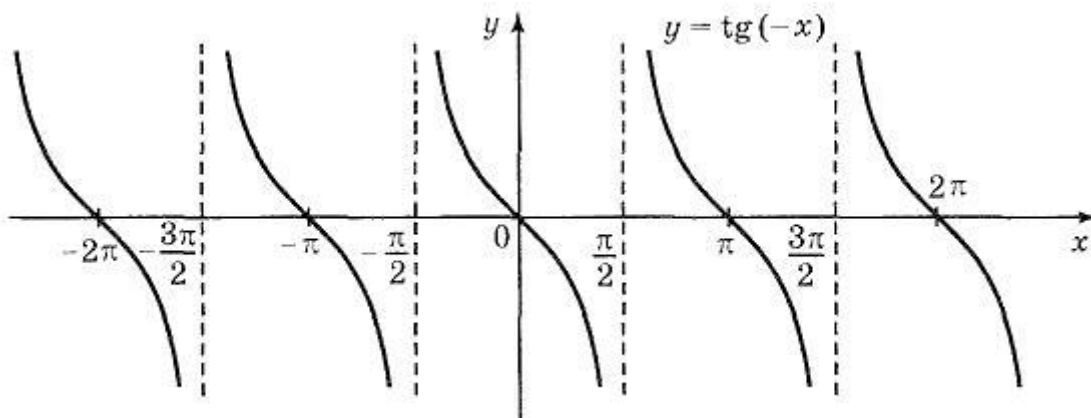
7. б)



7. в)



7. г)



8. 125.

9. а) $x \in [1; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; в) $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$; г) $x \in (-\infty; 5)$;

д) $x \in (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

10. а) $y = x, \quad x \neq -3$; б) $y = \begin{cases} x - 3, & x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty); \\ -x + 3, & x \in (-1; 3] \end{cases}$.

11. а) 1; б) 4. 12. а) $T = 5\pi$; б) $T = \frac{4\pi}{3}$; в) $T = 3\pi$; г) $T = 2\pi$; д) $T = 12\pi$.

13. а) $[2; 8]$; б) $[-2; 8]$; в) $\left[1; \frac{7}{3}\right]$; г) $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Д	Д	А	В	В	А	В	А	Б	В	Г	Д	Д	Б	Г

3.7 ТЕМА: Похідна функції. Її геометричний і механічний зміст.

Застосування похідної. Первісна. Інтеграл

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчити поняття похідної функції в точці; фізичний та геометричний зміст похідної функції; похідні елементарних функцій; правила диференціювання; похідну складеної функції; ознаки сталості, зростання та спадання функції; екстремуми функції; загальну схему дослідження функції; поняття найбільшого та найменшого значення функції на відрізку. Знаходити первісні, що зводяться до табличних, за допомогою правил знаходження первісних та найпростіших перетворень; відновлювати закон руху за заданою швидкістю, швидкість за прискоренням; обчислювати інтеграл за допомогою основних властивостей і формули Ньютона-Лейбніца; знаходити площі криволінійних трапецій.

3.7.1 Самостійна робота

1. Знайти похідну функції:

а) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x - 7$; б) $f(x) = \pi + \cos x$; в) $f(x) = \frac{1}{x^9}$; г) $f(x) = (4x - 3)^5$;

д) $f(x) = x^3 \operatorname{tg} x$; е) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$; ж) $f(x) = \frac{2x^3}{x + 4}$; з) $f(x) = \ln^2(4x - 3)^5$;

і) $f'(x) = \frac{1}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}} - \frac{3^{\operatorname{ctg} x} \ln 3}{\sin^2 x}$.

2. Обчислити значення похідної функції в заданій точці:

а) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $x_0 = 4$;

в) $f(x) = (x^2 - 2x)^6$, $x_0 = 2$; г) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

д) $f(x) = e^{6x+1} + \sqrt{x^2 + 7}$, $x_0 = 0$;

3. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = \frac{1}{8}t^2 - 6t + 2$ (t – час руху в секундах, переміщення s – у метрах). Знайдіть швидкість тіла через 4 с після початку руху.

4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції : а) $f(x) = 3 - x + 5x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3x^2 - x^3$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.

5. Скласти рівняння дотичної до графіка функції:

а) $f(x) = x^2 + 3x - 8$, яка паралельна прямій $y = 9x - 1$;

б) $f(x) = x^2 - x + 3$, яка паралельна прямій $x + y + 3 = 0$.

6. Знайдіть найбільше значення функції:

а) $f(x) = 3^{-7-6x-x^2}$; б) $f(x) = (x-2)^2(x-4) + 5$;

в) $f(x) = \sqrt{5-4x-x^2}$; г) $f(x) = \log_2(2+2x-x^2) - 2$.

7. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = \lg^3 x - 3\lg x + 5$.

8. Знайдіть точку мінімуму функції:

а) $f(x) = 7^{3+2x+x^2}$; б) $f(x) = (x+3)^2(x+5) - 1$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$; г) $f(x) = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$.

9. Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}.$$

10. Знайдіть найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

а) $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 3$, $[1; 2]$; б) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$, $[-2; 0]$;

в) $f(x) = (x-14)e^{x-13}$, $[12; 14]$; г) $f(x) = 3\cos x + 14x - 6$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$;

д) $f(x) = 7x - 7\operatorname{tg}x + 5, \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right];$

е) $f(x) = 6 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi + \frac{8\sqrt{3}}{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{3}\cos x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

11. Знайдіть найбільше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

а) $f(x) = 3x^5 - 20x^3 - 54, [-4; -1];$ б) $f(x) = x^3 - 6x^2, [0; 3];$

в) $f(x) = x + \frac{4}{x} + 4, [-4; -1];$ г) $f(x) = 6x - x\sqrt{x} + 1, [9; 25];$

д) $f(x) = 5\ln x - 5x + 7, [0,7; 1,7];$

е) $f(x) = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6, \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

ж) $f(x) = 10\sin x + \frac{84}{\pi}x + 9, \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right];$ з) $f(x) = 10\operatorname{tg}x - 10x + 9, \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right].$

12. Розв'язати рівняння $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = 0$, якщо $f(x) = x^2 \ln x$.

13. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{f'(x)}{(x+5)(x-6)} \leq 0$, де

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

14. Із усіх прямокутників, площа яких 9 см^2 , знайдіть прямокутник з найменшим периметром.

15. До графіка функції $f(x) = -8x - x^2$ проведені дві дотичні. Перша дотична проведена в точці з абсцисою $x_1 = -6$, друга – в точці з абсцисою $x_2 = 1$. Знайти площу трикутника, яка утворена віссю ординат і цими дотичними.

16. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ буде найменшою?

17. Число 10 записали у вигляді суми двох чисел, добуток яких найбільший із можливих. Знайдіть суму квадратів цих чисел.

18. Знайти всі значення параметра a , при яких функція $y = \lg\left(\frac{3}{2} - a\right)x^2 + (5a^2 - 4a - 1)x + 3$ приймає найменше значення при $x = 0$.

19. Знайти при яких значеннях a дотична до графіка функції $y = x^3 + ax^2$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку $N(3;4)$.

20. Знайти загальний вигляд первісної для функції:

а) $x^2 - \frac{1}{x}$; б) $x^4 + \cos x$; в) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

21. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(e^x + \cos x + \frac{1}{x^2} \right) dx$; б) $\int (7x+8)^{23} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5x-1}}$.

22. Для функції $f(x) = x^2$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $M(1;5)$.

23. Швидкість руху точки задано рівнянням $v(t) = 2\cos t$. Знайти рівняння руху, якщо в момент часу $t = 0$ точка знаходиться на відстані 12 м від початкового положення.

24. Знайти площу криволінійної трапеції:

а) $y = x^2, x = 1, x = 2, y = 0$;

б) $y = \sin x, x = 0, x = \pi, y = 0$.

25. Побудувати схематично фігури, площі яких виражаються таким інтегралами:

$$\text{а) } \int_0^1 x dx; \text{ В. } D: \begin{cases} x=0; \\ x=1; \\ y=0; \\ y=x. \end{cases} \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx. \text{ В. } D: \begin{cases} x=0; \\ x=\frac{\pi}{2}; \\ y=0; \\ y=\cos x. \end{cases}$$

26. Обчислити:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^3 - \cos x) dx; \quad \text{б) } \int_1^2 (x+2)^2 dx; \quad \text{в) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

27. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = -x^2 + 6x - 2$ і $y = x^2 - 2x + 4$.

28. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями: $y = 4 - x^2$ та $y = 0$.

29. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = 2t + 1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

3.7.2 Тестові завдання

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}$	$f'(x) = x^2 - x$	$f'(x) = 3x^2 + 2x$	$f'(x) = 3x^2 - 2x$	$f'(x) = x^3 - x^2$

2. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

А	Б	В	Г	Д

$f'(x) = 2$	$f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$	$f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}$	$f'(x) = -\frac{5}{(x+3)^2}$	$f'(x) = -\frac{7}{(x+3)^2}$
-------------	-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

3. При русі тіла по прямій відстань s (у метрах) змінюється за законом $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$ (t – час руху в секундах). Знайдіть швидкість тіла через 3 с після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
9 м/с	10 м/с	-15 м/с	15 м/с	4 м/с

4. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2 - 3x$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$?

А	Б	В	Г	Д
4	-2	-1	-3	-5

5. Знайдіть похідну функції $f(x) = x \cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f'(x) = \cos x - x \sin x$	$f'(x) = \cos x + x \sin x$

6. Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{tg} 5x$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 5x}$	$f'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}$	$f'(x) = -\frac{5}{\cos^2 5x}$	$f'(x) = \operatorname{ctg} 5x$	$f'(x) = 5 \operatorname{ctg} 5x$

7. Скільки критичних точок має функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 - 4x + 1$ на проміжку $[-5; 0]$?

А	Б	В	Г	Д
2	3	1	4	жодної

8. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = 4 \ln x + 5$ при $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	-3	8	2

9. Знайдіть значення похідної функції $y = x \cdot e^x$ в точці $x_0 = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$2e$	e	$1+e$	$2+e$	Інша відповідь

10. Знайдіть значення похідної функції $y = \frac{x-18}{x}$ в точці $x_0 = -3$.

А	Б	В	Г	Д
2	0	-2	-3	Інша відповідь

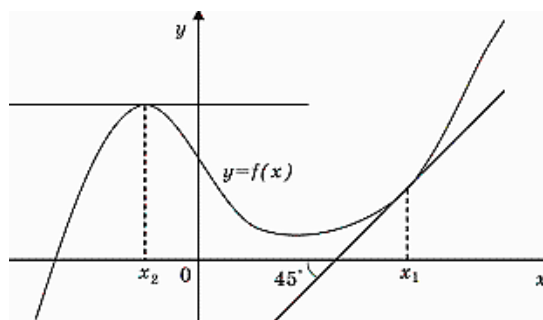
11. Знайдіть тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції $y = 4\sqrt{x+3}$ в точці $A(1;8)$ к додатному напрямку осі абсцис.

А	Б	В	Г	Д
-2	1	2	4	0

12. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до графіка функції $y = x^3 - 3x^2 - x + 1$ в точці $A(1;-2)$.

А	Б	В	Г	Д
0	-1	2	3	-4

13. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$ і дотичні до нього в точках x_1 і x_2 . Знайти $f'(x_1) + f'(x_2)$.



А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

14. В точці x_0 до графіку функції $y = x^2 - 7x + 3$ проведена дотична, яка паралельна до прямої $y = -5x + 3$. Знайдіть x_0 .

А	Б	В	Г	Д
1	-6	0	-0,5	6

15. Дві матеріальні точки рухаються по законам: $s_1(t) = 12 + 15t - t^2$ і $s_2(t) = 5 - 5t + 4t^2$, де $s_1(t), s_2(t)$ - переміщення в метрах, t - час в секундах. Яку відстань пройде перша точка з моменту початку руху до того моменту, коли швидкості цих двох точок стануть однаковими?

А	Б	В	Г	Д
2м	26м	38м	68м	Інша відповідь

16. Знайдіть критичні точки функції $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm\sqrt{3}$	$x = 1$	$x = -1$	$x = \pm 1$	$x = \pm\sqrt{3}$ і $x = 0$

17. Скільки точок екстремуму має функція $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 12$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	Більше трьох

18. Знайдіть найменше значення функції $y = x^4 - 10x^2 + 25$.

А	Б	В	Г	Д
-25	1	-10	0	25

19. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^7$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = 7x^6 + C$	$F(x) = \frac{x^5}{7} + C$	$F(x) = \frac{x^8}{8} + C$	$F(x) = \frac{x^8}{8}$	$F(x) = 7x^6$

20. Для функції $f(x) = 5e^x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(0; -2)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = 5e^x$	$F(x) = 5e^x + 7$	$F(x) = 5e^x - 2$	$F(x) = 5e^x - 7$	$F(x) = e^x - 2$

21. Знайдіть невизначений інтеграл $\int x^3 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$x^4 + C$	$\frac{x^4}{4} + C$	$\frac{x^4}{4}$	$3x^2 + C$	$3x^2$

22. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^0 x^2 dx$.

А	Б	В	Г	Д
-3	3	1	-9	9

23. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

24. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	8	6	8

3.7.3 Відповіді

Самостійна робота

1. а) $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$; б) $f'(x) = -\sin x$; в) $f'(x) = -\frac{1}{9x^{10}}$;

г) $f'(x) = 20(4x-3)^4$; д) $f'(x) = 3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$; е) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x-1}}$;

ж) $f'(x) = \frac{4x^2(x+6)}{(x+4)^2}$; з) $f'(x) = \frac{40 \ln(4x-3)^5}{4x-3}$;

і) $f'(x) = \frac{1}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}} - \frac{3^{\operatorname{ctg} x} \ln 3}{\sin^2 x}$.

2. а) -8; б) $\frac{1}{3}$; в) 0; г) 1; д) $6e$. 3. -5. 4. а) $y = -x - 3$; б) $y = -24x - 68$.

5. а) $y = 9x - 37$; б) $y = -x + 8$. 6. а) 9; б) 5; в) 3; г) $\log_2 3 - 2$.

7. Зростає на $(0; 0,1]$ і $[10; \infty)$. 8. а) -1; б) -3; в) 3; г) 3.

9. Зростає на $(-\infty; 2]$; спадає на $[2; \infty)$; $y_{\max} = y(2) = \frac{2}{e}$.

10. а) 0; б) 4; в) -1; г) $-21\pi - 6$; д) 5; е) -2.

11. а) 10; б) 0; в) 0; г) 33; д) 2; е) 12; ж) 74; з) 9.

12. $x = \frac{1}{e}$. 13. 5. 14. Квадрат зі стороною 3 см. 15. 43,75. 16. $a = \frac{1}{2}$.

17. 50. 18. $a = -\frac{1}{5}$. 19. $a = 1$.

20. а) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x + C$; б) $F(x) = \frac{x^5}{5} + \sin x + C$;

в) $F(x) = -\operatorname{ctg} x - \sqrt{2x-5} + C$.

21. а) $e^x + \sin x - \frac{1}{x} + C$; б) $\frac{1}{168}(7x+8)^{24} + C$;

в) $\frac{4}{15}\sqrt[4]{(5x-1)^3} + C$. 22. $\frac{x^3}{3} + \frac{14}{3}$. 23. $s(t) = 2\sin t + 12$. 24. а) $\frac{7}{3}$; б) 2.

25. а) $D: \begin{cases} x=0; \\ x=1; \\ y=0; \\ y=x. \end{cases}$ б) $D: \begin{cases} x=0; \\ x=\frac{\pi}{2}; \\ y=0; \\ y=\cos x. \end{cases}$

26. а) $\frac{\pi^4}{4^5} - \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{37}{3}$; в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 27. $2\frac{2}{3}$. 28. $76\frac{4}{5}\pi$. 29. 10.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Б	Б	А	Д	Г	Б	В	Д	А	А	Б	Д	А	А	В	Г	А	Г	В	Г

21	22	23	24
Б	Д	Д	Г

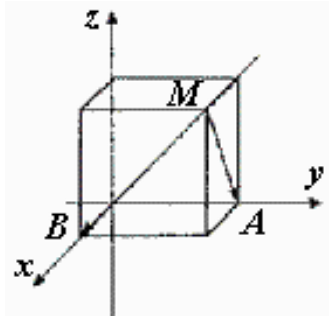
3.8 ТЕМА: Векторна алгебра

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Навчитися використовувати координати на площині та у просторі для вимірювання відстаней; користуватися аналогією між векторами на площині й у просторі; усвідомлювати важливість векторно-координатного методу в математиці; виконувати дії над векторами; застосовувати вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; використовувати вектори для вимірювання відстаней та кутів.

3.8.1 Самостійна робота

1. Знайти координати середини відрізка AB , якщо $A(-4;8;-5)$, $B(8;6;-7)$.
2. Знайти відстань між точками A і B , якщо $A(7;-7;10)$, $B(1;-4;4)$.
3. Дано три вершини $A(1;-2;3)$, $B(2;3;-5)$, $D(-4;5;1)$ паралелограма $ABCD$. Знайти координати його четвертої вершини C .
4. Знайти координати вектора \overline{AB} , якщо $A(2;3;-1)$, $B(1;-4;5)$.
5. Дано вектори : $\vec{a}(2;-3;4)$ і $\vec{b}(-1;6;2)$. Знайти:
а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $4\vec{a} - \vec{b}$.
6. Дано вектори $\vec{a}(3;-2;-1)$ і $\vec{b}(1;2;-4)$. Знайти координати вектора $\vec{m} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$.
7. Знайти координати векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо їх сума – вектор $\overline{(4;-1;5)}$, а різниця - $\overline{(6;3;-1)}$.
8. Знайти скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a}(2;-1;4)$ і $\vec{b}(3;2;-1)$.

9. Знайти скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$,
 $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.
10. Дано точки $A(1; \sqrt{3}; 3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(-1; -1; 3)$ і $D(-1; 0; 3)$. Знайти кут між векторами \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} .
11. Задані вершини трикутника ABC. $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$.
 Обчислити зовнішній кут при вершині B .
12. Задані вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ і $D(-5; -5; 3)$. Обчислити кут φ між його діагоналями.
13. При якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?
14. Знайти координати вектора \vec{b} , який колінеарний вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$, за умови $\vec{a}\vec{b} = 3$.
15. Паралелограм ABCD побудований на векторах \vec{a} і \vec{b} як на сторонах. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$. Знайти величину кута між векторами \vec{a} і \vec{b} (в градусах).
16. Визначити кут між векторами \vec{a} і \vec{b} в градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(-4; -3)$, $\vec{b}(-1; -7)$, причому $0 < \alpha < 180^\circ$.
17. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 5 см. Знайти скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
18. Задано точку M (1; 2; 3). Точка A лежить на осі ординат, а точка B – на осі абсцис (див. рисунок). Знайти скалярний добуток вектора \overrightarrow{MA} і \overrightarrow{MB} .



19. Задані координати вершин трикутника ABC.

$A(1;2;1)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;0;4)$. Знайти косинус кута A трикутника.

20. Задано правильний шестикутник $ABCDEF$ зі стороною 2 см. Знайти:

а) значення параметра λ , при якому вектори $\lambda\overline{AB} + \overline{AD}$ і \overline{AF} перпендикулярні;

б) довжину вектора $\overline{AK} + \overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AP}$, де точки K, M, N, P - середини сторін AB, CD, DE, FA відповідно.

3.8.2 Тестові завдання

1. Точка C – середина відрізка AB, $A(2; 4; 6)$, $C(0; 1; 10)$. Знайдіть координати точки B.

А	Б	В	Г	Д
$B(1; 2,5; 8)$	$B(-2; -2; 14)$	$B(-2; -3; 4)$	$B(2; 1; -4)$	$B(2; 6; 26)$

2. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $C(6; -3; 2)$, $D(4; 1; 4)$.

А	Б	В	Г	Д
24	$2\sqrt{6}$	8	$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{6}$

3. Яка з точок $A(7; 9; 0)$, $B(0; -8; 6)$, $C(-4; 0; 5)$ належить координатній площині xz ?

А	Б	В	Г	Д
жодна з даних точок	точка C	всі дані точки	точка A	точка B

4. Яка з точок належить осі Ox ?

А	Б	В	Г	Д
$(1; 1; 0)$	$(0; 0; 4)$	$(-1; 0; 0)$	$(1; 2; 0)$	$(0; 1; 0)$

5. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{MK} , якщо $M(10; -4; 2)$, $K(16; 2; -5)$.

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{MK}(16; -2; -3)$	$\overrightarrow{MK}(6; 6; -7)$	$\overrightarrow{MK}(6; -2; -3)$	$\overrightarrow{MK}(6; -6; -7)$	$\overrightarrow{MK}(-6; -6; 7)$

6. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}(-5; 1; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
8	30	4	$\sqrt{8}$	$\sqrt{30}$

7. При якому значенні n вектори $\vec{a}(8; -12; 20)$ і $\vec{b}(2; n; 5)$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
3	-3	такого значення не існує	4	-4

8. Знайдіть різницю векторів $\vec{a}(2; 7; -4)$ і $\vec{b}(-1; 5; 3)$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 12; -1)$	$(-3; 2; 7)$	$(1; 2; -7)$	$(3; 2; -7)$	$(1; 2; -1)$

9. Знайдіть координати вектора \vec{c} , якщо $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ і $\vec{a}(4; -2; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{c}(1; -1; 0)$	$\vec{c}(-2; -1; 0)$	$\vec{c}(-2; 1; 0)$	$\vec{c}(2; -1; 0)$	$\vec{c}(2; 1; 0)$

10. Які із наведених значень можуть бути значенням градусної міри кута між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо скалярний добуток цих векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} = 180$?

А	Б	В	Г	Д
120°	150°	90°	180°	60°

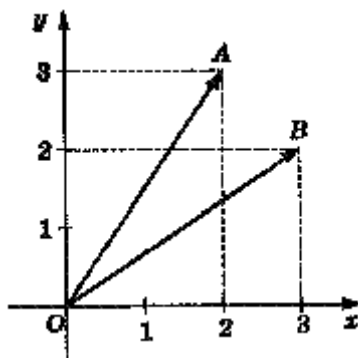
11. Знайти кут між векторами \vec{a} і $7\vec{b}+2\vec{c}$, якщо відомо, що $\vec{a}(137;137\sqrt{3})$, $\vec{b}(-2;2)$ і $\vec{c}(7;-4)$ (в градусах).

А	Б	В	Г	Д
45°	30°	90°	120°	60°

12. На площині задані чотири точки A(1;2), B(5;1), C(3;4), D(1;-4). Знайти кут між векторами \overline{AB} і \overline{CD} .

А	Б	В	Г	Д
45°	30°	90°	120°	60°

13. Знайти скалярний добуток векторів, зображених на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
6	8	10	12	18

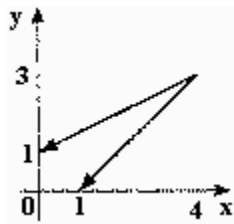
14. Знайти кут між векторами \vec{a} і $\vec{b}+\vec{c}$, якщо відомо, що $\vec{a}(2;2)$, $\vec{b}(2;4)$ і $\vec{c}(-2;-6)$ (в градусах).

А	Б	В	Г	Д
115°	120°	45°	135°	60°

15. Знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо кут між векторами \vec{a} і $4\vec{b}$ дорівнює 60°.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	120°	60°

16. Знайти скалярний добуток векторів, зображених на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
9	18	16	12	24

17. Серед векторів $\vec{a}(-2; 4)$, $\vec{b}(2; 2)$ і $\vec{c}(0; -1)$, $\vec{d} = (1; -2)$ знайти колінеарні.

А	Б	В	Г	Д
\vec{d} і \vec{b}	\vec{a} і \vec{d}	\vec{a} і \vec{c}	\vec{d} і \vec{c}	\vec{c} і \vec{b}

18. Знайти модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, а кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 60° .

А	Б	В	Г	Д
6	5	4	2	3

19. Від якої координатної площини найбільш віддалена точка $(1; -7; 5)$?

А	Б	В	Г	Д
yz	xy	xz	Визначити неможливо	Інша відповідь

20. Знайти координати точки M , відносно якої симетричні точки $E(-3; 8; 7)$ і $F(-9; 6; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-6; 7; 4)$	$(-12; 14; 8)$	$(0; 0; 0)$	$(3; 1; 3)$	Інша відповідь

21. При яких значеннях m точки $A(-6; 3; 8)$ і $B(4; -m; 6)$ симетричні відносно точки $C(-1; m; 7)$?

А	Б	В	Г	Д
1	-1 або 0	-1	0	Інша відповідь

22. При яких значеннях m точка $A(4; m; -2)$ симетрична точці $B(-4; m; -2)$ відносно точки $C(0; 2; -2)$?

А	Б	В	Г	Д
2	При будь яких m	-1	1	Інша відповідь

23. Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(1;2;3)$ відносно координатної площини xz .

А	Б	В	Г	Д
$(-1;2;3)$	$(1;-2;3)$	$(1;2;-3)$	$(-1;-2;3)$	$(-1;2;-3)$

24. Точка М симетрична точці $K(2; 1; -2)$ відносно точки $A(-1; 3; 0)$. Знайти суму координат точки М.

А	Б	В	Г	Д
-1	0	2	3	-4

25. Знайти координати точки, яка симетрична до точки $(-1; 4; 7)$ відносно осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
$(1;-4;7)$	$(-1; -4; -7)$	$(-1; -4; -7)$	$(-1;-4; 7)$	$(1; 4; -7)$

26. Яка з наведених точок віддалена від осі OY на відстань 10?

А	Б	В	Г	Д
$(4;3;4)$	$(8; 1; -6)$	$(7; 0;7)$	$(1;1; 10)$	$(0;10; 0)$

27. На осі ординат вкажіть такі точки, відстань від яких до точки $(-1; 0; 3)$ дорівнює 6.

А	Б	В	Г	Д
$(0;\pm 2;0)$	$(0;\pm 5;0)$	$(0;\sqrt{26};0)$	$(0;\pm\sqrt{28};0)$	$(0;\pm\sqrt{26};0)$

28. Вкажіть всі значення параметра p , при яких точки $A(p; 4; 0)$ і $B(-1; p^2; 0)$ розташовані на однаковій відстані від площини xz .

А	Б	В	Г	Д
2	2 і -2	-2	-1	Інша відповідь

29. При яких значеннях x вектори $\vec{a}(3;0;6)$ і $\vec{b}(-8;7;x)$ будуть перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
4	-2	2	0	-4

30. Знайти значення m , при якому вектори $\vec{a}(2;-4;m)$ і $\vec{b}(3;-1;5)$ взаємно перпендикулярні.

А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	-2

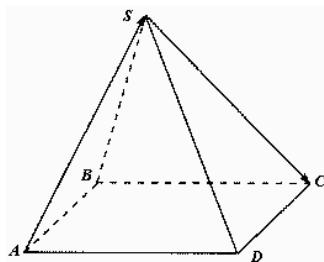
31. Задані точки $A(1; 2; -3)$, $B(3; -3; 0)$, $C(0; -3; 4)$, $D(2; -8; 7)$. Знайти різницю векторів $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 0; 0)$	$(4; -6; 6)$	$(4; 0; 0)$	$(-4; 6; -6)$	$(0; -6; 6)$

32. Задані вектори $\vec{a}(2; -3; 5)$ і $\vec{b}(-1; 4; 3)$. Які координати має вектор $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b}$?

А	Б	В	Г	Д
$(3; -2; 13)$	$(5; -10; 7)$	$(5; 2; -2)$	$(1; 1; 8)$	Інша відповідь

33. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнює 1. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}$.



А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	2	1	$\sqrt{2}$	Відповідь залежить від довжин бічних ребер піраміди

34. Як розташовані прямі AB і CD , якщо $A(1; 2; -3)$, $B(3; 2; -1)$, $C(-1; 2; -3)$, $D(-5; 2; -7)$?

А	Б	В	Г	Д
перетинаються	співпадають	паралельні	мимобіжні	Інша відповідь

35. Від якої координатної площини точка $(-2; 6; -5)$ найменше віддалена?

А	Б	В	Г	Д
yz	xu	xz	Визначити неможливо	Інша відповідь

36. Задана точка $P(-1; 3; 5)$. Знайти координати точки Q , яка симетрична точці P відносно координатної площини yz .

А	Б	В	Г	Д
(1;3;5)	(-1; -3; 5)	(-1; 3;-5)	(1;-3; -5)	(1;-3; 5)

37. При якому значенні m точки $P(m;4;2)$ і $Q(4;4;-2)$ симетричні відносно точки $C(-2;4;0)$?

А	Б	В	Г	Д
0	-8	12	$\sqrt{12}$	Інше значення

38. При яких значеннях m точки $A(1;3;2)$ і $B(1;5;8)$ симетричні відносно точки $C(1;m;3)$?

А	Б	В	Г	Д
Таких значень немає	0	1	4	Інше значення

39. У просторі задані точки $A(2; 3; 5)$ і $M(1; -1; 2)$. Знайти координати точки S , яка симетрична до точки A відносно точки M .

А	Б	В	Г	Д
(-2;-3;5)	(3; 2; -3)	(1; 4;-7)	(0;-5; -1)	(35;1; -35)

40. Точка A симетрична точці $B(1; 0; -1)$ відносно точки $C(0; 1; 0)$. Знайти координати точки A .

А	Б	В	Г	Д
(1;1;1)	(-1; 2; 1)	(-1; 0;1)	(-1;1; 1)	(0;0; 0)

41. Знайти координати точки, яка симетрична відносно осі абсцис середині відрізка з кінцями в точках $(7;-3;4)$ і $(-1;1; -2)$.

А	Б	В	Г	Д
(-3;1; -1)	(-3; -1; -1)	(3; 1;-1)	(-3;-1; 1)	(3;1; 1)

42. Вкажіть точку, яка віддалена від початку координат на 3 одиниці.

А	Б	В	Г	Д
(2; 2; 2)	(1; 1; 1)	(0; 0; 2)	(2; 2; 1)	(0; 0; -2)

43. Ортогональною проекцією вектора з кінцями в точках $A(-1;0; 5)$ і $B(-1;0; 8)$ на координатну площину xu є :

А	Б	В	Г	Д
пряма	промінь	відрізок	точка	Інша відповідь

44. Укажіть всі значення параметра m , при якому точки $A(4;4; m)$ і $B(-1;-3; -4)$ розташовані на однаковій відстані від осі u .

А	Б	В	Г	Д
-1	1	1 і -1	Таких значень не існує	Інша відповідь

45. При яких значеннях n вектори $\vec{a}(n;-2;3)$ і $\vec{b}(n;n;-1)$ перпендикулярні? У відповіді запишіть добуток всіх отриманих значень n .

А	Б	В	Г	Д
1	-3	-1	3	$\sqrt{3}$

46. Вектори $\vec{a}(-1;x;2)$ і $\vec{b}(3;-12;-6)$ лежать на протилежних сторонах ромба. Знайти x .

А	Б	В	Г	Д
-4	4	-3	3	6

47. Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(0; 2; 0)$,

$B(1; 0; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 2)$. Який вид має чотирикутник?

А	Б	В	Г	Д
паралелограм	трапеція	прямокутник	квадрат	ромб

3.8.3 Відповіді

Самостійна робота

1. (2;7;-6). 2. 9. 3. (-3;10;-7). 4. (-1;-7;6). 5. а) (3;0;10); б) (9;-18;14).

6. (-7;10;-5). 7. $\vec{a}(5;1;2); \vec{b}(-1;-2;3)$. 8. 0. 9. 5. 10. $\frac{5\pi}{6}$. 11. $\frac{3\pi}{5}$.

12. $\varphi = 90^\circ$. 13. -6. 14. $\vec{b} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. 15. 60° . 16. 45° . 17. 12,5. 18. 9.

19. $\frac{7}{13}$. 20. а) $\lambda = 2$; б) 8.

Тестові завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Б	Б	Б	В	Б	Д	Б	Г	В	Д	Б	Б	Г	Г	Д	Б	Б	Г	В	А

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
А	А	Б	Г	Д	Б	Д	Б	А	Д	А	Б	Г	В	А	А	Б	Г	Г	Б

41	42	43	44	45	46	47
В	Г	Г	В	Б	Б	Д

3.9 ТЕМА: Планіметрія

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчити основні теореми планіметрії та наслідки з них. Рівність і подібність геометричних фігур.

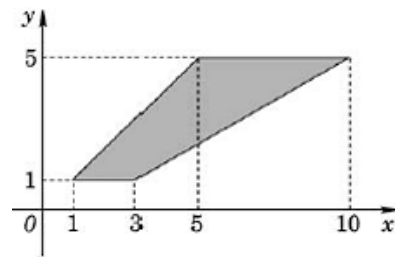
Многокутник. Коло і круг. Трикутник, паралелограм, трапеція довільний чотирикутник: їх основні ознаки і властивості.

3.9.1 Самостійна робота

1. Площа ромба дорівнює 120 см^2 , а його діагоналі відносяться як 5:12.

Знайдіть периметр ромба.

2. Знайти площу трапеції зображеної на малюнку:



3. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K . Знайти периметр паралелограма, якщо $BK=7, CK=8$.

4. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 4 см. Знайдіть периметр цієї трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.

5. У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD проведені бісектриси кутів A і B до перетину з основами в точках N і K відповідно. Знайдіть периметр чотирикутника $ABNK$, якщо $AB=5$ см.

6. Знайдіть менший кут паралелограма, якщо різниця двох кутів паралелограма дорівнює 120° .

7. Площа круга дорівнює $\frac{600,25}{\pi}$. Знайдіть довжину його кола.
8. Знайдіть площу сектора круга радіуса 35, довжина дуги якої дорівнює 2.
9. Якого радіуса повинно бути коло з центром в точці P(-12, -6), щоб воно дотикалось осі абсцис?
10. У ромбі ABCD кут ACD дорівнює 43° . Знайдіть кут ABC. Відповідь дайте в градусах.
11. У ромбі ABCD кут ABC дорівнює 122° . Знайдіть кут ACD. Відповідь дайте в градусах.
12. Знайдіть центральний кут AOB, якщо він на 15° більше вписаного кута ACB, який опирається на ту ж саму дугу. Відповідь дайте в градусах.
13. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 6 і 12. Синус гострого кута трапеції дорівнює 0,8. Знайти бічну сторону.
14. Знайти число сторін правильного многокутника, кожний із кутів якого дорівнює 140° .
15. В трикутнику ABC кут C дорівнює 90° , $AB = \sqrt{153}$, $BC = 12$. Знайти котангенс зовнішнього кута при вершині A.
16. В трикутнику ABC $AC = BC = 16$, $\sin \angle B = \frac{3\sqrt{23}}{16}$. Знайти AB.
17. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12, а висота, що проведена до основи – 8. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.
18. Знайти площу S круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 9 см. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.
19. В прямокутну трапецію вписано коло з радіусом 4 см. Знайти площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.
20. Висота рівнобедреного трикутника 20 см, а основа трикутника відноситься до його бічної сторони як 4:3. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

3.9.2 Тестові завдання

1. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 1 см, а кут між ними - 30° .

Знайдіть третю сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
1 см	$\sqrt{2}$ см	$\sqrt{3}$ см	2 см	3 см

2. Сторони трикутника, одна з яких удвічі більша за другу, утворюють 120° , а довжина третьої сторони дорівнює $3\sqrt{7}$. Знайдіть найменшу сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

3. Вкажіть *хибне* твердження.

А	Б	В	Г	Д
Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.	Якщо в паралелограма один із кутів прямий, то цей паралелограм – прямокутник.	Діагоналі ромба є бісектрисам и його кутів.	Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні.	Кожна діагональ квадрата утворює зі стороною кут 45° .

4. Вкажіть *хибне* твердження.

А	Б	В	Г	Д
Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.	Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник.	Діагоналі ромба рівні.	Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом	Діагоналі квадрата рівні і перетинаються під прямим кутом.

5. Сторони трикутника дорівнюють 1 см, $3\sqrt{2}$ см і 5 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.

А	Б	В	Г	Д
90°	120°	135°	150°	175°

6. Два кути трикутника дорівнюють 30° і 45° . Знайдіть сторону, протилежну куту 30° , якщо сторона, протилежна куту 45° , дорівнює $\sqrt{6}$ см.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

7. Сторона трикутника дорівнює 20 см, а протилежний кут 150° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
30	25	20	15	10

8. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює α , а кут при основі – 2β .

Знайдіть бісектрису, проведену до бічної сторони.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\alpha \sin 2\beta}{\sin 3\beta}$	$\frac{\alpha \sin 3\beta}{\sin 2\beta}$	$\frac{\alpha \cos 2\beta}{\cos 3\beta}$	$\frac{\alpha \cos 3\beta}{\cos 2\beta}$	$\frac{\alpha \cos 2\beta}{\sin 3\beta}$

9. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює b , а протилежний до нього кут – β . Визначити радіус кола, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{2\sin \beta}$	$\frac{b}{2\cos \beta}$	$\frac{b \sin \beta}{2}$	$\frac{2b}{\sin \beta}$	$\frac{2b}{\cos \beta}$

10. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α . Визначити катет, прилеглий до цього кута, якщо радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює r .

А	Б	В	Г	Д
$r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$r (1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2})$	$r (1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})$	$2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

11. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

А	Б	В	Г	Д
4 см	2 см	8 см	8,5 см	4 см

12. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	18 см	24 см	28 см	32 см

13. Знайти площу круга, у який вписано трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$10\pi \text{ см}^2$	$36\pi \text{ см}^2$	$64\pi \text{ см}^2$	$25\pi \text{ см}^2$	$480\pi \text{ см}^2$

14. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, поділяє висоту, що проведена до основи, у відношенні 10 : 3. Знайти периметр трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
64 см	49 см	43 см	46 см	52 см

15. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайти менший з відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
$8\frac{4}{7}$ см	$6\frac{5}{12}$ см	6 см	5 см	$4\frac{2}{7}$ см

16. Два трикутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 12 см, і 16 см, а сторони іншого – 40 см, 30 см, та x см. Знайти x .

А	Б	В	Г	Д
18 см	17,5 см	20 см	24 см	18,5 см

17. Сторони трикутника, одна із яких вдвічі більша другої, утворює кут 120° , а довжина третьої сторони дорівнює $3\sqrt{7}$. Знайти найменшу сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$

18. Сторони трикутника, одна із яких на 8 см більше другої, утворюють кут 120° , а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайти периметр трикутника (в см).

А	Б	В	Г	Д
70	60	120	150	100

19. В трикутнику ABC $BC=8$ см, $\angle BAC = 45^\circ$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника (в см).

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{3}$	12	16

20. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а один із катетів 6 см (в см^2).

А	Б	В	Г	Д
15	24	30	48	60

21. Кут при вершині В рівнобедреного трикутника АВС (АВ=ВС) дорівнює 40° . Знайти кут між висотами, які проведені із вершин А і С.

А	Б	В	Г	Д
100°	110°	120°	130°	140°

22. Знайти довжину медіани прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, яка дорівнює 12 см.

А	Б	В	Г	Д
4см	6см	10см	12см	Інша відповідь

23. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см². Знайти висоту цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
4	8	$2\sqrt{6}$	$8\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$

24. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, яка проведена до нього, - 5 см. Знайти гіпотенузу трикутника (в см).

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{70}$	$\sqrt{52}$	7	$\sqrt{34}$	Інша відповідь

25. Обчисліть площу кругового кільця (у см²), якщо його внутрішній і зовнішній діаметри дорівнюють 6 см і 8 см відповідно.

А	Б	В	Г	Д
6π	7π	8π	12π	24π

26. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 120 см, якщо її кутова величина дорівнює 30° .

А	Б	В	Г	Д
5π см	10π см	15π см	20π см	24π см

27. Площа кругового сектора становить 15% площі круга. Яка величина центрального кута сектора?

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	54°	15°	20°

28. Коло, радіус якого дорівнює 9, розігнуто в дугу, радіус кола якої дорівнює 24. Знайти центральний кут, який стягує утворену дугу.

А	Б	В	Г	Д
100°	120°	135°	150°	180°

29. З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди, довжини яких дорівнюють 12 і 16. Знайти довжину кола.

А	Б	В	Г	Д
20 π	40 π	50 π	60 π	35 π

30. В коло, діаметр якого дорівнює $\sqrt{12}$, вписано чотирикутник $ABCD$. Знайти діагональ BD , якщо $\angle BAD = 30^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
3	$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$

31. Знайти відношення площ правильного чотирикутника і правильного шестикутника, якщо їх сторони рівні.

А	Б	В	Г	Д
$1: \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$1: \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}:1$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}:1$	Інша відповідь

32. У прямокутнику $ABCD$ із вершини A проведена бісектриса, яка перетинає діагональ в точці K , а сторону BC – в точці M , причому $BM:MC=5:2$. Знайти відношення $BK:KD$.

А	Б	В	Г	Д
5:7	2:7	3:5	7:5	7:3

33. Як зміниться площа прямокутника, якщо його довжину зменшити на 50%, а ширину збільшити в 2 рази.

А	Б	В	Г	Д
Зменшиться в 1,5 рази	Збільшиться в 1,5 рази	Зменшиться в 3 рази	Збільшиться в 3 рази	Не зміниться

34. Знайти площу паралелограма (в см^2), якщо його сторони відносяться як 8:19, а діагоналі дорівнюють 30см і 50см.

А	Б	В	Г	Д
$48\sqrt{91}$	$11\sqrt{13}$	$91\sqrt{48}$	$13\sqrt{11}$	48

35. У ромбі $ABCD$ сума кутів A і C дорівнює 180° . Знайти градусну міру кута B .

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	90°	120°

36. Трапеція з бічною стороною 8 см вписана в коло. Діагональ трапеції утворює з більшою основою кут α , для якого $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Обчислити радіус описаного навколо трапеції кола (в см).

А	Б	В	Г	Д
4	4,8	5	6,4	8

3.9.3 Відповіді

Самостійна робота

1. 52. 2. 14. 3. 44. 4. 36. 5. 20. 6. 30° . 7. 49. 8. 35. 9. 12. 10. 94° .
11. 29° . 12. 30° . 13. 5. 14. 9. 15. -0,25. 16. 14. 17. 3. 18. 27. 19. 72.
20. 8.

Тестові завдання

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| А | В | Г | В | В | Г | В | А | А | В | Б | В | Г | Д | А | Б | В | Б | А | Б |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| Д | Б | Д | Б | Б | Г | В | В | А | Б | А | А | Д | А | Г | В |

3.10 ТЕМА: СТЕРЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчити аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них; ознаки паралельності прямих, прямої і площини; ознаку перпендикулярності прямої і площини;; властивість трьох перпендикулярів; властивість перпендикулярних площин. Вивчити многогранники, призми, прямі та похилі призми, правильні призми, паралелепіпеди, властивості паралелепіпеда, циліндри, вписані та описані призми; піраміди, правильні піраміди, конуси, вписані та описані піраміди, кулю і сферу; площі поверхонь та об'єми многогранників і тіл обертання.

3.10.1 Самостійна робота

1. У правильній шестикутній призмі площа найбільшого діагонального перерізу 4 см^2 , а відстань між двома протилежними бічними гранями 4 см . Знайдіть об'єм призми (у см^3).
2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см , а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм піраміди (у см^3).
3. Висота і твірна конуса відносяться як $4 : 5$, а об'єм конуса дорівнює $96\pi \text{ см}^3$. Знайдіть його повну поверхню S . У відповідь запишіть $\frac{S}{\pi}$ (у см^3).
4. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює 4 . Знайти площу бічної поверхні циліндра. У відповіді вкажіть $\frac{S}{\pi}$.
5. Знайти площу бічної поверхні правильної трикутної призми, яку вписано в циліндр, радіус основи якої дорівнює $2\sqrt{3}$, а висота дорівнює 2 .
6. У скільки разів збільшиться площа повної поверхні піраміди, якщо всі її ребра збільшити в 12 разів?

7. Довжина кола основи циліндра дорівнює 7. Площа бічної поверхні дорівнює 105. Знайти висоту циліндра.
8. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, гострий кут якого дорівнює $\alpha = 60^\circ$. Під яким кутом до основи треба провести січну площину, щоб в перерізі дістати квадрат, вершини якого лежать на бічних ребрах.
9. У правильній трикутній призмі проведено переріз, який проходить через одну із сторін нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи. Знайти площу перерізу, якщо сторона основи дорівнює 6, а січна площина утворює з площиною основи кут $\alpha = 30^\circ$.
10. Через сторону основи правильної трикутної призми проведено площину під кутом 30° до площини основи. Знайти площу утвореного перерізу (трикутника), якщо об'єм піраміди, що відтинається площиною від призми, дорівнює 8.
11. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює 60° . Знайти кут нахилу бічного ребра до площини основи.
12. В основі піраміди лежить квадрат. З двох протилежних бічних ребер одне перпендикулярне до площини основи, а друге утворює з нею кут $\alpha = 30^\circ$ і має довжину 4. Знайти довжину решти бічних ребер.
13. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Через діагональ основи проведено площину паралельно бічному ребру. Знайти площу перерізу, якщо сторона основи дорівнює 8.
14. В основі чотирикутної піраміди лежить ромб, менша діагональ якого дорівнює 8, а гострий кут дорівнює 60° . Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут 30° . Знайти площу повної поверхні піраміди.
15. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює 16. Бічна грань утворює з площиною основи кут 60° . Знайти об'єм піраміди.
16. Осьовим перерізом конуса є трикутник, площа якого дорівнює 3, а твірна конуса утворює з площиною основи кут 30° . Знайти площу бічної поверхні.
17. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої утворює з площиною основи кут α . Об'єм піраміди дорівнює V . Знайти об'єм кулі і обчислити його значення, якщо $\alpha = 30^\circ$, $V = 6$.

18. У кулю, радіус якої R , вписано правильну трикутну піраміду. Двогранний кут при основі дорівнює α . Знайти об'єм піраміди і обчислити його значення, якщо $\alpha = 30^\circ$, $R = 13$.
19. Об'єм трикутної піраміди $SABC$, що є частиною правильної шестикутної піраміди $SADCDEF$, дорівнює 26. Знайти об'єм шестикутної піраміди.
20. Об'єм тетраедра дорівнює 5,5. Знайти об'єм многогранника, вершинами якого є середини сторін даного тетраедра.
21. Два ребра прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, дорівнюють 20 і 60. Площа поверхні паралелепіпеда дорівнює 4800. Знайти його діагональ.
22. Сторони основи правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 10, бічні ребра дорівнюють 13. Знайти площу поверхні цієї піраміди.
23. Радіус основи циліндра дорівнює 6, висота дорівнює 3. Знайти площу бічної поверхні циліндра, поділену на π .
24. Об'єм конуса дорівнює 64. Через середину висоти паралельно основі конуса проведено переріз, який є основою меншого конуса з тією ж вершиною. Знайти об'єм меншого конуса.
25. Знайти площу бічної поверхні правильної трикутної призми, яка описана навколо циліндра, радіус основи якого дорівнює $\sqrt{3}$, а висота дорівнює 1.
26. Знайти об'єм конуса, площа основи якого дорівнює 6, твірна дорівнює 8 і нахилена до площини основи під кутом 30° .
27. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 2π , а висота – 1. Знайти діаметр основи.
28. Діаметр основи конуса дорівнює 6, а довжина твірної – 5. Знайти висоту конуса.
29. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 13, 12 і 5. Всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм піраміди.
30. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена під кутом 60° до площини основи. Знайти об'єм піраміди.
31. Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи конуса під

кутом 120° , а із вершини конуса - під кутом 90° . Обчислити площу перерізу, в см^2 .

32. Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 5 см, 7 см і 9 см складається із кубиків з довжиною ребра 1 см. Скільки треба забрати кубиків, щоб видалити весь зовнішній шар товщиною в один кубик?

33. Металевий шар радіуса $R = \sqrt[3]{16}$ перелили в конус, висота якого 8. Знайти відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.

34. Із середини висоти правильної трикутної піраміди опущені перпендикуляри на бічне ребро піраміди і на бічну грань. Довжини цих перпендикулярів відповідно дорівнюють $\sqrt{2}$ і 1. Знайти об'єм піраміди.

3.10.2 Тестові завдання

1. Пряма a паралельна площинам β і γ . Яке взаємне розташування цих площин?

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--|----------------|
| Площини обов'язково перетинаються | Площини обов'язково паралельні | Площини обов'язково співпадають | Площини обов'язково паралельні або співпадають | Інша відповідь |

2. Задані площина α і точка P . Скільки існує різних площин, які проходять через точку P і перпендикулярних до площини α ?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|----------------|----------------|---|----------|
| 1 | 0 або ∞ | 1 або ∞ | 0 | ∞ |

3. Із точки A до площини α проведені дві похилі AK і AN , які утворюють з площиною α кути 45° і 60° відповідно. Знайти довжини AK і AN якщо відстань від точки A до площини α дорівнює $\sqrt{3}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | | | |
|--|------------------------------------|----------------|------------------------|--------------------------|
| $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} i \frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}}{2} i \frac{3}{2}$ | $\sqrt{6} i 2$ | $\sqrt{6} i 2\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} i 2$ |
|--|------------------------------------|----------------|------------------------|--------------------------|

4. Скільки різних площин визначають паралельні прямі a, b, c ?

| | | | | |
|------------|---------------|---------------|--------------|-----------|
| А | Б | В | Г | Д |
| Рівно одну | Одну, або дві | Одну, або три | Дві, або три | Рівно три |

5. Задана площина α і точка А, яка належить площині α . Геометричне місце середин відрізків, що з'єднують точку А з точками площини α , це:

| | | | | |
|-------|----------|-------|---------|-------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| точка | відрізок | пряма | площина | многокутник |

6. У правильній чотирикутній призмі бічне ребро дорівнює 3 см, а площа повної поверхні $S = 32 \text{ см}^2$. Знайти сторону основи призми.

| | | | | |
|------|-------------------|----------------|------|-------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 2 см | $2\frac{1}{3}$ см | $2\sqrt{7}$ см | 3 см | $3\frac{1}{2}$ см |

7. Площа поверхні куба 96 м^2 . Знайти об'єм куба.

| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 64м^3 | 48м^3 | 36м^3 | 24м^3 | Інша відповідь |

8. Діагональ куба дорівнює 6 см. Знайти площу повної поверхні куба.

| | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 72 см^2 | 66 см^2 | 60 см^2 | 54 см^2 | 48 см^2 |

9. У куб вписана сфера радіуса 5. Знайти площу поверхні куба.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 150 | 300 | 450 | 600 | 1000 |

10. Обчислити довжину меншої діагоналі прямої призми, в основі якої ромб зі стороною 6 м і гострим кутом 60° , а висота призми 8 м.

| | | | | |
|-----------------|------|-----|-------|--------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $25\sqrt{43}$ м | 10 м | 9 м | 9,5 м | 10,5 м |

11. Всі ребра тетраедра збільшили в 2 рази. В скільки разів збільшиться об'єм тетраедра?

| | | | | |
|----------|----------|---------|----------|----------|
| А | Б | В | Г | Д |
| В 2 рази | В 4 рази | В 8 раз | В 12 раз | В 16 раз |

12. Площа основи і площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнюють відповідно 36 см^2 і 60 см^2 . Знайти апофему цієї піраміди.

| А | Б | В | Г | Д |
|-------|------|--------|---------|------|
| 10 см | 5 см | 2,5 см | 1,25 см | 1 см |

13. Прямокутній паралелепіпед має ребро довжиною 1 см, 2 см і 3 см. Знайти об'єм даного паралелепіпеда.

| А | Б | В | Г | Д |
|------------------|------------------|-------------------|------------------|----------------|
| 9 см^3 | 6 см^3 | 18 см^3 | 5 см^3 | Інша відповідь |

14. Двогранний кут дорівнює 45° . Задана точка на одній із граней кута. Відстань від цієї точки до другої грані кута 12 см. Знайти відстань від заданої точки до ребра двогранного кута.

| А | Б | В | Г | Д |
|-------|-----------------|-------|----------------|----------------|
| 14 см | $12\sqrt{2}$ см | 12 см | $8\sqrt{2}$ см | $6\sqrt{2}$ см |

15. У правильному многограннику 12 ребер і 8 вершин. Скільки у ньому граней?

| А | Б | В | Г | Д |
|----|---|---|----|---|
| 12 | 6 | 4 | 10 | 8 |

16. Площа діагонального перерізу куба дорівнює $5\sqrt{2} \text{ см}^2$. Знайти площу повної поверхні куба.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|---------------------------|
| $25\sqrt{2} \text{ см}^2$ | 30 см^2 | $20\sqrt{3} \text{ см}^2$ | 40 см^2 | $15\sqrt{6} \text{ см}^2$ |

17. Обчислити діагональ куба, якщо діагональ її нижньої основи дорівнює 4 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|------------------|----------------|----------------|-------|----------------|
| $4+2\sqrt{2}$ см | $2\sqrt{6}$ см | $4\sqrt{2}$ см | 24 см | Інша відповідь |

18. Визначити відстань від вершини А куба $ABCD_1B_1C_1D_1$ до площини BDB_1D_1 , якщо ребро куба дорівнює $6\sqrt{2}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|------|------|-------|----------------|
| 7 см | 4 см | 6 см | 12 см | $6\sqrt{2}$ см |

19. Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 24 см. Площа бічної грані цієї призми дорівнює 48 см^2 . Обчислити діагональ бічної грані.

| | | | | |
|------|------|-------|-------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 6 см | 8 см | 10 см | 12 см | $6\sqrt{2}$ см |

20. В чотирикутній піраміді всі ребра однакові і дорівнюють $\sqrt{3}$. Знайти об'єм піраміді.

| | | | | |
|--------------|---------------|-------------|---------------|--------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $15\sqrt{3}$ | $3+3\sqrt{3}$ | $2\sqrt{3}$ | $0,5\sqrt{6}$ | $15\sqrt{6}$ |

21. В основі піраміді лежить рівнобедрена трапеція з бічною стороною $12\sqrt{3}$ см і гострим кутом 60° . Всі її бічні грані нахилені до площини основи під кутом 30° . Знайти об'єм піраміді.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| А | Б | В | Г | Д |
| 668 | 846 | 684 | 444 | 648 |

22. Знайти апофему правильної чотирикутної піраміді, якщо площини основи і бічної поверхні цієї піраміді рівні відповідно 36 см^2 і 60 см^2 .

| | | | | |
|-------|-------|------|--------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 15 см | 10 см | 5 см | 2,5 см | Інша відповідь |

23. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро, довжина якого дорівнює a , утворює з площиною основи кут 45° . Знайти площу бічної поверхні цієї піраміді.

| | | | | |
|--------|---------------------------|----------------|--------------------|----------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $2a^2$ | $3a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $a^2 \sqrt{3}$ | $a^2 (1+\sqrt{3})$ | Інша відповідь |

24. Площа сфери дорівнює 8π . Знайти радіус сфери.

| | | | | |
|-------------|---------------|------------|---|------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $2\sqrt{2}$ | $\sqrt[3]{6}$ | $\sqrt{6}$ | 2 | $\sqrt{2}$ |

25. Циліндр вписано в куб. Відомо, що об'єм куба дорівнює 40 см^3 . Обчислити об'єм циліндра.

| | | | | |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 30 см^3 | $10\pi \text{ см}^3$ | $\pi^3 \text{ см}^3$ | $12\pi \text{ см}^3$ | $9\pi \text{ см}^3$ |

26. Два циліндра, радіуси яких відносяться як 2:3, мають рівні об'єми. Знайти відношення площ бічних поверхонь даних циліндрів.

| | | | | |
|----------------|---------------|---------------|---|-----|
| А | Б | В | Г | Д |
| Інша відповідь | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1,5 |

27. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо ребра, довжина якого дорівнює a .

| А | Б | В | Г | Д |
|--------|-----------|------------|------------|------------|
| $4a^3$ | πa^3 | $2\pi a^2$ | $2\pi a^3$ | $4\pi a^3$ |

28. Як зміниться об'єм циліндра, якщо його висоту збільшити в три рази, а радіус основи зменшити в три рази?

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|---------------------|---------------------|----------------------|--------------|
| Зменшиться в 9 раз | Збільшиться в 9 раз | Зменшиться в 3 рази | Збільшиться в 3 рази | Не зміниться |

29. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а об'єм конуса - 9π см³. Знайти твірну конуса.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|---------------|------|-------|----------------|
| $3\sqrt{2}$ см | $\sqrt{8}$ см | 3 см | 10 см | $\sqrt{10}$ см |

30. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні правильного трикутника зі стороною a навколо однієї із його сторін.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| πa^3 | $\frac{\pi a^3}{8}$ | $\frac{3\pi a^3}{8}$ | $\frac{\pi a^3}{4}$ | $\frac{\pi a^3}{12}$ |

31. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см. Знайти площу основи конуса.

| А | Б | В | Г | Д |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 36π см ² | 108π см ² | 144π см ² | 81π см ² | 72π см ² |

32. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| $\frac{4}{3}\pi a^3$ см ³ | $\frac{2}{3}\pi a^3$ см ³ | $\frac{1}{3}\pi a^3$ см ³ | $\frac{1}{6}\pi a^3$ см ³ | $\frac{1}{12}\pi a^3$ см ³ |

33. Об'єми двох сфер відносяться як 64:125. Як відносяться площі їх поверхонь?

| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-------|------|-----|---------|
| 4:5 | 16:25 | 5:16 | 5:8 | 256:625 |

34. Циліндр вписано у куб. Відомо, що об'єм куба 216 см^3 . Знайти об'єм циліндра.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $9\pi \text{ см}^3$ | $27\pi \text{ см}^3$ | $54\pi \text{ см}^3$ | $108\pi \text{ см}^3$ | $216\pi \text{ см}^3$ |

35. Переріз циліндра, який проведено паралельно його осі, знаходиться на відстані 2 см від неї і є квадратом. Площа бічної поверхні циліндра складає $8\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$. Знайти площу перерізу (в см^2).

| А | Б | В | Г | Д |
|-------------|---|-------------|----|-------------|
| $4\sqrt{3}$ | 8 | $6\sqrt{2}$ | 16 | $8\sqrt{6}$ |

36. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого дорівнює a .

| А | Б | В | Г | Д |
|--------|-----------|------------|------------|------------------------|
| $4a^3$ | πa^3 | $2\pi a^3$ | $4\pi a^3$ | $(2+2\sqrt{2})\pi a^3$ |

37. Об'єм конуса дорівнює $100\pi \text{ см}^3$, а радіус основи 5 см . Знайти площу бічної поверхні конуса.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $30\pi \text{ см}^2$ | $45\pi \text{ см}^2$ | $55\pi \text{ см}^2$ | $65\pi \text{ см}^2$ | $75\pi \text{ см}^2$ |

38. Квадрат зі стороною $\sqrt{2}$ обертається навколо діагоналі. Знайти площу поверхні тіла обертання.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|---------------|----------------|------------------|---------------|
| $2\pi\sqrt{3}$ | $\pi\sqrt{6}$ | $2\pi\sqrt{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi\sqrt{2}$ |

39. Твірна конуса дорівнює b і нахилена до площини основи під кутом α . Знайти відстань від центра основи конуса до твірної.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------|-------------------|-------------------|---------------------------|----------------------------|
| $b \sin \alpha$ | $b \sin^2 \alpha$ | $b \cos^2 \alpha$ | $\frac{2b}{\sin 2\alpha}$ | $\frac{b}{2} \sin 2\alpha$ |

40. У конусі твірна нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайти об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює $2\sqrt{3} \text{ см}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| $6\pi \text{ см}^3$ | $4\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$ | $72\pi \text{ см}^3$ | $8\pi \text{ см}^3$ | $24\pi \text{ см}^3$ |

41. Висота конуса дорівнює радіусу основи. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 30° | 45° | 60° | 75° | 90° |

42. Бічне ребро похилої чотирикутної призми дорівнює $2\sqrt{2}$ см і нахилене до площини основи під кутом 45° . Знайдіть довжину проекції бічного ребра на площину основи.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|------|------|---------------|---------------|
| $2\sqrt{2}$ см | 2 см | 1 см | $\sqrt{2}$ см | $\sqrt{3}$ см |

43. Діагоналі ромба дорівнюють 15 см і 20 см. Кульова поверхня дотикається до всіх сторін ромба. Радіус кулі дорівнює 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|------|------|------|------|
| 4 см | 5 см | 8 см | 3 см | 2 см |

3.10.3 Відповіді

Самостійна робота

1. 12. 2. 2,25. 3. 96. 4. 4. 5. 36. 6. 144. 7. 15. 8. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 9. 18.
10. $8\sqrt{3}$. 11. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. 12. 3;3;2. 13. 64. 14. $32\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$. 15. $\frac{32}{9}$.
16. 6π . 17. $16\pi\sqrt{3}$. 18. $24\sqrt{3}$. 19. 156. 20. 2,75. 21. 70. 22. 340. 23. 36. 24.
16. 25. 18. 26. 8. 27. 2. 28. 4. 29. 65. 30. 12. 31. 12. 32. 210. 33. 3. 34. 36.

Тестові завдання

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Г | Д | В | Б | А | А | А | А | Г | Б | В | Б | Б | В | Б | Б | Б | В | В | Г |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| Д | Д | В | Д | Б | Д | Б | В | А | Г | А | Г | Б | В | Б | Б | Г | В | Д | Д |

| | | |
|----|----|----|
| 41 | 42 | 43 |
| Д | Б | В |

Додаток А – Довідковий матеріал

Формули скороченого множення:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Властивості степенів і коренів:

| | | | |
|---|-----------------------------|---|---|
| $a^0 = 1$ | $a^{-1} = \frac{1}{a}$ | $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$ | $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ |
| $a^1 = a$ | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ | $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ |
| $a^2 = a \cdot a$ | $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ | $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ | $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ |
| $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-раз}}$ | $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$ | $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ | $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ |

Арифметична прогресія :

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1); \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} n.$$

Геометрична прогресія

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}; \quad S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1};$$

Сума нескінченно спадної прогресії, при $|q| < 1$, дорівнює $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Властивості логарифмів:

$$\begin{array}{lll} \log_a 1 = 0 & \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c & \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \\ \log_a a = 1 & \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c & \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\ \log_a a^n = n & \log_a b^n = n \cdot \log_a b & \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \\ a^{\log_a b} = b & \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b & \lg b = \log_{10} b \end{array}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ**Основні тригонометричні тотожності:**

$$\begin{array}{lll} \sin^2 x + \cos^2 x = 1; & \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; & \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1; & 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}. \end{array}$$

Формули значень тригонометричних функцій від суми і різниці аргументі:

$$\begin{array}{ll} \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y; & \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}; \\ \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y; & \\ \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y; & \\ \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y; & \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}. \end{array}$$

Формули суми і різниці тригонометричних функцій:

$$\begin{array}{ll} \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; & \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2}; \\ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; & \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \end{array}$$

Формули добутку тригонометричних функцій:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)];$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)];$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)].$$

Формули подвійного аргумента:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Формули половинного аргумента:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Деякі співвідношення:

$$1 \text{ рад} \approx 57^\circ; \quad 1^\circ \approx 0,017 \text{ рад}; \quad \pi = 180^\circ;$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795$$

Співвідношення для обернених тригонометричних функцій:

$$\cos(\arccos x) = x; \quad \arccos(\cos x) = x;$$

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad \arcsin(\sin x) = x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) = x; \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) = x;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x) = x; \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x) = x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x = \frac{\pi}{2};$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{x};$$

Розв'язок тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = a; \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k;$$

$$\cos x = a; \quad \Rightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k;$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} x + \pi k;$$

$$\operatorname{ctg} x = a; \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} x + \pi k;$$

Зокрема

$$\sin x = 0; \quad \Rightarrow \quad x = \pi k;$$

$$\sin x = 1; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\sin x = -1; \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\cos x = 0; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$\cos x = 1; \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi k;$$

$$\cos x = -1; \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi k;$$

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad \Rightarrow \quad x = \pi k;$$

$$\operatorname{ctg} x = 0; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

Таблиця значень основних тригонометричних функцій:

| | | | | | | | | | |
|------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| град | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
| рад | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| $\operatorname{tg} x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| $\operatorname{ctg} x$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |

Властивості логарифмів:

$$\begin{array}{lll}
 \log_a 1 = 0 & \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c & \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \\
 \log_a a = 1 & \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c & \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\
 \log_a a^n = n & \log_a b^n = n \cdot \log_a b & \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \\
 a^{\log_a b} = b & \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b & \lg b = \log_{10} b
 \end{array}$$

Таблиця похідних:

| | |
|---|------------------------------------|
| $C' = 0$ | $(ctg(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$ |
| $x' = 1$ | $(sh(x))' = ch(x)$ |
| $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ | $(ch(x))' = sh(x)$ |
| $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -n \cdot x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$ | $(th(x))' = \frac{1}{ch^2(x)}$ |
| $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $(cth(x))' = \frac{-1}{sh^2(x)}$ |
| $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \frac{-1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n+1}}}$ | $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ |

| | |
|---|--|
| $(e^x)' = e^x$ | $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$ |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\sin(x))' = \cos(x)$ | $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\cos(x))' = -\sin(x)$ | $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $(\operatorname{arcctg}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$ |

Загальні правила диференціювання:

| | |
|--------------------------------------|--|
| $(Cu(x))' = C(u(x))'$ | $(u(x) \cdot v(x))' = (u(x))' \cdot v(x) + u(x) \cdot (v(x))'$ |
| $(u(x) + v(x))' = (u(x))' + (v(x))'$ | $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{(u(x))' \cdot v(x) - u(x) \cdot (v(x))'}{(v(x))^2}$ |
| $(u(x) - v(x))' = (u(x))' - (v(x))'$ | $[f[g(x)]]' = f'(g) \cdot g'(x)$ |

Таблиця невизначених інтегралів:

| | |
|----------------------|--|
| $\int 1 dx = x + C$ | $\int \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$ |
| $\int k dx = kx + C$ | $\int \sqrt[n]{x} dx = \frac{nx^{\frac{n}{n+1}}}{n+1} + C$ |

| | |
|--|--|
| $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $x \neq -1$ | $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}{n-1} + C$ |
| $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ | $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ |
| $\int e^x dx = e^x + C$ | $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C$ |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + C$ |
| $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$ | $\int \operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x) + C$ |
| $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$ | $\int \operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x) + C$ |
| $\int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln \cos(x) + C$ | $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{th}(x) + C$ |
| $\int \operatorname{ctg}(x) dx = \ln \sin(x) + C$ | $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2(x)} = \operatorname{cth}(x) + C$ |
| $\int \frac{dx}{x-a} = \ln x-a + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$ |
| $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2-a^2} + C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2+a^2} + C$ |

Правила інтегрування:

| | |
|---|--|
| $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ | Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то
$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ |
| $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$ | $\int U(x) dV(x) = U(x) \cdot V(x) - \int V(x) dU(x)$ |

ГЕОМЕТРІЯ**Прямокутний трикутник:**

Теорема Піфагора: $a^2 + b^2 = c^2$;

$\alpha + \beta = 90^\circ$;

$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$;

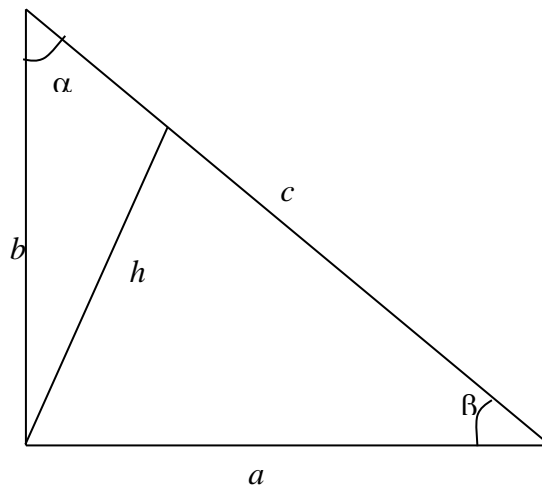
$b = c \cdot \sin \beta = c \cdot \cos \alpha = a \cdot \operatorname{tg} \beta = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$;

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\sin \beta = \frac{b}{c}$; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\cos \beta = \frac{a}{c}$;

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$;

Площа трикутника: $S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$;



Довільний трикутник:

Теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$; $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos \alpha$;

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta;$$

Теорема синусів: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$;

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ;$$

Площа трикутника: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin \beta$;

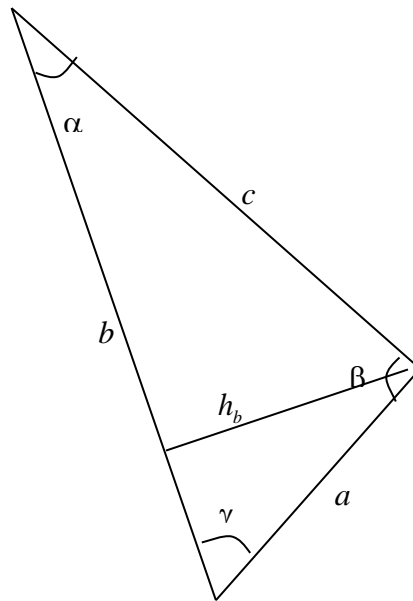
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c;$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – напівпериметр.

Зв'язок площі трикутника з радіусами вписаного і описаного кола:

$$S = r \cdot p = \frac{abc}{4R};$$



Чотирикутники:

Площа трапеції:

$$S = \frac{a+b}{2}h. \quad \text{Тут } a, b \text{ – довжини основ; } h \text{ – висота.}$$

Площа паралелограма: $S = a \cdot b \cdot \sin \gamma$.Тут a, b – сторони, γ – кут між ними.Площа ромба: $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$. Тут d_1, d_2 – діагоналі ромба.

Площа довільного чотирикутника:

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \gamma.$$

Тут d_1, d_2 – діагоналі чотирикутника, γ – кут між ними.**Многокутники:**Кут правильного многокутника: $\alpha_n = \frac{n-2}{n}180^\circ$.Площа правильного n-кутника: $S = \frac{1}{2}P \cdot r$.Тут P – периметр многокутника, а r – радіус вписаного кола.Сторона правильного многокутника дорівнює: $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Радіуси вписаного і описаного кіл пов'язані співвідношенням:

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Коло і круг:Площа кола: $S = \pi \cdot R^2$.Довжина кола: $L = 2 \cdot \pi \cdot R$.Довжина дуги кола з кутом α : $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

Площа сектора з кутом α : $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.

Куб :

Об'єм куба зі стороною a : $V = a^3$.

Площа повної поверхні куба: $S = 6a^2$.

Призма:

Об'єм призми (або паралелепіпеда): $V = S \cdot h$.

Піраміда :

Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S \cdot h$.

Циліндр:

Об'єм циліндра: $V = S \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$;

Площа бічної поверхні циліндра: $S_{\sigma} = 2\pi \cdot R \cdot h$;

Площа повної поверхні циліндра: $S = 2\pi \cdot R \cdot (R + h)$.

Конус :

Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h$;

Площа бічної поверхні конуса: $S_{\sigma} = \pi \cdot R \cdot L$;

Площа повної поверхні конуса: $S = \pi \cdot R \cdot (R + L)$.

Тут R – радіус основи, h – висота, L – твірна .

Сфера і куля:

Площа сфери: $S = 4\pi R^2$.

Об'єм кулі: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Координати вектора, з початком у точці $A(x_1; y_1)$ і кінцем у точці $B(x_2; y_2)$, рівні різницям координат кінця і початку, тобто $\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Координати середини відрізка АВ, з кінцями у точках $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, дорівнюють: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Довжина вектора $\vec{a}(x; y)$ обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ виражається формулою

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: Книга для вчителя. – К.: Рад. шк., 1991. – 128 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра: Підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. — К.: Освіта, 2004.
3. Бевз Г.П. Алгебра: Підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. , — К.: Освіта, 2006.
4. Бевз Г.П. та інші. Геометрія: Підручник для 7-9 кл. загальноосвіт.навч. закл., —К.:Вежа,2004.
5. Бевз Г.П. та інші. Геометрія: Підручник для 10-11 кл. . загальноосвіт. навч. закл. , — К.: Вежа, 2004
6. Боравльов А.П., Ленчук І.Г. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову. –К.: Вища школа, 2002. – 243 с.
7. Бурда М.І. Розв'язання задач на побудову в 6-8 класах. – К.: Рад. школа, 1986. – 110 с.
8. Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Карташов М. В., Михайловський В. І., Призва Г. Й., Ядренко М. Й. Українські математичні олімпіади. – К.: Вища шк., 1993. – 321 с.
9. Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловський В. І., Ядренко М. Й. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. –К.: Либідь, 1993. – 157 с.
10. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: ТВіМС, 2000. – 163 с.
11. Горнштейн П.І., Полонський В.Б., Якір М.С. Задачі з параметрами. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 256 с.
12. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. І. Функції однієї змінної. – К.: Вища школа, 1990. – 383 с.
13. Дороговцев А. Я., Ядренко М. Й. Метод координат. – К.: Вища школа, 1972. – 84 с.
14. Завало С.Т. Арифметика, алгебра і початки аналізу. – К.: Радянська школа, 1969. – 504 с.
15. Захарійченко О.В., Школьнік Ю.В. Математика: збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання: 2-е видання випр. і допов. — К.: Генеза, 2009.

16. Збірник задач з математики для вступників до вузів /За ред. М.І. Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.
17. Збірник конкурсних задач з математики /Ш.Г. Горделадзе, М.М. Кухарчук, Ф.П. Яремчук. – К.: Вища школа, 1988. – 328 с.
18. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів /За заг. ред. В.В. Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 196 с.
19. Капіносов А.М., Білоусова Г.І., Гап'юк Г.В., Мартинюк С.В., Олійник Л.І., Ульшин П.І., Чиж О.Й. Математика: Посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2013.; -416с.
20. Конет І. М., Паньков В. Г., Радченко В. М., Теплінський Ю. В. Обласні математичні олімпіади. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 184 с.
21. Кругликов А.В., Плакса С.А. Сборник заданий для довузовской подготовки по математике. – К.: НТУУ “КПІ”, 1999. –232 с.
22. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994. – 134 с.
23. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Львів: Євросвіт, 1999. – 255 с.
24. Мальцева Н.О., Роева Т.Г. Геометрія. 50 тижнів до ЗНО.- Вид.2-ге, випр. – Х.: ТОВ «Українська книжкова мережа», 2011.-240с.
25. Мальцева Н.О., Роева Т.Г. Алгебра. Готуємось до зовнішнього незалежного оцінювання. – Х.: ТОВ «Українська книжкова мережа», 2010.- 304с.
26. Математика в поняттях, означеннях і термінах: В 2 т. /О.В. Мантуров та ін. – К.: Рад. школа, 1986. – Т. 2: М – Я. – 360 с.
27. Михайловський В.І., Ядренко М.Й., Призва Г.Й., Вишенський В.А. Збірник задач республіканських математичних олімпіад. – 4-е вид. перероб і допов. Київ: Вища школа, 1979. – 264 с.
28. Мурашківська В.П., Руновська Л.А. Геометрія. Збірник задач для слухачів підготовчих курсів. – Чернігів:ЧНТУ, 2014.- 105с.
29. Нелін С.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Х.: Світ дитинства, 2005.
30. Нелін С.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Х.: Світ дитинства, 2004.

31. Нестеренко А.М., Тарасенкова Н.А., Ситник О.О. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи: Практикум для організації самостійної довузівської підготовки /За ред. Н.А. Тарасенкової. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 203 с.
32. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7-9 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Школяр, 2004.
33. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. шкiл.—К.: Освіта, 1994.
34. Практикум з розв'язування задач з математики. За ред. В.І. Михайловського – Київ, 1975. – 424 с.
35. Репета В.К. , Клешня Н.О., Репета Л.А. Задачі з параметрами: Посібник для абітурієнтів та старшокласників. – К.: КМУЦА, 2000. – 120 с.
36. Сарана О.А., Ясінський В.В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ „КПІ”. – К.: НТУУ „КПІ”, 2005. – 260 с.
37. Сарана О.А., Семенець С.П. Нестандартні геометричні задачі. Навчально-методичний посібник. – Житомир. – Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2007. – 150 с.
38. Шкiль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — К.: Зодіак — ЕКО, 2003.
39. Шкiль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К.: Зодіак — ЕКО, 2002.
40. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця: Вінницький пед. ун-т, 1998. – 212 с.

Додаткова література

1. Агеєва О.М., Гохкаленко І.К., Методичні вказівки з математики для абітурієнтів. — Чернігiв, ЧДТУ, 2001. — 102с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатiн О.К. Теорія ймовiностей та математична статистика. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 428 с.
3. Бєвз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посiб. Для студентiв фіз.-мат. ф-тiв педуніверситетiв. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

4. Бородін О.І. Історія розвитку поняття про число і системи числення. – 3-є вид. перероб. і доп. – К.: Рад. шк., 1978. – 103 с.
5. Бугай А.С. Короткий тлумачний математичний словник. – К.: Рад. школа, 1964. – 428 с.
6. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
7. Завдання з математики для екзаменів за курс спеціалізованих фізико-математичних шкіл, ліцеїв і гімназій. – К: Освіта, 1994. – 75 с.
8. Істер О. С. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. – Харків: ТО “Гімназія”, НМЦ “Світ дитинства”, 1999. – 184 с.
9. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.: Рад.школа, 1981. – 189 с.
10. Конфорович А.Г. Математика служить людині: Для ст. шк. віку. – К.: Рад. школа, 1984. – 250 с.
11. Математика. Комплексне видання: Аналіз найпоширеніших помилок. Типові тестові завдання. Довідник з математики. 5- 11 класи/ О.С. Будна, С.М. Будна, А.Р. Гальперина, М.Я. Забелишинська, Ю.О. Захарійченко, О.М. Роганін, О.В. Шкільний.- 3 те вид., пеерероб. І доп. – К.: «Літера ЛТД», 2011. – 288с.
12. Програма GRAN 1 для вивчення математики в школі й вузі: Методичні рекомендації /Укл. М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко. – К.: КДПІ, 1992. – 48 с.
13. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Методичний посібник для вчителів математики, учнів та студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. – Житомир, 1999. – 134 с.
14. Українські математичні олімпіади: Довідник /В.А. Вишенський та ін. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
15. Федак І. В. Розв'язування рівнянь. Доведення нерівностей. Посібник для підготовки до математичних олімпіад: Бібліотечка заочної математичної школи. – Тернопіль, 1997. – 143 с.
16. Хацет Б. І., Ушаков Р. П. Опуклі функції та нерівності. – К.: Вища шк., 1986. – 121 с.
17. Хромой Я.В. Збірник вправ і задач з математичної логіки. К.: Вища школа, 1978. – 160 с.
18. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле: Бібліотечка фізико-математичної школи. – К.: Вища шк., 1985. – 57 с.