МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія.

Методичні вказівки до практичних занять
для студентів галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво»
за напрямами підготовки
6.030505 «Управління персоналом і економіка праці»,
6.030507 «Маркетинг»

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри математичного моделювання
та інформаційної безпеки
протокол № 4 від 03.11.2015 р.

Чернігів ЧНТУ 2015

Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія. Методичні вказівки до практичних занять для студентів галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво» за напрямами підготовки 6.030505 «Управління персоналом і економіка праці», 6.030507 «Маркетинг»/ Укл.: Ткач Ю.М.- Чернігів: ЧНТУ, 2015. - 56 с.

Укладач: Ткач Юлія Миколаївна, кандидат педагогічних наук, доцент

Відповідальний за випуск: Ткач Юлія Миколаївна, завідувач кафедри математичного моделювання та інформаційної безпеки, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: Гур'єв В.І., кандидат технічних наук, професор кафедри математичного моделювання та інформаційної безпеки Чернігівського національного технологічного університету, доцент

ВСТУП

Математика є основою усіх галузей сучасної науки і технології. Знання з вищої математики знадобляться як для подальшого глибокого засвоєння багатьох базових та професійно орієнтованих дисциплін, так і для застосування їх у практичній діяльності.

Якісна математична освіта надає майбутнім економістам можливість не тільки досліджувати, аналізувати та прогнозувати складні процеси, що відбуваються в різних галузях народного господарства, але й завдяки сучасним комп'ютерним технологіям кількісно їх розраховувати та приймати обґрунтовані логічно несуперечливі рішення як на мікро- так і на макрорівні.

Таким чином, оволодіння основами математичних методів, засвоєння певного рівня загальної математичної культури є в сучасних умовах важливою умовою підготовки спеціалістів практично будь-якої галузі.

Методичні вказівки до практичних з дисципліни «Вища математика» розроблений у відповідності до робочої програми з вищої математики за напрямами підготовки 6.030505 «Управління персоналом і економіка праці», 6.030507 «Маркетинг», а також може бути використана для інших напрямів підготовки галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво».

У методичних вказівках міститься навчальний матеріал двох змістових модулів програми «Вищої математики»: лінійна алгебра, векторна алгебра та аналітична геометрія. Кожен розділ містить до кожної теми короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування типових задач, завдання для самостійної роботи, питання для самоконтролю та до всієї дисципліни список рекомендованої літератури.

Ця методична розробка може бути використана як викладачами так і студентами.

ПРОГРАМА

Програма вивчення нормативної навчальної дисципліни "Вища математика" складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр» *напрямів підготовки 6.030505 «Управління персоналом та економіка праці».*

Предметом вивчення дисципліни "Вища математика" є загальні математичні властивості та закономірності.

Міждисциплінарні зв'язки: вивчення дисципліни "Вища математика" ґрунтується на знаннях, одержаних студентами при вивченні алгебри та геометрії в курсі середньої загальноосвітньої школи. "Вища математика" є базовою дисципліною для подальшого вивчення практично всіх дисциплін циклів природничо-наукової та професійної підготовки.

Програма дисципліни "Вища математика" складається з таких розділів:
1. Мета та завдання дисципліни
2. Зміст дисципліни
3. Список рекомендованої літератури

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни *"Вища математика*" є є формування у майбутніх економістів базових математичних знань для розв'язування задач у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач.

1.2.Основними завданнями вивчення дисципліни "*Вища математика*" є

- надання студентам знань з основних розділів вищої математики;
- підготовка студентів до вивчення загальноекономічних та спеціальних дисциплін;
- розвиток у студентів навичок використання математичних методів дослідженнях під час підготовки курсових та дипломних робіт;
- підготовка студентів до науково-дослідної роботи, розробка та аналіз економіко-математичних моделей, застосування математичних методів під час розв'язання конкретних завдань галузі.

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати :
- основні поняття і факти вищої математики;
- методи математичних досліджень природних, соціальних та технічних явищ;
- області застосування основних математичних понять та фактів.

вміти :
- для тих чи інших наукових, природничих, технічних, соціальних задач підбирати відповідний математичний метод;

- опрацьовувати математичні моделі, які є істотними в майбутній фаховій діяльності.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 210 годин/7 кредити ECTS.

2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 1. Елементи теорії матриць і визначників.

Поняття «визначник». Визначник 2-го, 3-го порядку. Інверсія та визначник n-го порядку. Правило трикутника. Правило Сарруса. Перестановки. Властивості визначника. Обчислення визначника різними способами.

Поняття мінора та алгебраїчного доповнення. Теорема Лапласа. Застосування теореми Лапласа для обчислення визначників вище 3-го порядку.

Тема 2. Матриці та дії над ними.

Основні відомості про матриці. Лінійні операції над матрицями. Добуток матриць. Властивості операцій з матрицями. Піднесення матриць до степеня. Транспонування матриць. Обернена матриця та порядок її відшукання. Алгоритм знаходження оберненої матриці за допомогою приєднаної матриці.

Поняття про ранг матриці. Елементарні перетворення матриці. Метод зведення до східчастої матриці. Метод обвідних мінорів. Алгоритм знаходження рангу матриці методом обвідних мінорів.

Тема 3. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Елементи матричного аналізу

Системи m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера-Капелі. Основні поняття та означення. Дослідження сумісності лінійної системи за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. Матричне розв’язання систем лінійних рівнянь. Розв’язування квадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою визначників (метод Крамера).

Довільна система лінійних рівнянь. Загальний та частинний розв’язок довільної неоднородної системи. Розв’язування довільної системи лінійних рівнянь методом Гаусса. Метод Жордана-Гаусса. Система лінійних однорідних рівнянь.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕМЕТРИЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Елементи векторної алгебри

Загальні поняття та означення вектора. Операції з векторами. Лінійна залежність і незалежність векторів. Векторний базис. Розкладання довільного вектора за векторним базисом. Проекція вектора на вісь, координати вектора. Основні властивості проекцій векторів. Прямокутна декартова система координат. Довжина вектора в координатній формі. Напрямні косинуси вектора.

Скалярний добуток двох векторів. Основні властивості скалярного добутку. Скалярний добуток векторів у координатній формі. Кут між двома векторами. Умова взаємної перпендикулярності двох векторів. Означення векторного добутку. Основні властивості векторного добутку. Застосування векторного добутку.

Тема 2. Елементи аналітичної геометрії

Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Поняття рівняння лінії на площині. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку в даному напрямі. Канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої у відрізках.

Загальне рівняння прямої. Дослідження загального рівняння прямої. Взаємне розміщення двох прямих(перетин двох прямих, кут між прямими, умова паралельності прямих, умова перпендикулярності двох прямих, відстань від точки до прямої). Параметричні рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої.

Загальне рівняння лінії ІІ-го порядку. Рівняння кола. Знаходження центра та радіуса кола за загальним рівнянням. Еліпс, його рівняння та характеристична властивість.

Загальне рівняння лінії ІІ-го порядку. Гіпербола, її рівняння. Асимптоти гіперболи. Парабола, її рівняння та характеристична властивість

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 1. Функція

Означення функції, способи їх задання, області визначення та значень. Парність, непарність, монотонність, періодичність, обмеженість функцій. Клас основних елементарних функцій та їх властивості.

Тема 2. Границя послідовності та функції

Послідовність, як функція натурального аргументу. Основні типи послідовностей. Поняття границі послідовності. Поняття границі функції дійсного аргументу в точці і на нескінченності. Нескінченно великі і нескінченно малі та їх властивості. Основна теорема теорії границь. Арифметичні дії над границями відображень. Перша "золота" границя. Друга "золота" границя у випадку неперервного аргументу. Основні типи невизначеностей та прийоми їх розкриття. Класифікація нескінченно малих та використання еквівалентних нескінченно малих для обчислення границь.

Тема 3. Неперервність функції

Незалежність границі функції в точці від способу прямування аргументу то даної точки. Поняття неперервності функції в точці. Точки розриву та їх класифікація. Перша і друга теореми Вейєрштрасса. Теорема про проміжні значення функції, неперервної на сегменті.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 1. Похідна. Основні правила диференціювання

Задачі про рівняння дотичної та нормалі плоскої кривої. Поняття похідної функцій. Функції диференційовні в точці та їх неперервність. Теорема про існування похідних диференційовних функцій. Необхідна і достатня умова диференційовності функцій. Геометричний зміст похідної функції.

Похідна алгебраїчної суми, добутку, частки. Таблиця похідних. Похідна складної функції. Диференціал функції**,** його формула та інваріантність форми.

Тема 2. Основні теореми диференціального числення

Теореми: Ролля, Ферма, Лагранжа, Коші, їх геометричний зміст. Правило Лопіталя та прийоми його застосування при розкритті різних типів невизначеностей.

Тема.3 Застосування диференціального числення до дослідження функцій

Монотонність диференційовної функції та її необхідна і достатня умова. Правило дослідження функції на монотонність. Поняття екстремуму функції, необхідна умова екстремуму. Достатня умова екстремуму. Перше правило дослідження на екстремум. Друге правило дослідження на екстремум. Найбільше та найменше значення функції на відрізку та їх відшукання. Опуклість та вгнутість графіка, точки перегину. Дослідження функції на опуклість та вгнутість графіка і точки перегину. Асимптоти графіка та їх відшукання. Повне дослідження функції та побудова її графіка.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 1. Поняття функції багатьох змінних, границя, неперервність

Означення функції багатьох змінних. Області визначення та значень. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції багатьох змінних.

Тема 2. Частинні похідні та диференціал функції багатьох змінних

Поняття частинної похідної функції n змінних. Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал. Похідні складеної функції. Неявно задана функція та її похідна. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні. Частинні похідні та диференціали вищих порядків та техніка їх знаходження.

Тема 3. Екстремуми функції багатьох змінних

Поняття екстремуму функції n змінних, необхідні умови його наявності. Достатні умови екстремуму функції n змінних. Найбільше і найменше значення функції n змінних на обмеженій області та його відшукання. Метод найменших квадратів.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 1. Невизначений інтеграл

Основні поняття теорії невизначеного інтеграла. Поняття первісної та її неєдиність. Теорема про різницю двох первісних даної функції. Невизначений інтеграл та його властивості. Задача невизначеного інтегрування, як задача, обернена до задачі знаходження диференціала функції. Таблиця інтегралів.

Тема 2. Основні методи інтегрування

Заміна змінної та інтегрування частинами, випадки їх застосування. Тригонометричні підстановки та випадки їх застосування.

Тема 3. Визначений інтеграл

Основні задачі та поняття теорії визначеного інтеграла. Задача про площу криволінійної трапеції та її розв'язання. Поняття визначеного інтегралу, його існування та властивості. Теорема про середнє значення функції та її геометричний зміст. Обчислення визначеного інтеґрала. Основна теорема інтеґрального числення. Формула Ньютона-Лейбниця. Заміна змінної та інтеґрування частинами у визначеному інтегралі**.**

Тема 4. Застосування визначеного інтеграла

Застосування визначеного інтеґрала до обчислення площ фіґур на декартовій площині, до обчислення площ фіґур в полярній системі координат, до обчислення довжин ліній, до обчислення об’ємів тіл обертання, до обчислення площ поверхонь обертання. Застосування до різноманітних задач економічного змісту**.**

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 7. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ

Тема 1. Економічна динаміка та її моделювання: диференціальні та різницеві рівняння

Диференціальні рівняння першого порядку.

Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Основні поняття диференціальних рівнянь 1-го порядку. Теорема Коші. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння.

Диференціальні рівняння 2-го порядку, які дають змогу знижувати порядок.

Тема 2. Ряди та їх застосування

Числовий ряд та його збіжність. Необхідна ознака збіжності. Достатні ознаки збіжності числових рядів.

Поняття функціонального ряду. Степеневий ряд. Використання рядів до наближених обчислень.

3. Рекомендована література

1. 1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М.: Наука, 1980. - 336 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексной переменной. - М.: Наука, 1981. - 464 с.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Элементы линей-ной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1980. - 224 с.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973. - 366 с.
5. *Высшая* математика. Сборник задач / Под ред. П. Ф. Овчинникова. - М.: ВШ, 1991. - 455 с.
6. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: ВШ, 1979. - 400 с.
7. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ВШ, 1977, 1999. - 480 с.
8. *Гусак А. А.* Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. - Минск.: ВШ., 1988. - Ч. 1. - 248 с. - Ч. 2. - 232 с.
9. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. В 3 ч. - Ч.1. Функції однієї змінноі. - К.: ВШ, 1990. - 384 с. - Ч.2. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. - К.: ВШ, 1991. - 368 с. - Ч.3. Теорія функцій дійсної та комплексної змінноі. - К.: ВШ, 1991. - 350 с.
10. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. - М.: ВШ, 1980. - Ч. 1. - 320 с. - Ч. 2. - 365 с.
11. *Ефимов Н. В.* Математический анализ. Специальные разделы. - М.: ВШ, 1980. - 356 с.
12. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика. В 5 ч. - Минск.: ВШ. - Ч. 1. - 1984. - 223 с. - Ч. 2. - 1985. - 221 с. - Ч. 3. - 1986. - 208 с. - Ч. 4. - 1988. - 240 с. - Ч. 5. - 1988. - 253 с.
13. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. - М.: ВШ, 1970. - 712 с.
14. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). - М.: ВШ, 1983. - 175 с.
15. *Мармоза А .Т.* Практикум по математической статистике. - К.: ВШ, 1990. - 190 с.
16. *Михайленко В. М., Федоренко Н. Д.* Спеціальні розділи математики. - К.: ВШ, 1992. - 216 с.
17. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. М.:

Наука, 1985. - Т. 1. - 432 с. - Т. 2. - 560 с.

18. *Сборник* задач по математике для втузов / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича . В 2 ч. - М.: ВШ, 1981. - Ч. 1. - 464 с. - Ч. 2. - 367 с.
19. *Сборник* индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч / Под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск.: Выш. шк. - Ч. 1. - 1990. - 270 с. - Ч. 2. - 1991. - 352 с.
20. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.
21. *Фарлоу С. Дж.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. - М., Мир, 1985. - 383 с.
22. *Чудесенко В. Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). - М., ВШ, 1983. - 112 с.
23. *Шкіль М. І, Колесник Т. В.* Вища математика. В 3 т. - К., Либідь, 1994. - Т. 1. - 280 с. - Т. 2. - 352 с. - Т. 3. - 352 с.
24. An Introduction to Higher Mathematics / Patrick Keef, David Guichard, Russ Gordon. - Whitman College, 2010. – 144 p.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 ВИЗНАЧНИКИ

Мета: формувати уміння та навички обчислювати визначники різних порядків, застосовувати правило трикутника, правило Сарруса, теорему Лапласа, записувати мінори різних порядків та алгебраїчні доповнення до будь-якого елемента визначника.

Короткі теоретичні відомості

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів.

$$\Delta(A)=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення. *Визначником* **n**-*го порядку квадратної числової матриці* ***A*** *порядку* **n** називають число, яке знаходиться з *елементів матриці* ***A*** *за певним правилом і позначають* |***A***|, *або* Δ, *або* $\det A$.

Правило знаходження визначника 2 порядку: визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

Правила знаходження визначника 3-го порядку

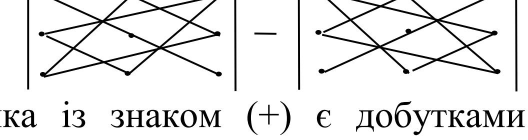
Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило трикутника

Для запам’ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему:



Три перших доданка із знаком (+) є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі. Три останні доданки у правій частині (5) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників із основами паралельними неголовній діагоналі

Правило Сарруса

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Властивості визначників:

1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число С, то й визначник помножиться на С.

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число.

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має n рядків і n стовпців.

Мінором M_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* n*-го порядку називається визначник* $(n-1)$ *порядку, який одержуємо з визначника* $|A|$ *шляхом викреслювання* i*-го рядка та* j*-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент* a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком* $(-1)^{i+j}$*, тобто* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Обчислення визначників n-го порядку

Означення. Визначником n-го порядку називається число Δ, яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема Лапласа. *Визначник **n-го** порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.*

У випадку використання ***i-го*** рядка це правило математично можна записати так

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{ik} \cdot A_{ik} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Зауважимо, що **сума добутків елементів рядка або стовпця визначника *n*-го порядку на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка або стовпця цього самого визначника дорівнює нулю.**

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити визначник за правилом трикутників:

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-(-4) \cdot 1 \cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Приклад 2. Обчислити визначник за правилом Сарруса:

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\Bigg| = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0(-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 -$$

$$-(-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

Приклад 3.Утворити та обчислити мінор M_{12} для визначника Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Цей мінор утворено шляхом викреслення першого рядка та другого стовбця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Приклад 4. Обчислити визначник за теоремою Лапласа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначник матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

2. Побудувати всі можливі мінори другого порядку визначника запронованого нижче. Скільки таких мінорів?

Записати алгебраїчне доповнення до елементів A_{23}, A_{42}, A_{54}.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

Питання для самоконтролю

1. Назвіть методи обчислення визначника третього порядку?
2. Сформулюйте теорму Лапласа.
3. Назвіть властивості визначників.
4. Запишіть формулу алгебраїчного доповнення та що таке мінор?

1.2 МАТРИЦІ ТА ЇХ ВИДИ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

Мета: формувати уміння та навички здійснювати різні дії з матрицями (додавання, віднімання, множення на число, множення матриці на матрицю), транспонувати матрицю, знаходити обернену матрицю до заданої, визначати ранг матриці.

Короткі теоретичні відомості

Означення. *Матрицею називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в* ***m*** *рядках та* ***n*** *стовпцях.*

Матриця, яка має ***m*** рядків та ***n*** стовпців, називається матрицею розміру ***m×n*** (перший множник завжди вказує кількість рядків). Така матриця має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця розміру $\boldsymbol{m\times 1}$ називається матрицею - стовпцем або ***вектором-стовпцем***. Матриця розміру $\boldsymbol{1\times n}$ називається матрицею - рядком або ***вектором-рядком***.

Якщо в матриці ***A*** рядки записати стовпцями із збереженням їх нумерації, то одержана матриця зветься **транспонованою** і позначається $A^{т}$, а вказана операція перетворення матриці ***A*** називається **транспонуванням матриці A**.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad A^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} .$$

Дві матриці ***рівні між собою***, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Матриці бувають кількох видів:

1) матриця-рядок – матриця, яка складається з одного рядка:

$$A=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}).$$

2) матриця-стовпець – матриця, яка складається з одного стовпця:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

3) діагональна матриця – квадратна матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, крім елементів головної діагоналі:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) трикутна матриця – квадратна матриця, у якої під (над) головною діагоналлю усі елементи дорівнюють нулю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5) одинична матриця (загальновживане позначення E) – діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6) нуль-матриця – матриця будь-якого розміру, у якої усі елементи дорівнюють нулю.

7) східчаста матриця – прямокутна матриця, яка має вигляд:

$$A_{r\times k}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \dots & a_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

де $r \le k$.

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається ***неособливою***, або ***невиродженою***. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця ***особлива***, або ***вироджена.***

Дії з матрицями

Найпростішими діями з матрицями називають *множення матриці на число, їх додавання та віднімання, множення матриць.*

Добутком матриці А на число k називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці ***А*** та числа k:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць А та В однакового розміру $\boldsymbol{m \times n}$ називається матриця ***С*** розміру $\boldsymbol{m \times n}$, елементи якої $\boldsymbol{c_{ij}}$ дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі елементів $\boldsymbol{a_{ij}}$ та $\boldsymbol{b_{ij}}$ матриць ***А*** та ***В***, тобто

$$A \pm B = C = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для знаходження добутку ***AB*** *матриць* ***A*** *та* ***B*** *необхідно, щоб кількість стовпців матриці* ***A*** *(першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці* ***B*** *(другого множника).*

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} .$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB \neq BA$.

Ранг матриці

Якщо $rang A = r \leq \min(m, n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

Рангом *матриці називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.*

Ранг матриці позначають ***r(A)*** або $\boldsymbol{r_A}$ або просто ***r***. Ранг матриці можна знаходити методом обвідних мінорів.

Елементарні перетворення матриці не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи — нулі. Тоді *ранг матриці дорівнює* кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** *A*, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема. *Будь-яка невироджена квадратна матриця має єдину обернену до неї матрицю.*

Обернену матрицю A^{-1} до матриці ***A*** можна знаходити за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & a_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де $\boldsymbol{A_{ij}}$ — алгебраїчні доповнення елементів $\boldsymbol{a_{ij}}$ матриці $\boldsymbol{A}$, (алгебраїчні доповнення до *і-го* рядка розташовані у $\boldsymbol{i}$ стовпці, ($\boldsymbol{i}$= 1, 2, ..., $\boldsymbol{n}$).

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити матрицю $D=3A-4B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$:

Розв'язання

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 21 & 0 & 12 \end{pmatrix},\ 4B=\begin{pmatrix} -4 & 36 & 0 \\ 8 & 16 & -32 \end{pmatrix},\ D=3A-4B=\begin{pmatrix} 10 & -33 & -9 \\ 13 & -16 & 44 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити матрицю $D=AB$, якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2,3} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3,2}$$

Число стовпців матриці А дорівнює числу рядків матриці В.

$D=AB=\left(d_{ij}\right)_{2,2}$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\cdot(1)+(-1)\cdot 2+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+(-1)\cdot 0+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot 2+(-2)\cdot(-1) & 3\cdot 2+4\cdot 0+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Приклад 3. Знайти суму матриць.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти суму $2A+5B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$2A=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 8 & 2\end{pmatrix},\quad 5B=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 5 & -10\end{pmatrix},\quad 2A+5B=\begin{pmatrix}16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти добуток матриць AB та BA,

якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1\\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0 & 7\\ 16 & 10 & 4\\ 13 & 5 & 7\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+3\cdot2+1\cdot1\\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3\\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Знайти значення матричного многочлена $2A^2+3A+5E$ при $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, якщо Е-одинична матриця третього порядка.

Розв'язання

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6 & 5\\ 8 & 11 & 6\\ 9 & 8 & 10\end{pmatrix},\quad 2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix},$$

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix},\quad 5E=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad 2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}.$$

Приклад 8. Транспонувати матрицю

Розв'язання

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&0&8\\-1&7&3\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}2&4&-1\\3&0&7\\1&8&3\end{pmatrix}.$$

Приклад 9. Обчислити ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&2&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Для матриці $A_{3,4}r(A)\le\min(3;4)=3$.

Перевіримо, чи дорівнює ранг 3-м, для цього обчислимо всі мінори третього порядку, т.е. определители всіх подматриць третього порядку (їх всього 4, вони получаються при викреслюванні одного із стовпців матриці):

$$\begin{vmatrix}3&0&4\\2&0&1\\-1&0&3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&0&4\\3&0&1\\2&0&3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&3&4\\3&2&1\\2&-1&-3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&3&0\\3&2&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=0.$$

Оскільки, всі мінори третього порядку нульові , $r(A)\le 2.$ Так як існує нульовий мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}=-7\ne 0,$ то $r(A)=2.$

У загальному випадку визначення ранг матриці перебором всіх мінорів досить трудомістко. Для полегшення цієї задачі використовують перетворення, що зберігає ранг матриці.

Приклад 10. Знайти ранг матриці *A* методом обвідних мінорів, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix}2&-4\\1&-2\end{vmatrix}=0$. Проте матриця *A* має й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix}-4&3\\-2&1\end{vmatrix}\ne 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=1\ne 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix}2&-4&3&1\\1&-2&1&-4\\0&1&-1&3\\4&-7&4&-4\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}2&-4&3&0\\1&-2&1&2\\0&1&-1&1\\4&-7&4&5\end{vmatrix}=0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

Приклад 11. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці.

Поміняємо місцями перший і другий стовпці:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ 1 & -3 & -4 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix}.$$

За аналогією до того, як під час обчислення визначників утворювали нулі в рядках або стовпцях, утворимо нулі в першому стовпці. З цією метою всі елементи першого рядка спочатку помножимо на –4 і додамо до другого рядка, потім — на –1 і додамо до третього рядка і нарешті помножимо на 2 і додамо до четвертого рядка. У результаті дістанемо матрицю, яку записано другою. Помноживши тепер елементи першого стовпця послідовно на –2, –1, –3 і виконавши відповідне додавання, дістанемо останню матрицю в ланцюжку перетворень.

Помноживши другий рядок здобутої матриці на $-\frac{1}{9}$, третій — на $-\frac{1}{5}$, четвертий — на $-\frac{1}{3}$, дістанемо:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Виконаємо знову елементарні перетворення, аналогічні наведеним у п. 2, але візьмемо другий рядок і другий стовпець матриці.

З остаточного вигляду матриці після виконання елементарних перетворень випливає, що її ранг дорівнює 2, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.

Приклад 12. Знайти матрицю, обернену матриці: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Знайдемо визначник даної матриці: $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=33\neq 0$, виходить обернена матриця існує. Алгебраїчні доповнення елементів матриці *A:*

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-16;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=9$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=31;\ A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=9$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=11;\ A_{32}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0;\ A_{35}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}=11.$$

Одержимо: $A^{-1}=\dfrac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$

Перевірка: $AA^{-1}=\dfrac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Аналогічно, $A^{-1}A=E$.

Приклад 13. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

Розв’язання

Обчислимо:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5.$$

$\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти добуток матриць A та B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

2. Задана матриця A: $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Знайти матрицю A^{-1} та встановити, що $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

3. Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -4 & 5 & 5\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

4. Знайти ранг матриці A (методом елементарних перетворень або обвідних мінорів):

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7 & 11\\ 5 & 1 & 3 & 11\end{pmatrix}.$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення матриці.
2. Які лінійні операції можна виконувати з матрицями?
3. Що являє собою операція транспонування матриці?
4. Що таке ранг матриці?
5. Назвіть алгоритм оберненої матриці.

1.3 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Мета: формувати уміння та навички розв'язувати системи лінійних рівнянь різними способами (за допомогою формул Крамера, метода Гаусс, матричним методом), встановлювати чи сумісна система.

Короткі теоретичні відомості

Різновиди систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система алгебраїчних рівнянь називається **лінійною**, якщо вона може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{ki}x_i + \ldots + a_{kn}x_n + b_k \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

де $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ - невідомі; $\boldsymbol{a_{ij}}$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами системи (індекс **i** вказує рівняння, а індекс **j** невідоме, при якому записано цей коефіцієнт); $\mathbf{b_k}$ **(k =1, 2,…, m)** – вільні (від невідомих) члени або їх називають правими частинами рівнянь.

Якщо $\mathbf{b_k = 0}$ для усіх **k = 1,2, …, m**, тоді систему називають **однорідною**. Якщо хоч би один вільний член $\mathbf{b_k}$ не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається **неоднорідною.**

Розв'язком системи (2.1) називається множина дійсних чисел $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$, підстановка яких у систему замість невідомих $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, перетворює кожне рівняння системи у тотожність (іноді кажуть, що ця множина задовольняє систему рівнянь).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що має хоч би один розв'язок, називається **сумісною**, а система, що не має розв'язку, називається **несумісною.**

Теорема Кронекера - Капеллі

Позначимо через ***A*** основну матрицю системи (2.1), яка складена з коефіцієнтів при невідомих, а через $\tilde{\boldsymbol{A}}$ – розширену матрицю цієї системи, яка одержана шляхом доповнення матриці ***A*** стовпцем вільних членів, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь **(2.1)** сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці

$$r(A) = r(\tilde{A}) \tag{2.2}$$

Причому, система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$r(A) = r(\tilde{A}) = n$ (2.3)

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають ***еквівалентними,*** *якщо їх розв'язки співпадають.*

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має однакову кількість рівнянь та невідомих, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.4)$$

Якщо основний визначник Δ цієї системи (визначник основної матриці коефіцієнтів цієї системи) не дорівнює нулю, то ранги основної та розширеної матриць системи будуть рівними і дорівнювати кількості невідомих $\boldsymbol{n}$. Отже, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі така система має єдиний розв'язок.

У випадку $\boldsymbol{b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0}$ система **(2.4)** *однорідна*, її єдиний розв'язок тривіальний, тобто $\boldsymbol{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}$.

Система однорідних лінійних рівнянь має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\Delta(A) = 0$.

Якщо система (2.4) *неоднорідна*, її єдиний розв'язок можна знаходити різними способами.

Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

Теорема. Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими (2.5), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (2.5);

Δ_j — визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Матричний метод

Якщо позначити

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

То згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

у матричній формі: $\boldsymbol{AX=B}$

Таким чином: $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$

Для розв'язування неоднорідної системи $\boldsymbol{n}$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими матричним методом доцільно застосувати такий алгоритм:

1) Знайти визначник основної матриці Δ:

якщо $\Delta = 0$, то система розв'язку не має.

якщо $\Delta \neq 0$, тоді знайти обернену матрицю $\boldsymbol{A^{-1}}$ до матриці $\boldsymbol{A}$.

2) Помножити обернену матрицю $\boldsymbol{A^{-1}}$ на матрицю-стовпець вільних членів системи. Одержаний при цьому стовпець і буде розв'язком системи.

Методи Ґаусса

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має нескінченну кількість розв'язків у таких випадках:

1) коли однорідна система має $\boldsymbol{n}$ рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими і її основний визначник Δ дорівнює нулю;

2) коли кількість рівнянь неоднорідної системи не дорівнює кількості невідомих, а система рівнянь є сумісною;

3) коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих та дорівнює $\boldsymbol{n}$, система рівнянь сумісна $\mathbf{r(A) = r(\tilde{A}) = r}$ але $\mathbf{r} < \boldsymbol{n}$.

Суть метода Ґаусса полягає в тому, що шляхом елементарних перетворень систему треба привести до трикутного вигляду, коли усі елементи головної діагоналі основної матриці системи дорівнюють 1, а елементи основної матриці, що знаходяться нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий вигляд системи дозволяє знайти усі невідомі. Метод Ґаусса можна застосувати і до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що мають єдиний розв'язок.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27;\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27;\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$$

x_1=81/27=3; x_2=(-108)/27=-4; x_3=(-2727)/ =-1; x_4=27/27=1.

Отже, розв'язком цієї системи буде (3;-4;-1;1).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases}2x-4y+3z=1\\x-2y+4z=3\\3x-y+5z=2\end{cases}$$

Розв'язання

Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент a_{11} основної матриці дорівнював 1.

Одержимо:

$$\begin{cases}x-2y+4z=3\\2x-4y+3z=1\\3x-y+5z=2\end{cases}$$

Тепер перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до другого (щоб одержати a_{21} = 0), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати a_{31} = 0). Тоді будемо мати систему

$$\begin{cases}x-2y+4z=3\\\qquad -5z=-5\\\quad 5y-7z=-7\end{cases}$$

Тепер друге рівняння поділимо на (-5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases}x-2y+4z=3\\\quad y-\frac{7}{5}z=-\frac{7}{5}\\\qquad z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3-4\cdot1+2y\\y=\frac{7}{5}\cdot1-\frac{7}{5}\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\\z=1\end{cases}$$

Отже, система має єдиний розв'язок (-1,0,1).

Зауваження. Елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. Розв'язування прикладу 1 у такий спосіб виглядає так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4 & 3\\ 3 & -1 & 5 & 2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 3\\ 2 & -4 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 5 & 2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 5 & -7 & -7\end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 5 & -7 & -7\\ 0 & 0 & -5 & -5\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Приклад 3. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$$

Розв'язання

Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 32 + 10 + 60 - 12 - 4 = 31 \neq 0$$

Для запису оберненої матриці $\boldsymbol{A^{-1}}$ знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці $\boldsymbol{A}$:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$; $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1$;

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-16) = 22$; $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 20 = -23$;

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14$; $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1+8) = -9$;

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-10) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 14 & -23 & 6 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 22 & -23 & 6 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5\cdot(-2)+(-1)\cdot(-8)+7\cdot(-13) \\ 22\cdot(-2)+(-23)\cdot(-8)+6\cdot(-13) \\ 14\cdot(-2)+(-9)\cdot(-8)+1\cdot(-13) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ 62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком цієї системи буде (-3;2;1).

Приклад 4. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16, \end{cases}$$

Розв'язання

Перепишемо систему у вигляді $AX = B,$ де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$

Розв'язання матричного рівняння має вигляд $X = A^{-1}B.$ Знайдемо $A^{-t}.$ Маємо $D_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28-30-4 = -6.$

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким чином, $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, звідки

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ 18+14+16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = 2,$ $y = 3,$ $z = -2.$

Така система не має розв'язку.

Приклад 5. Дослідити сумісність системи, і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень, що виконуються над рядками матриці, приведемо її до східчастого вигляду:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & -9 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -20 & -15 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замітимо, що при приведенні до східчастого вигляду можлива також переміна місцями стовпців.

Отримали:

$RgA = Rg\overline{A} = r = 2 \prec 4 = n,\ \ n$ - число змінних. Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна; система має безліч розв'язків, бо $r \prec n$. Розв'язання здійснюємо методом Гауса. Базисні змінні - x_1, x_2; вільні змінні - x_3, x_4.

Ставимо у відповідність перетвореній розширеній матриці системи скорочену систему, яку розв'язуємо знизу уверх:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ \quad x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 7x_3 + 2x_4 - 1; \\ \quad x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 1 = -4x_3 - 3x_4 + 2 + 7x_3 + 2x_4 - 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_4 + 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \qquad x_3, x_4 \in R. \end{cases}$$

Запишемо загальний розв'язок у вигляді $X(x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_3 - x_4 + 1 \\ 4x_3 + 3x_4 - 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, де $x_3, x_4 \in R.$

Нехай, наприклад, $x_3 = 0,\quad x_4 = 0.$ Отримаємо частинний розв'язок $X(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$

Перевірка. Підставимо отриманий частинний розв'язок у систему:

$$\begin{cases} 1-2-0-0=-1; \\ -1-4-0-0=-5; \\ 2-2-0-0=0; \\ -3-4+0-0=-7. \end{cases}$$

Система розв'язана вірно.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати систему рівнянь трьома методами: 1) матричним методом; 2) за формулами Крамера; 3) методом Гауса.

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2; \\ 5x_1+4x_2-x_3=0; \\ 3x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1+4x_2+3x_3=5; \\ 2x_1-x_2+x_3=7; \\ 3x_1+2x_2-x_3=-4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=1; \\ x_1+3x_2 2x_3=6; \\ 2x_1-4x_2-x_3=-3. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 7x_1-4x_2+x_3=7; \\ x_1+x_2-x_3=1; \\ 2x_1-2x_2-x_3=2. \end{cases}$

2. Дослідити сумісність системи, і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку.

1. $\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0; \\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=3; \\ 4x_1-x_2+8x_3-4x_4=-3; \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=-1; \\ 2x_1+x_2-x_3-4x_4=-4; \\ 3x_1-x_2+2x_3=-3; \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=1. \end{cases}$

Питання для самоконтролю

1. Запишіть систему лінійних рівнянь у загальному вигляді.
2. Назвіть методи розв'язування систем лінійних рівнянь.
3. Запишіть фоормули Крамера.
4. У чому полягає метод Гауса?
5. Назвіть етапи розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.
6. Як перевірити систему на сумісність?
7. Яка система називається однорідною?

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Мета: формувати уміння та навички здійснювати операції з векторами, знаходити координати вектора, довжину вектора, кут між векторами, обчислювати скалярний, векторний, мішаний добутки (площі та об'єми відповідних фігур), проекцію вектора, встановлювати колінеарність та компланарність векторів, розкладати вектор за заданим базисом.

Короткі теоретичні відомості

Вектором називається напрямлений відрізок.

Позначаються вектори $\vec{a},\vec{b}$, ...

Якщо точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, то маємо вектор $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором.***

Вектор **вважається заданим**, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих та якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються ***рівними***, коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають **вільними**.

Нульовим вектором називається вектор $\bar{0}=(0;...;0)$.

Добутком вектора $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ на число k називається вектор $k\bar{a}=(ka_1,...,ka_n)$.

Сумою векторів $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ та $\bar{b}=(b_1,...,b_n)$ називається вектор $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$. Графічно суму векторів можна ппердставити (рисунок 2.1)

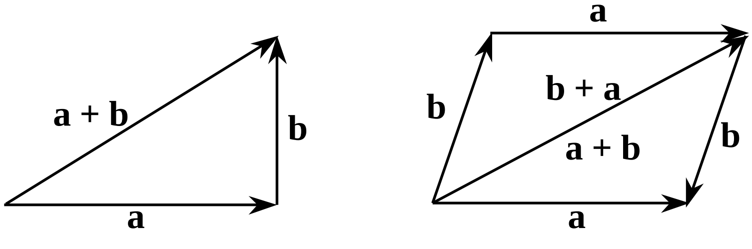


Рисунок 2.1 – Сума векторів

Додавання векторів комутативне, тобто для довільних векторів **a** і **b** справджується рівність

a + b = b + a.

Додавання векторів асоціативне, тобто для будь-яких векторів **a**, **b**, **c** виконується рівність

(**a + b**) + **c = a +** (**b + c**).

Цю властивість, що випливає з означення суми векторів, можна унаочнити (рисунок 2.2)

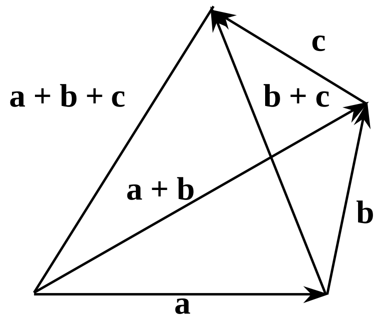


Рисунок 2.2 – Сума векторів

Віднімання векторів — операція, обернена до їх додавання. Різниця **b – a** векторів **a** і **b** являє собою вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рисунок 2.3).

a + (**b – a**) **= b**

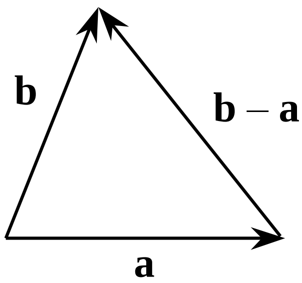


Рисунок 2.3 – Різниця векторів

Для будь-яких векторів **a**, **b** виконуються нерівності:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|,\ |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Модулем (довжиною) вектора $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ називається число $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$.

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх **косинуси** можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

У подальшому називатимемо їх ***напрямними косинусами*** *вектора* $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул до квадрата, дістанемо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Кут φ між векторами $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ та $\bar{b}=(b_1,...,b_n)$ задається формулою $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Кут між двома векторами $\overline{a_1}(x_1;y_1;z_1)$ та $\overline{a_2}(x_2;y_2;z_2)$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{\left|\overline{a_1}\right|\cdot\left|\overline{a_2}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Вектори називаються **ортогональними**, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Це виконується за умови cosφ=0 , тобто при φ=90^0.

Розглянемо прямокутну систему координат на площині та вектори $\bar{i} = (1;0)$ і $\bar{j} = (0;1)$ на цій площині (рисунок 2.4). Ці вектори (вони ортогональні і їхня довжина дорівнює одиниці) називають ***ортами***.

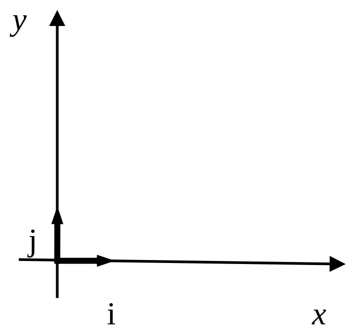


Рисунок 2.4 – Ортогональні вектори у прямокутній декартовій системи координат

Розглянемо також просторову систему координат з ортами $\bar{i} = (1;0;0)$, $\bar{j} = (0;1;0)$ та $\bar{k} = (0;0;1)$ (рисунок 2.5).

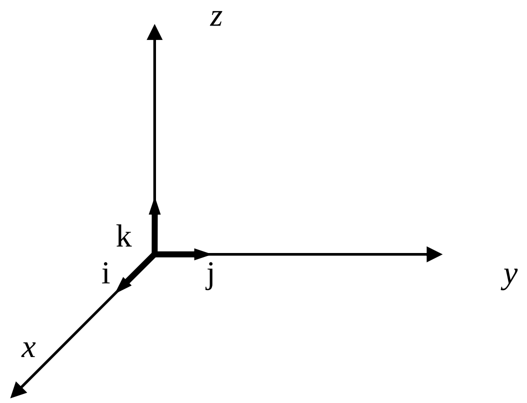


Рисунок 2.5 – Ортогональні вектори у просторі

Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* і $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Такі вектори надалі називатимемо **одиничними** векторами осей системи координат.

Кожен вектор в *n*-вимірному просторі єдиним способом розкладається по координатних осях.

Зокрема, в тривимірному просторі

$\bar{a} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$,

а в двовимірному

$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$.

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
4. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
5. $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Скалярним добутком векторів $\bar{a} = (a_1,...,a_n)$ та $\bar{b} = (b_1,...,b_n)$ називається *число:*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + ... + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \ .$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right| \cos\varphi \ ,$$

де φ — кут між векторами

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *є* $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на напрям першого.

$$np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |b|\cos\varphi, \quad np_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |a|\cos\varphi;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |a|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |b|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

де $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ — проекція вектора b на вісь, паралельну вектору a.

***Властивості скалярного добутку*:**

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.
3. $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
4. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$ якщо $\vec{a} \perp \vec{b},$ і навпаки, $\vec{a} \perp \vec{b},$ якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,\ \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

Векторним добутком векторів $\overline{a_1}(x_1; y_1; z_1)$ та $\overline{a_2}(x_2; y_2; z_2)$ називається вектор

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторний добуток задовольняє, зокрема, таку властивість:

$|\bar{c}| = |\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}| \cdot \sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
3. $\left(\lambda\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Модуль мішаного добутку трьох неколінеарних векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах як на сторонах:

$$V=|\vec{a}|\cos\alpha\cdot|\vec{b}||\vec{c}|\sin\varphi=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\alpha=\left|\vec{a}\left(\vec{b}\times c\right)\right|.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

Нехай у просторі задано деяку вісь l і вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярно до осі l (рисунок 2.6). Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно A' і B'.

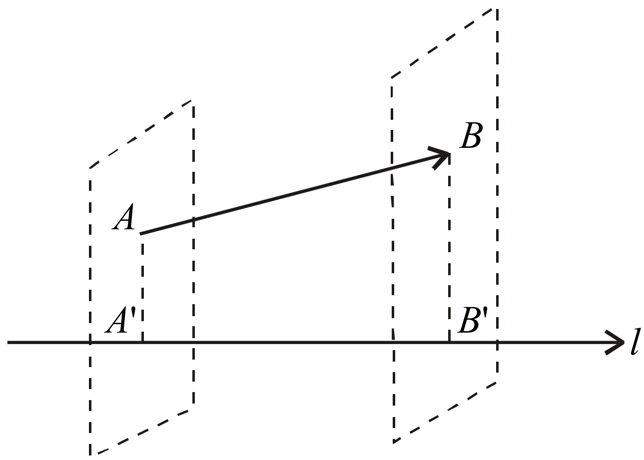


Рисунок 2.6 – Проекція

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі l. Слід зазначити, що $A'B'=|\overrightarrow{A'B'}|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ збігається з напрямом l, то $A'B'=-|\overrightarrow{A'B'}|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ протилежний напряму l.

Позначається проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l — $np_l\overrightarrow{AB}$. З рисунку 3.6 випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$np_l\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку A (x_1, y_1, z_1) і кінця B (x_2, y_2, z_2) вектора $\vec{AB}$, то проекції вектора $\vec{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1.$$

Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$\boldsymbol{np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\vec{a}+np_l\vec{b}.}$$

При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число:

$$\boldsymbol{np_l(\alpha\vec{a})=\alpha np_l\vec{a}.}$$

Лінійна залежність і незалежність векторів
Розкладання вектора за базисом

Нехай $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ вектори з n-вимірного векторного простору, а $k_1,k_2,...,k_n$ - деякі дійсні числа.

Вектор $\overline{b}=k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+...+k_n\overline{a_n}$ називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$.

Вектори $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ називаються ***лінійно залежними***, якщо існують такі дійсні числа $k_1,k_2,...,k_n$, одночасно не рівні нулю, такі що

$$k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+...+k_n\overline{a_n}=0$$

Якщо рівність $k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+...+k_n\overline{a_n}=0$ справджуються тільки тоді, коли $k_1=k_2=...=k_n$, то вектори $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ називаються ***лінійно незалежними.***

Для перевірки векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ на *лінійну незалежність* потрібно скласти із координат векторів визначник, який не повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Задано вектори $\vec{a}$ =(2, 3, 0), $\vec{b}$ =(1, -2, 2), $\vec{c}$ (3, 2, 1). Вимагається визначити:

1) $|\vec{a}|$;
2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;
3) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;
4) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$;
5) мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;
6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
7) чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Розв'язання

1. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}.$

2. $(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 0\cdot 2 = 4.$

3. $\cos(\vec{a},\vec{b}) - \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{1+4+4}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{13}}.$

4. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k} = (6,-4,-7);$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}.$

5. $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3.$

6. Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_3}{b_3}$; $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{-2} \neq \dfrac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні.

7. Умова компланарності векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 0;$ $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарні.

Приклад 2. Задано координати вершин піраміди $A(0;0,1)$, $B(2;3,5)$, $C(6;2,3)$, $D(3;7,2)$. Потрібно:

1) записати вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ у системі орт $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ і знайти модулі цих векторів;
2) знайти кут між векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$;
3) знайти проекцію вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$;
4) знайти площу грані ABC;
5) знайти об'єм піраміди $ABCD$;

Розв'язання

1) Відомо, що довільний вектор $\vec{a}$ можна представити в системі орт $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ за формулою

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (1)$$ де

a_x, a_y, a_z - координати вектора $\vec{a}$ в системі орт (проекції вектора на відповідні осі). Якщо відомі координати точок початку і кінця вектора, щоб записати координати вектора, треба від координат кінця вектора відняти координати початку, наприклад, якщо $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - початок і кінець вектора, то маємо вектор

$$M_1M_2(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1) \qquad (2)$$

Використовуючи (2), запишемо координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$:

$\vec{AB}(2-0;3-0;5-1)$, $\vec{AB}(2;3;4)$, або в системі орт $\vec{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k};$

$\vec{AC}(6-0;2-0;3-1)$, $\vec{AC}(6;2;2)$, або в системі орт $\vec{AC} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$

$\vec{AD}(3-0;7-0;2-1)$, $\vec{AD}(3;7;1)$, або в системі орт $\vec{AD}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$.

Довжина вектора знаходиться за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (3)$$

Використовуючи формулу (3), знайдемо довжини векторів:

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29};$$

$$\left|\vec{AC}\right|=2\sqrt{3^2+1^2+1^2}=2\sqrt{11};$$

$$\left|\vec{AD}\right|=\sqrt{3^2+7^2+1^2}=\sqrt{59}.$$

2) Відома формула, за якою шукають кут між векторами $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

Скалярний добуток, який є в чисельнику, визначають через координати векторів таким чином:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (4)$$

$$\cos\alpha=\cos\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}=\frac{2\cdot 6+3\cdot 2+4\cdot 2}{2\sqrt{29}\sqrt{11}}=\frac{13}{\sqrt{319}}\approx 0{,}7279, \text{ тобто } \alpha\approx 43^\circ.$$

3) Проекцію вектора на вектор визначають за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}, \qquad (5)$$

тобто в нашому випадку $np_{\vec{AB}}\vec{AD}=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\left|\vec{AB}\right|}=\dfrac{2\cdot 3+3\cdot 7+4\cdot 1}{\sqrt{29}}=\dfrac{39}{\sqrt{29}}\approx 5{,}76.$

4) Використовуючи векторний добуток векторів, знайдемо площу трикутників, побудованого на векторах, за формулою

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

причому векторний добуток обчислюють за правилом

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (6)$$

У нашому випадку $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\left(-\vec{i}+10\vec{j}-7\vec{k}\right)$.

Отже, площа грані ABC дорівнює: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{(-1)^2+10^2+(-7)^2}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ (кв.од.).

5) Об'єм піраміди, побудованої на трьох некомпланарних векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, можна знайти за формулою: $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$.

Змішаний добуток трьох векторів обчислюють:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Отже, у нашому випадку об’єм піраміди дорівнює:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}(190-70)=\frac{1}{6}\cdot 120=20 \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 3. Обчислити площу трикутника *ABC*, *A(2,-1,3)*, *B(-2,2,5)*, *C(1,2,3)*.

Розв’язання

Врахуємо, що $\vec{a}=\vec{AB}=$*(-4, 3, 2)*, $\vec{b}=\vec{AC}=$*(-1, 3, 0)*. Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 3 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-6\vec{i}-2\vec{j}-9\vec{k}, \text{ звідки } \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{36+4+81}=\sqrt{121}=11;$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}11=5{,}5 \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 4. Задані вершини трикутної піраміди *A(3, 2, 1)*, *B(-2, 1, -2)*. *C(-1, 2, 3)*, *D(1, 2, 3)*. Знайти її об’єм.

Розв’язання

$\vec{a}=\vec{AB}=$*(-5, -1, -3)*, $\vec{b}=\vec{AC}=$*(-4, 0, 2)*, $\vec{c}=\vec{AD}=$*(-2, -4, 2)*.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\begin{vmatrix}-5 & -1 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -2 & -4 & 2\end{vmatrix}=-48+4-40-8=-92.$$

Отже, об’єм трикутної піраміди $V=\frac{1}{6}=\left|-92\right|=\frac{46}{3}$ (куб.од.)

Приклад 5. У трикутнику з вершинами *A(2, -1, 3)*, *B(-2, 2, 5)*. *C(1, 2, 3)* знайти косинус кута при вершині *A*.

Розв’язання

$\vec{AB}=$*(-4, 3, 2)*, $\vec{AC}=$*(-1, 3, 0)*, тоді

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=\frac{-4(-1)+3\cdot 3+2\cdot 0}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}\approx 0{,}763.$$

Приклад 6. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(1, -1, 2)$, $\vec{a}_2=(2, 2, -1)$, $\vec{a}_3=(2, 1, 0)$ утворюють базис в R^3.

Розв’язання

Враховуючи, що базисом в R^3 є три некомпланарні вектори, розв’язання зводиться до перевірки виконання умови компланарності векторів:

$$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2+2(2-4)=1+2-4=-1\neq 0.$$

Таким чином, вектори некомпланарні, утворюють базис в R^3.

Приклад 7. Показати, що вектори $\bar{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворять базис і знайти розкладання $\vec{b}$ по даному базису: $\vec{a}_1=(1;-1;2)$, $\vec{a}_2=(2;2;-1)$, $\vec{a}_3=(2;1;0)$, $\vec{b}=(3;7;-7)$.

Розв'язання

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Отже, вектори $\bar{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворюють базис.

Розв'яжемо систему відносно a_1,a_2,a_3 методом повного виключення

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 0 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 3 & 10\\ 0 & -5 & -4 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 4 & 3 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Якщо видно з розв'язку, ранг матриці системи дорівнює 3, отже, вектори лінійно незалежні й утворюють базис. Розв'язок системи $a_1=-3; a_2=1; a_3=2$.

Виходить, $\vec{b}=-3\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3$ - розкладання вектора $\vec{b}$ по базису $\bar{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Задані вектори $\vec{a}$=(2, 3, 1), $\vec{b}$=(-1, 0, -1), $\vec{c}$=(2, 2, 2).

Визначити:

1) довжину вектора $|\vec{a}|$;
2) скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$;
3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
4) векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$;
5) мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;
6) чи коленіарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
7) чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2.Знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$. За умови, що $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(3;-2;1)$.

3. Чи компланарні вектори $\bar{a}$ $\bar{b}$, $\bar{c}$? За умови, що $\bar{a}(3;2;1)$, $\bar{b}(1;-3;-7)$, $\bar{c}(1;2;3)$.

4. Обчислити об'єм трикутної піраміди з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 та найбільшу висоту. За умови, що $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$.

5. З'ясуйте чи утворюють вектори $\overline{a}(3;2;1)$, $\overline{b}(1;-3;-7)$, $\overline{c}(1;2;3)$ тривимірний простір та розкладіть вектор $\overline{d}(-2;4;7)$ за векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Питання для самоконтролю

1. Що таке вектор?
2. Які операції можна виконувати над векторами?
3. Зобразьте графічно суму та різницю векторів.
4. Запишіть формули: скалярного добутку векторів, косинуса кута, векторного та мішаного добутку векторів, довжини вектора.
5. Сформулюйте умову паралельності та перпендикулярності векторів.
6. Який геометричний зміст мають векторний та мішаний добутки?
7. Яка система векторів є лінійно незалежною?
8. За якої умови веектори утоврюють базис?

2.2 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Мета: формувати уміння та навички складати різні види рівнянь прямих та площин (за різних вхідних даних), знаходити кут між прямими, між площинами, застосовувати ознаки паралельностиі та перпендикулярності прямих та площин, знаходити відстань від точки до прямої (площини), координати точки перетину прямої та площини, складати рівняння геометричного місця точок рівновіддалених від двох заданих точок.

Короткі теоретичні відомості

Наведемо основні види рівнянь прямої:

1) $Ax+By+C=0$ - загальне рівняння прямої;

2) $y=kx+b$ - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; $k=tg\alpha$, де α - кутміж прямою і додатним напрямом осі Ox;

3) $y-y_0=k(x-x_0)$ - рівняння прямої, що проходить через задану точку (x_0,y_0) у заданому напрямі;

4) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0,y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A,B)$ (до нормального вектора);

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S}=(m,n)$ (канонічне рівняння);

6) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - рівняння прямої у відрізках, a і b - величина напрямлених відрізків, що відтинаються прямою на координатних осях;

7) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$.

Якщо задано загальне рівняння прямої, то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою $k=-\dfrac{A}{B}$.

Якщо k_1,k_2 - кутові коефіцієнти двох прямих, то кут Θ між ними визначається за формулою $tg\Theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ $(k_1\cdot k_2\neq -1)$.

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Якщо задане рівняння прямої $L: Ax+By+C=0$ і точка $M_0(x_0,y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою $p(M_0,L)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Основні види рівнянь площини:

1) $Ax + By + C_Z + D = 0$ - загальне рівняння площини, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ - вектор, нормальний до цієї площини (перпендикулярний);

2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ - рівняння площини у відрізках, де a, b, c - довжина напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях;

3) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$;

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Умова паралельності двох площин $A_1x + B_1y + C_{1Z} + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_{2Z} + D_2 = 0$ має вигляд $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, а умовою перпендикулярності цих площин є рівність $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Кут між двома заданими площинами визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Відстань $p(M_0, Q)$ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q: $Ax + By + C_Z + D = 0$;

$$p(M_0, Q) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

При розв'язанні задач на пряму лінію в просторі скористаємось наступними її рівняннями:

1) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ - канонічні рівняння прямої, де (x_0, y_0, z_0) - задана точка, а вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ - напрямний вектор прямої;

2) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$;

3) $\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ - параметричні рівняння прямої в просторі, де $t \in R$ - деякий параметр;

4) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ - загальні рівняння прямої, що визначена перетином двох площин.

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ обчислюється за формулою $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

Умови паралельності та перпендикулярності цих прямих відповідно $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ та $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Відстань $p(M_0,L)$ від точки M_0 до прямої L, де $L:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$; точка $A(x_1,y_1,z_1)\in L$, $\vec{S}(m,n,p)$ визначається за формулою $p(M_0,L)=\frac{\left|\vec{A}\vec{M}_0\times\vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}$.

Щоб знайти точку перетину прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax+By+C_Z+D=0$, слід розвязати спільно ці три рівняння.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Задані вершини трикутника $A(-2,-3)$, $B(5,4)$, $C(-1,2)$. Скласти рівняння медіани AM.

Розв'язання. Точка M - середина сторони BC, тому $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5-1}{2}=2$; $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4+2}{2}=3$; $M(2,3)$.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки A і M, знайдемо рівняння медіани $AM:\frac{x+2}{2+2}=\frac{y+3}{3+3}$, звідки $3x-2y=0$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,2)$:

а) та точку $N(3,5)$;

б) паралельно вектору $\vec{S}=(0,-1)$;

в) перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(3,-5)$.

Розв'язання. Складаючи рівняння прямої, треба передусім вибрати той вигляд рівняння, який швидше приводить до мети.

а) Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Маємо: $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{5-2}$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$; $3x-2y+1=0$.

б) Використаємо канонічне рівняння прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

Маємо: $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-1}$, $x-1=0$.

в) Використаємо рівняння прямої, заданої точки та нормальним вектором: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Маємо $3(x-1)-5(y-2)=0$; $3x-5y+7=0$.

Приклад 3. Знайдіть відстань $p(L_1, L_2)$ між прямими $L_1: 3x-4y+5=0$, $L_2: 6x-8y-13=0$.

Розв'язання. $L_1 \| L_2$, бо $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{5}{-13}$.

Щоб знайти відстань між прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку і знайдемо відстань від неї до другої прямої. Поклавши, наприклад, у першому рівнянні $x=1$, отримаємо $y=1$. Таким чином, точка $M(1,2)\in L_1$. використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо $p(L_1, L_2)=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 2|-13}{\sqrt{36+64}}=\frac{23}{10}=2{,}3$.

Приклад 4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2,3,-1)$ паралельно площині $5x-y+3z=5$.

Розв'язання. Скориставшись рівнянням площини, що проходить через задану точку, запишемо $A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$. Із паралельності площини випливає, що нормальний вектор $\vec{n}=(A,B,C)=(5,-1,3)$, тому рівняння цієї площини має вигляд $5(x-2)-(y-3)+3(z+1)=0$ або $5x-y+3z-4=0$.

Приклад 5. Написати рівняння площини P, що проходить через точки $M_1(1,1,1)$ і $M_2(0,2,1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(2,0,1)$.

Розв'язання. Знайдемо $\vec{M_1M_2}$; $\vec{M_1M_2}=(-1,1,0)$. За нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n}=\vec{M_1M_2}\times\vec{a}$:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(1,1,-2).$$

Скористаємось далі рівнянням площини, заданої точкою $M_1(1,1,1)$ і нормальним вектором $\vec{n}(1,1,-2)$:

$$(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0; \qquad P: x+y-2z=0.$$

Приклад 6. Задана площа $P: -2x+y-z-1=0$ і точка $M(1,1,1)$. Написати рівняння площини P', що проходить через точку M паралельно площині P.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини, що проходить через точку, перпендикулярно до нормального вектора. Через те, що $P' \| P$, їх нормальні вектори рівні: $\vec{n}_p=\vec{n}_{p'}=(-2,1,-1)$:

$$-2(x-1)+(y-1)-(z-1)=0; \qquad P': -2x+y-z+2=0.$$

Приклад 7. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ площини $3x+5y-z-2=0$.

Розв'язання. Приведем канонічні рівняння прямої до параметричного вигляду: $x=4t+12$, $y=3t+9$, $z=t+1$.

Підставимо ці вирази в рівняння площини та отримаємо

$$3(4t+12)+5(3t+9)-t-1-2=0,$$

звідки $t=3$.

Задана пряма та площина перетинаються в точці з координатами $x = 4 \cdot 3 + 12 = 24$, $y = 3 \cdot 3 + 9 = 18$, $z = 3 + 1 = 4$.

Приклад 8. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x + y - z = 0; \\ 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$

Написати канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Канонічні рівняння прямої: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Знайдемо точку $A(x_0, y_0, z_0) \in L$. З цією метою задаємо одну з координат, наприклад $x = 0$, а дві інші отримаємо з систем рівнянь, що одержана з даної при $x = 0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} y - z = 0; \\ -y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2; \\ y = 2. \end{cases}$$

Маємо: $A(0,2,2) \in L$.

За напрямний вектор $\vec{S}$ візьмемо вектор $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{n}_2 = (2,-1,0)$ - нормальні вектори площини, лінією перетину яких є задана пряма.

Таким чином,

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = (-1,-2,-3),$$

і канонічні рівняння прямої

$$\frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 2}{-3}; \qquad L: \frac{x}{-1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{3}.$$

Приклад 9. Відомі координати вершин трикутника $A(-1,2)$, $B(5,-1)$, $C(-4,-5)$. Знайти: 1) довжину сторони AB; 2) рівняння сторін AB і AC і їх кутові коефіцієнти; 3) внутрішній кут B у радіанах з точністю до 0,01; 4) рівняння медіани AE; 5) рівняння і довжину висоти CD; 6) рівняння прямої,яка проходить через точку M перетину цієї прямої з висотою CD.

Розв'язання. 1. Відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ (рис. 1) знаходимо за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

У нашому випадку $AB = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

2. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки площини, має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Підставляючи у (2) координати точок A і B, отримаємо рівняння сторони AB:

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x+1}{5+1}; \; \frac{y-2}{3} = \frac{x+1}{6}; \; \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{2}; \; 2y - 4 = -x - 1; \; x + 2y - 3 = 0.$$

Чкщо рівняння знайденої прямої звести до вигляду $y = kx + b$, то знайдемо кутовий коефіцієнт прямої. У нас $2y = -x + 3$ або $y = -0{,}5x + 1{,}5$.

Отже, $k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

Аналогічно отримаємо рівняння прямої BC і знайдемо її кутовий коефіцієнт:
$\frac{y+1}{-5+1} = \frac{x-5}{-4-5}$; $\frac{y+1}{-4} = \frac{x-5}{-9}$; $-9y - 9 = -4x + 20$; $4x - 9y - 29 = 0$; $k_{BC} = \frac{4}{9}$

3. Для знаходження внутрішнього кута B трикутника ABC скористаємось формулою:

$$tgB = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} \qquad (3)$$

Використовуючи попередньо знайдені кутові коефіцієнти за формулою (3), знаходимо:

$$tgB = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{9}} = \frac{17}{14} \approx 1{,}2143.$$

За таблицями В.М. Брадіса або користуючись мікрокалькулятором, знаходимо кут $B \approx 0{,}88$ рад.

4. Щоб записати рівняння медіани AE, спочатку знайдемо координати середини відрізка BC:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + (-4)}{2} = \frac{1}{2};\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-1) + (-5)}{2} = -3.$$

Використовуючи (2), запишимо рівняння медіани AE:
$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1}$; $\frac{3}{2} = (y-2) = -5(x+1)$; $3(y-2) = -10(x+1)$; $10x + 3y + 4 = 0$.

5. Рівняння висоти CD запишемо як рівняння прямої, яка проходить через точку C у заданому напрямі k_{CD}:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (4)$$

Оскільки пряма AB і CD взаємно перпендикулярні, то між їх кутовими коефіцієнтами існує залежність $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = 2$. За (4) маємо рівняння висоти

$$y + 5 = 2(x + 4);\ 2x - y + 3 = 0$$

Довжину висоти знайдемо за формулою відстані від точки до прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

Підставивши в (5) замість x_0, y_0 координати точки C, а замість A, B, C коефіцієнти прямої AB, маємо

$$d = CD = \frac{|-4 + 2(-5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}}.$$

6. Шукана пряма EK паралельна до AB, тому $k_{EK} = k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

Використовуючи (4),замість x_0, y_0 підставимо координати точки E, отримаємо

$$y+3=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ 2x+6=-x+\frac{1}{2};\ 2x+4y+11=0\ \ (EK).$$

Для відшукання координат точки M розвязуємо систему рівнянь, якими описуються прямі EK і CD:

$$\begin{cases}2x+4y+11=0,\\ 2x-y+3=0.\end{cases}$$

Розв'язання її $x=-2{,}3$; $y=-1{,}6$. Отже, $M(-2{,}3;-1{,}6)$.

Приклад 10. Задано прямі l_1 та l_2 і точка *M*;

$l_1:\ \ 4x+y-8=0,\ \ \ l_2\ \ \ x-5y-2=0,\ \ \ M(-4{,}7).$

Знайти:

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на осі координат;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;

3) точку *N* перетину прямих l_1 і l_2;

4) рівняння прямої, що проходить через точку *M* паралельно прямій l_2 перпендикулярно до прямої l_2;

5) відстань від точки *M* до прямої l_2: $p(M,l_2)$;

Усі результати ілюструвати графічно.

Розв'язання

1) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$, де k - кутовий коефіцієнт прямої, b - відрізок, що відтинається прямою на осі ординат з точністю до знака.

Приведемо рівняння прямої l_1 до означеного вигляду:

$l_1: y=-4x+8;\ \ \ k=-4, b=8.$

2) Рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a і b з точністю до знака визначають довжини відрізків, що відтинаються на осях координат;

$l_1:\ \ 4x+y-8=0,$

$4x+y=8,$

$\frac{x}{8/4}+\frac{y}{8}=1,$

$a=2;\ b=8,$

$A_1(2;0)\in l_1;\ \ A_2(0;8)\in l_1$

$l_2:\ \ x-5y-2=0,$

$x-5y=2,$

$\frac{x}{2}+\frac{y}{2/5}=1,$

$a=2;\ b=-0{,}4.$

$B_1(2;0)\in l_2;\ \ B_2(0;-0{,}4)\in l_2.$

3) Рівняння прямих l_1, l_2 утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши цю систему, знайдемо точку перетину l_1 і l_2:

$$\begin{cases}4x+y-8=0;\\ x-5y-2=0.\end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на 5 та склавши ліві і праві частини рівнянь, отримаємо:

$$21x-42=0,$$
$$x=2.$$

Підставимо в перше рівняння $y=2(-4)+8=0.$

Точка $N(2{,}0)$ - точка перетину прямих l_1 і l_2.

4) l_2: $x-5y-2=0;\quad M(-4{,}7).$

а) шукана пряма l_3; $l_3 \| l_2$.

Очевидно , що $\vec{n}_{l3}=\vec{n}_{l2}$, $\vec{n}_{l3}$, $\vec{n}_{l2}$ - нормальні вектори прямих l_3, l_2 відповідно; $\vec{n}_{l3}=(1,-5).$

Рівняння прямої, що задана точкою і нормальним вектором $\vec{n}(A,B)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;$$
$$l(x+4y)-5(y-7)=0;$$
$$l_3: x-5y+39=0;\;\; K_1(0;7{,}8)\in l_3.$$

б) шукана пряма l_4; $l_4 \perp l_2$.

Запишемо рівняння прямої l_2 як рівняння прямої, що проходить через дві точки $B_1(2{,}0)$; $B_2(0;-0{,}4)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}:$$
$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{-0{,}4-0};$$

$\vec{S}_{l2}=(1;0{,}2)$, $\vec{S}_{l2}$ - напрямний вектор прямої l_2, але $\vec{S}_{l2}=\vec{n}_{l4}$, $\vec{n}_{l4}$ - нормальний вектор прямої l_4. Запишемо рівняння l_4 як рівняння прямої, що задана точкою $M(-4{,}7)$ і нормальним вектором $\vec{n}_{l4}=(1;-0{,}2)$:

$$l(x+4)+0{,}2(y-7)=0;$$
$$x+0{,}2y+2{,}6=0;$$
$$10x+2y+26=0;$$
$$l_4: 5x+y+13=0;$$
$$K_2(-2{,}6;0)\in l_4.$$

5) Відстань від точки $M(x_0,y_0)$ до прямої l: $Ax+By+C=0$ визначається за формулою

$$p(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$
$$M(-4{,}7);\;\; l_2: x-5y-2=0;$$
$$p(M,l_2)=\frac{|1-(-4)-5\cdot 7-2|}{\sqrt{1+25}}=\frac{41}{\sqrt{26}}.$$

Приклад 11. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M:

$P_1: 5x+3z-7=0,\;\; L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3},\;\; M(2,-3{,}0).$

Знайти:

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площині P_1;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно l_1;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;

6) відстань від точки M до площини P_1 : $p(M,P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої L_1 : $p(M,L_1)$.

Розв'язання

Згідно з умовою $\vec{n}_{P_1}=(5,0,3)$, $\vec{S}_{L_1}=(1,2,3)$, $\vec{n}_{P_1}$. $\vec{S}_{L_1}$ - нормальний вектор площини P_1 і напрямний вектор прямої L_1 відповідно.

1) Враховуючи, що $P_2 \| P_1$, маємо $\vec{n}_{P_2}=\vec{n}_{P_1}$, $\vec{n}_{P_2}=(5,0,3)$, $M(2,-3,0)\in P_2$.

Рівняння площини, що задана точкою $M(x_0,y_0,z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n}(A,B,C)$, має вигляд $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

Шукане рівняння: $5(x-2)+0(y+3)+3(z-0)=0$, $P_2: 5x+3z-10=0$.

2) Враховуючи, що $P_3 \perp L_1$, отримуємо $\vec{n}_{P_3}=\vec{S}_{L_1}$, $\vec{n}_{P_3}=(1,2,3)$, $M(2,-3,0)\in P_3$; $1(x-2)+2(y+3)+3(z-0)=0$, $P_3: x+2y+3z+4=0$.

3) Враховуючи, що $P_1 \perp L_2$, отримуємо $\vec{n}_{P_1}=\vec{S}_{L_2}$, $\vec{S}_{L_2}=(5,0,3)$, $M(2,-3,0)\in L_2$.

Рівняння прямої, задано. точкою $M(x_0,y_0,z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S}=(m,n,p)$, має вигляд $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$; $L_2: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{x-0}{3}$.

4) Завдяки тому що $L_3 \| L_1$, отримуємо $\vec{S}_{L_1}=\vec{S}_{L_3}$; $\vec{S}_{L_3}=(1,2,3)$; $M(2,-3,0)\in L_3$; $L_3: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-0}{3}$.

5) Рівняння площини P_1 і прямої L_1 утворюють систему, розв'язок якої дасть координати точки N перетину прямої і площини: $\begin{cases} 5x+3z-7=0; \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}. \end{cases}$

У рівнянні прямої перейдемо до параметричного завдання:

$$\begin{cases} 5x+3z-7=0, \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}=t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3z-7=0, \\ x=t, \\ y=2\cdot t+1, \\ z=3\cdot t-1; \end{cases}$$

$5\cdot t+3(3\cdot t-1)-7=0,$

$5\cdot t+9\cdot t-3-7=0,$

$14\cdot t=10,$

$t=\dfrac{5}{7};$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{7}, \\ y = 2\cdot\dfrac{5}{7}+1 = \dfrac{17}{7}, \qquad N\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{17}{7}, \dfrac{8}{7}\right). \\ z = 3\cdot\dfrac{5}{7}-1 = \dfrac{8}{7}, \end{cases}$$

6) $\rho(M, P_1) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|5\cdot 2 + 0(-3) + 3\cdot 0 - 7|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 3^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}.$

7) $\rho(M, P_1) = \dfrac{\left|\vec{AM}\times\vec{S}_{l4}\right|}{\left|\vec{S}_{l4}\right|}$, де $A(x_1, y_1, z_1)\in L_1$.

З рівняння прямої L_1 випливає, що $A(0,1,-1)\in L_1$; $M(2,-3,0)$;

$$\vec{AM} = (2-0,-3-1,0+1) = (2,-4,1); \quad \vec{S}_{L1} = (1,2,3);$$

$$\vec{AM}\times\vec{S}_{L1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = -14\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k} = (-14,-5,8);$$

$$\left|\vec{AM}\times\vec{S}_{L1}\right| = \sqrt{196+25+64} = \sqrt{285};$$

$$\left|\vec{S}_{L1}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$$

$$\rho(M, P_1) = \frac{\sqrt{285}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{285}{14}}.$$

Приклад 12. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1(3;2)$ і $M_2(2;3)$.

Розв'язання:

Нехай $M(x, y)$ - довільна точка шуканого геометричного місця точок.

За умовою $\left|\overline{M_1M}\right| = \left|\overline{M_2M}\right|$, де

$\left|\overline{M_1M}\right| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$, $\left|\overline{M_2M}\right| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$, тоді $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$ або після спрощень $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow y - x = 0$.

Це рівняння прямої.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3. За умови, що $M_1(-3;4;-7), M_2(1;5;-4), M_3(-5;-2;0), M_0(-12;7;-1)$.

2. Написати рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$. За умови, що $A(1;0;-2), B(2;-1;3), C(0;-3;2)$.

3. Знайти кут між площинами: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. За умови, що $A_1=1, B_1=-3, C_1=0, D_1=5, A_2=2, B_2=-1, C_2=5, D_2=-16$.

4. Написати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

За умови, що $A_1=2, B_1=1, C_1=1, D_1=-2, A_2=2, B_2=-1, C_2=-3, D_2=6$.

5. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-x_0}{k}=\dfrac{y-y_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{m}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0.$ За умови, що $x_0=2, y_0=3, z_0=-1, k=-1, l=-1, m=4, A=1, B=2, C=3, D=-14$.

6. Знайти координати точки A, рівновіддаленою від точок B і C.
За умови, що $A(0;0;z), B(5;1;0), C(0;2;3)$.

7. Задано прямі l_1 та l_2 і точка M:
$l_1: 5x+3y+8=0$, $l_2: x-4y+20=0$; M (7, -2).
Знайти:
1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на координат;
2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;
3) точку N перетину прямих l_1 і l_2;
4) рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно прямій l_2 і перпендикулярно до прямої l_2;
5) відстань від точки M до прямої l_2: $p(M,l_2)$.
Усі результати ілюструвати графічно.

8. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M:
$P_1: 5x-3z+2=0$, $L_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $M(0,2,3)$.
Знайти:
1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площини P_1;
2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1;
3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;
4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;
5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;
6) відстань від точки M до площини $P_1: p(M,P_1)$;
7) відстань від точки M до прямої $L_1: p(M,L_1)$.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть відомі вам рівняння прямих (загальне, з кутовим коефіцієнтом, прямої, що проходить через дві точки, у відрязках на осях, параметричне тощо).
2. Запишіть коорднати середини відрізка.
3. Як визначити кут між прямими?
4. Умова паралельності та перпендикулярності прямих.
5. Запишіть основні види рівнянь площин.
6. Як визначити відстань від точки до площини?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко І.П. Вища математика для економістів / І.П.Васильченко. - К., 2002. - 454 с.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова та ін. - К.: КНЕУ, 1996. - 396 с.
3. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с.
4. Высшая математика для экономистов : Учебник для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш.Кремер. – 2-е издание перераб и дои. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 471 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2009.-648 с.
7. Дюженкова Л.І. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: навч. посібник. – К.: Вища школа, 2003.- Ч 2.- 470 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Назієв Е.Х., Владіміров В.М., Миронець О.А. - К. ,1997. - 149 с.
9. Макаренко В.О. Вища математика для економістів : Навч. посібник / Макаренко В.О. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
10. Математические методы в экономике / Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 368 с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: підручник. – К.: Техніка, 2003.-Ч 2.-600 с.
12. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. -М.: Айрис-Пресс, 2000.-Ч. 1-2.-252 с.
13. Тевяшев А.Д. Вища математика. Загальний курс : Збірник задач і вправ. 2-е вид. доп. і доопрац / А.Д.Тевяшев,О.Г.Литвин. – Х.: Рубікон, 1999. – 320 с.

ЗМІСТ