

Міністерство освіти і науки України
Чернігівський національний технологічний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

до розрахунково-графічної роботи

для студентів усіх спеціальностей

заочної форми навчання

Частина 2

Обговорено і затверджено на
засіданні кафедри вищої та
прикладної математики,
протокол № 9 від 24. 04. 2014 р.

Зміст

| | |
|---|----|
| Вступ | 4 |
| Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи | 6 |
| Розв'язання типового варіанта завдання | 66 |
| Рекомендована література | 84 |

Вступ

Курс вищої математики разом із курсами інших загальноосвітніх дисциплін складає основу фундаментальної підготовки сучасних інженерів та економістів. Сучасне життя потребує від майбутніх фахівців оволодіти основними математичними навичками, які вони отримують, вивчаючи курс вищої математики в університеті.

Дані методичні вказівки призначені для студентів заочної форми навчання і містять завдання до індивідуальних розрахунково – графічних робіт з вищої математики за темами: "комплексні числа", "невизначений інтеграл", "визначений інтеграл" та "диференціальні рівняння," які вивчаються в другому семестрі і передбачені робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями. Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, розв'язання задач, самоперевірка, виконання контрольних, розрахунково-графічних робіт.

Метою індивідуальних домашніх завдань, поданих в даному посібнику, є допомога студенту заочного відділення поглибити теоретичні знання, засвоїти основні формули, навчитись розв'язувати ряд простих типів задач та перевірити результати самостійної роботи студента з вивчених тем. Розв'язування поданих завдань, також дозволяє студенту зрозуміти ступінь засвоєння їм відповідних розділів курсу, вказує на прогалини, які виникли під час вивчення матеріалу, допомагає сформулювати питання викладачам під час консультацій.

Виконуючи домашню контрольну роботу студент повинен самостійно розв'язати запропоновані викладачем індивідуальні домашні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи або останні дві цифри номера залікової книжки. Розв'язання завдань з поясненнями подається на аркушах формату А4 (запис в яких виконується з одного боку), або у шкільному зошиті. Умову завдань необхідно переписувати повністю без скорочень, після чого надавати розв'язання цього завдання, супроводжуючи його необхідним поясненням і з посиланням на відповідні формули, теореми,

правила тощо. Побудови графіків потрібно виконувати олівцем на тому ж аркуші, де і відповідне розв'язання, або на папері з масштабною сіткою. На титульній сторінці розрахунково-графічної роботи вказують номер варіанту, прізвище та ініціали студента, групу, прізвище та ініціали викладача.

Після перевірки роботи викладачем, якщо є зауваження, студент повинен розв'язати неправильно виконані завдання заново у тому ж зошиті і повторно подати його на перевірку. Після позитивної оцінки викладача робота підлягає захисту. Результат цієї роботи враховується при складанні студентом заліку або іспиту.

Окрім завдань до розрахунково-графічної роботи методичні вказівки містять рекомендовану літературу з відповідних тем курсу вищої математики та розв'язання типового варіанта, що значно допоможе студенту краще орієнтуватися в матеріалі при самостійному вивченні курсу, при виконанні індивідуальних контрольних робіт, тобто оволодіти вузівським курсом вищої математики та успішно скласти іспит в кінці семестру.

Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи

Варіант 1

1. Дано числа $z_1 = -5 - 7i$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = -8 - 4i$. Знайти $2z_1 - z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$; $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 27 = 0$, б) $z^3 + 8z^2 + 20z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x^5}{x^3} dx$; 2) $\int \frac{dx}{3x-4}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-8x^2}}$;

4) $\int \cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$; 6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx$;

7) $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x} dx$; 8) $\int \sin^2 3x \sin 4x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$;

10) $\int \frac{2x-3}{2x^2+9} dx$; 11) $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx$; 12) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx$;

13) $\int \frac{x \cos x}{\sin x} dx$; 14) $\int \arcsin 5x dx$;

15) $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$; 16) $\int \frac{7x-10}{x^3+8} dx$;

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; 18) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{5x^2-3}$; 2) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{2x} dx$.

3) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (x+4) \sin 2x dx$; 4) $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$.

5) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$; 6) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx$; 7) $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x + \sqrt{e^x + 4}}{e^x + 5} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_4^{\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$; б) $\int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = 3x^2y^3 - 2y\sqrt{x}; \quad \text{б) } z = \ln\left(3x^2 - \frac{y}{x}\right).$$

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 2; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arctg(x/y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x + y - 3 = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$\text{а) } \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\cos y} dx + dy = 0; \quad \text{б) } xy' - y = (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{x}\right).$$

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = \frac{-x}{y}$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1 - y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

$$\text{а) } y'' + 7y' = 0; \quad \text{б) } y'' - 5y' + 4y = 0; \quad \text{в) } y'' + 16y = 0.$$

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - y' + y = f(x)$, якщо:

$$\text{а) } f(x) = 7x + 2; \quad \text{б) } f(x) = e^x \cos x; \quad \text{в) } f(x) = 2e^{3x} - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Варіант 2

1. Дано числа $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = 7 - 6i$. Знайти $z_2 \cdot z_3 - 3z_1$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^4 - 2$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + z^2 + 8z = 0$, б) $z^4 + 4 = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2x^3 - 4}{\sqrt{x^3}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{4 - 3x}$;

3) $\int \frac{dx}{5x^2 + 4}$;

4) $\int \sin\left(2 + \frac{3}{2}x\right) dx$;

5) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$;

6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx$;

7) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx$;

8) $\int \cos 3x \sin^2 4x dx$;

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$;

10) $\int \frac{3x - 2}{3x^2 - 1} dx$;

11) $\int \frac{4x - 1}{2x^2 + 6x + 3} dx$;

12) $\int \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx$;

13) $\int (e + 1) e^{-x} dx$;

14) $\int \arcsin 2x dx$;

15) $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x + 1)^2} dx$;

16) $\int \frac{4x^2 + 3x + 17}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)} dx$;

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x + 3)}$;

18) $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/5} \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$;

2) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$.

3) $\int_0^{\pi/3} (x + 2) \sin 3x dx$;

4) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

5) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$;

6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}$;

7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}$;

б) $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{-\sin 3x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 2x^3y - 4x\sqrt{y}$; б) $z = \arccos\left(\frac{y}{x} + 1\right)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $xy = z^2 - 1$, яка задана неявно в точці $M_0(0; 1; -1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \ln(x^2 - 2y^2)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy - 10$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $y = x^2 - 4$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $e^x y' = e^x \sqrt{1 - y^2}$; б) $xy' = y \cos \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y|_{x=0} = \frac{2}{3}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy'' = y'$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''^2 = y', \quad y|_{x=0} = 2/3, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 3y' = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 2x^2 - 5x$; б) $f(x) = e^x \sin x$; в) $f(x) = xe^{3x}$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Варіант 3

1. Дано числа $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 9 + 4i$, $z_3 = 6i - 6$. Знайти $4z_1 + z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$; $z_2 = -\sqrt{12} + 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 2i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 2z^2 + 10z = 0$, б) $z^3 - i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{3x+4}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$;

4) $\int \cos\left(\frac{4-2x}{3}\right) dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)} dx}{3x+1}$;

6) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - 4}} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \sqrt{\operatorname{ctg} 3x}}$;

8) $\int \sin 2x \cos^2 5x dx$;

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 7}}$;

10) $\int \frac{x-1}{5-2x^2} dx$;

11) $\int \frac{x+1}{2x^2 + 6x + 3} dx$;

12) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2 - x + 7}} dx$;

13) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$;

14) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

15) $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} dx$;

16) $\int \frac{4x+2}{x^4 + 4x^2} dx$;

17) $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$;

18) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int \frac{dx}{2x^2 + 5}$;

2) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 - 2\cos^2 x}$.

3) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (x+5) \sin x dx$;

4) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$.

5) $\int_{\frac{7}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{x}{\sqrt{2+3x}} dx$;

6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$;

7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x + 3}{e^{2x} + 1} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(1+4x^2)}$;

б) $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = \sqrt{x+1}$ та $y^2 = x+1$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$; б) $z = \text{arcctg}(y^2)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = e^{2x^2+y^2}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = xy - 2x - y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x=3$, $y=0$, $x=0$, $y=4$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\sin x \text{tg } y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$; б) $\sqrt{xy} dx = x dy$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(4) = 4$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = y' + x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$2yy'' = y'^2 + 1e^y, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 3y' - 4y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 3e^{-4x}$; б) $f(x) = x \sin x$; в) $f(x) = e^x \sqrt{x+1}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y + y = \frac{e^x}{x^2}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$$

Варіант 4

1. Дано числа $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -1 - 5i$, $z_3 = 2i - 4$. Знайти $2z_1 - z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{3} - 3i$; $z_2 = -6 - 6i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^5 - 2$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 12z^2 + 38z = 0$, б) $z^4 - i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{4x - 2}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$;

4) $\int \sin\left(\frac{3 + 2x}{5}\right) dx$; 5) $\int x^2 e^{2x^3 - 1} dx$; 6) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \sqrt{\operatorname{ctg} 5x}}$; 8) $\int \cos 4x \sin^2 5x dx$; 9) $\int \frac{4x}{\sqrt{2 + 3x^2}} dx$;

10) $\int \frac{2x + 3}{1 - 5x^2} dx$; 11) $\int \frac{x + 1}{3x^2 - 2x - 3} dx$; 12) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}} dx$;

13) $\int x^2 e^{3x} dx$; 14) $\int x^3 \ln(x - 1) dx$;

15) $\int \frac{3x - x^2 - 2}{x(x + 1)^2} dx$; 16) $\int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx$;

17) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x - 1}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{8 + 4 \cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{\sqrt{3}/7} \frac{dx}{\sqrt{4 + 7x^2}}$; 2) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.

3) $\int_0^1 (e^2 - 5) \cos x dx$; 4) $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

5) $\int_2^7 \frac{\sqrt{x + 2}}{x - 1} dx$; 6) $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$; 7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{1/2\pi}^{\infty} \frac{16 dx}{x^2 + 4x + 5}$; б) $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 2x - x^2 + 3$ та $y = x^2 - 4x + 3$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = x + y^2 - 2xy^3$; б) $z = \cos \sqrt{x^2 + y^3}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, яка задана неявно в точці $M_0(0; 2; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \operatorname{ctg} \sqrt{x^2/x}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 8$, $y = 2x^2$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $3e^x \sin y dx + (-e^x \cos y) dy = 0$; б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x$, $y(0) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy'' = y' + x^2$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 36y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2 + 2$; в) $f(x) = \sin 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$$

Варіант 5

1. Дано числа $z_1 = -8 - 7i$, $z_2 = 6 + 2i$, $z_3 = 14 - i$. Знайти $z_1 \cdot z_2 + 4z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$; $z_2 = -5 + 5i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 8i = 0$, б) $z^3 + 3z^2 + 3z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2 - 7}}{\sqrt{x}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{5 - 3x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$;

4) $\int \cos\left(1 - \frac{3x}{4}\right) dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{2x+1} dx$;

6) $\int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt{\cos 5x}}$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}$;

8) $\int \sin^2 3x \cos x dx$;

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$;

10) $\int \frac{2x+3}{5x^2+2} dx$;

11) $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx$;

12) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$;

13) $\int (x+9) \ln x dx$;

14) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

15) $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} dx$;

16) $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8} dx$;

17) $\int \frac{\sqrt{x}+2}{x-1} dx$;

18) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{3+4x^2}}$;

2) $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$.

3) $\int_0^\pi (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$;

4) $\int_0^{1/5} \arcsin 5x dx$.

5) $\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{1+x} dx$;

6) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$;

7) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x \sqrt{e^x + 1} dx}{e^x - 1}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^\infty \frac{2x+1 dx}{4x^2+4x+5}$;

б) $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{3-4x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = \sqrt{x}/2$, $x = 16$, $2xy = 1$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = x + y - 4(x^2 - y^2)$; б) $z = \sin \sqrt{x - y^3}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$, яка задана неявно в точці $M_0(0; \pi/2; \pi)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \operatorname{tg} \sqrt{xy^3}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y' = e^{2x} / \ln y$; б) $y = x \sqrt{y' - \sqrt{x} e^y}$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy'' = y' \ln(y'/x)$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1/y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $9y'' + y' = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' + y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 6y' + 9y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 - 2$; б) $f(x) = 4 \cos x$; в) $f(x) = x e^{3x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Варіант 6

1. Дано числа $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -2 - 4i$, $z_3 = 3i - 1$. Знайти $3z_1 + z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 3 - 3i$; $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^6 - 3$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 - 9i = 0$, б) $z^3 + 16z^2 + 73z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2x^2 - 5}{\sqrt[4]{x}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{4 - 7x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 9}}$;

4) $\int \sin\left(\frac{2x-4}{5}\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} e^{\arcsin 2x}}$; 6) $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$;

7) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x} dx}{\sin^2 3x}$; 8) $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$; 9) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$;

10) $\int \frac{x-3}{4x^2+1} dx$; 11) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx$; 12) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$;

13) $\int \ln(x^2 + 8) dx$; 14) $\int \arccos(x-2) dx$;

15) $\int \frac{x^3 - 3}{(x-1)(x^2-1)} dx$; 16) $\int \frac{x^2 - 13x + 40}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$;

17) $\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x+5}}$; 18) $\int \frac{dx}{7 \sin x - 3 \cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{3-4x^2}$; 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

3) $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$; 4) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 2x} dx$.

5. а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}$; в) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x (x+3)}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{(x+2) dx}{\sqrt[3]{x^2+4x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 3x}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 32 - x^2$, $y = -4x$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x + y - x^2 y^3$; б) $z = \operatorname{tg}(\sqrt[3]{y^4})$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $3x^2 y^2 + 2x y z^2 - 2x^3 z + 4y^3 z = 4$, яка задана неявно в точці $M_0(2; 1; 2)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \cos(\sqrt{y - 5})$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = \sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}}$, $y = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $3^{x^2+y} dy + x dx = 0$; б) $y' = y/x - 1$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y|_{x=4} = 4$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x y'' + y' = \ln x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y y'' - 2y'^2 = 0, \quad y|_{x=1} = 1, \quad y'|_{x=1} = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $4y'' - 5y' + y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = e^x + 2e^{-x}$; б) $f(x) = \sin 3x$; в) $f(x) = x^2 + 3x$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \operatorname{ctg} x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

Варіант 7

1. Дано числа $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 8i - 3$, $z_3 = i - 1$. Знайти $5z_1 - z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -4 - 4i$; $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^9 + i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 8i = 0$, б) $z^3 + \sqrt{3}z^2 + 3z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt[5]{x^4 + 4}}{\sqrt{x}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{5x - 3}$;

3) $\int \frac{dx}{2x^2 + 7}$;

4) $\int \cos\left(\frac{4-x}{2}\right) dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{3x+1} dx$;

6) $\int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4} \arctg^3 2x}$;

8) $\int \cos 3x \sin^2 4x dx$;

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+5x^2}}$;

10) $\int \frac{x-3}{1-4x^2} dx$;

11) $\int \frac{x dx}{3x^2 + 5x + 1}$;

12) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$;

13) $\int e^{-2x} \arctg^3 x dx$;

14) $\int \arctg \sqrt{3x-1} dx$;

15) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$;

16) $\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx$;

17) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$;

18) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$;

2) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.

3) $\int_0^2 (x+4) \sin 3x dx$;

4) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

5) $\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x+1} dx$;

6) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

7) $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2+4} dx$;

б) $\int_0^1 \frac{2e^{\frac{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 2\sqrt{x}$, $y = 3 - x$, $y = 0$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x^2 - 2xy^3 + y^4$; б) $z = \text{ctg}(x^2 - 2yx)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \sin\sqrt{x^3y}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $x + y + 1 = 0$, $x = -3$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\cos(-2y) + \cos(2y) y' = \sec x$; б) $y'x + x + y = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{2}{x}y = x^2$, $y|_{x=1} = -\frac{4}{5}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' \text{tg} x = y' + 1$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = y' + y'^2, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y' = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $4y'' + 7y' - 2y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 3e^{-2x}$; б) $f(x) = (x-1)\cos 2x$; в) $f(x) = x^2 + 3$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$$

Варіант 8

1. Дано числа $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = 3 - 9i$, $z_3 = 18 + 2i$. Знайти $5z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 7 + 7i$; $z_2 = -\sqrt{12} - 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 + i = 0$, б) $z^3 + 3\sqrt{2}z^2 + 5z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{3\sqrt[3]{x} + 2x}{\sqrt{x}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{3 - 2x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 2x^2}}$;

4) $\int \sin\left(\frac{x+5}{4}\right) dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x} dx}{\cos^2 2x}$;

6) $\int \sqrt{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$;

7) $\int x e^{1-4x^2} dx$;

8) $\int \sin 2x \cos^2 3x dx$;

9) $\int \frac{7x}{5x^2 + 1} dx$;

10) $\int \frac{x-1}{4-x^2} dx$;

11) $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4} dx$;

12) $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx$;

13) $\int x e^{x+2} dx$;

14) $\int \arcsin(x-1) dx$;

15) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx$;

16) $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx$;

17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$;

18) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \sqrt[5]{3-2x} dx$;

2) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3) $\int_0^{\pi/5} (e^2 + 3) \sin 5x dx$;

4) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$.

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+3} dx$;

6) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;

7) $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^{2x} + 1}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = x^2 - y^5$; б) $z = \text{ctg}(y^2/x)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x + y + z + 2 = xyz$, яка задана неявно в точці $M_0(2; -1; -1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arcsin(-2y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x - y - 1 = 0$, $y = 0$, $x = 5$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$; б) $(x^2 + 3xy + y^2)dx + (y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2xy'^2 = 0$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - y' - 6y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 + 2$; б) $f(x) = \cos x - \sin x$; в) $f(x) = xe^{3x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$$

Варіант 9

1. Дано числа $z_1 = 7 - i$, $z_2 = -2 + 8i$, $z_3 = 10 + 4i$. Знайти $z_1 \cdot z_3 - 2z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -1 - i$; $z_2 = -\sqrt{12} + 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^5 + 2i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 4z^2 + 8z = 0$, б) $z^3 + i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2x^3 - 3}{\sqrt[5]{x^2}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{5 + 3x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 3x^2}}$;

4) $\int \cos\left(\frac{2x-1}{3}\right) dx$;

5) $\int \frac{\ln^4(x+1)}{3x+1} dx$;

6) $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$;

7) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx$;

8) $\int \cos 4x \cos^2 3x dx$;

9) $\int \frac{x dx}{4 - 3x^2}$;

10) $\int \frac{x-2}{x^2+9} dx$;

11) $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6} dx$;

12) $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$;

13) $\int x e^{-7x} dx$;

14) $\int x \ln^2 x dx$;

15) $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 + x)(x + 1)} dx$;

16) $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

17) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx$;

18) $\int \frac{2+3\cos x}{1+\cos x} dx$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \sqrt[4]{1+3x} dx$;

2) $\int_0^1 (x^2 + x^2 e^{x^3}) dx$.

3) $\int_0^{\pi} (x-4) \cos 2x dx$;

4) $\int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(x-3) dx$.

5) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$;

6) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4\sin^2 x + 4\sin 2x}$;

7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = x^2$, $y^2 = 4 - x^2$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = xy^4 - 3x^2y + 1$; б) $z = \ln(\sqrt{xy^3} - 1)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, яка задана неявно в точці $M_0(0; 1; -1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arccos(x - y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$; б) $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y|_{x=3} = 3$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2xy'y'' = y'^2 + 1$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''(x+y) = 5y'^2, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 16y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 3e^{4x}$; б) $f(x) = 4\sin x$; в) $f(x) = x + 2e^x$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$$

Варіант 10

1. Дано числа $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = -1 - 4i$, $z_3 = 3i - 5$. Знайти $3z_1 - z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -5 - 5i$; $z_2 = -7\sqrt{3} + 7i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 4z^2 + 6z = 0$, б) $z^4 - 16 = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

$$1) \int \frac{5 - 2\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{3 - 5x}; \quad 3) \int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7 - 2x^2}};$$

$$4) \int \sin\left(\frac{5 - 4x}{3}\right) dx; \quad 5) \int \frac{\sqrt[5]{\arctg x} dx}{1 + x^2}; \quad 6) \int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}};$$

$$7) \int \frac{\sqrt{\tg^3 2x}}{\cos^2 2x} dx; \quad 8) \int \sin^2 3x \sin x dx; \quad 9) \int \frac{3x dx}{\sqrt{4 + 5x^2}};$$

$$10) \int \frac{2x + 5}{5x^2 + 1} dx; \quad 11) \int \frac{2 - x}{4x^2 + 16x - 12} dx; \quad 12) \int \frac{x + 4}{\sqrt{3x^2 + x - 5}} dx;$$

$$13) \int x^2 e^{3x} dx; \quad 14) \int \arcsin 2x dx;$$

$$15) \int \frac{4x dx}{x^2 - 1} dx; \quad 16) \int \frac{x^2 + 23}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)} dx;$$

$$17) \int \frac{x^2}{\sqrt{x - 7}} dx; \quad 18) \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$$

5. Обчислити визначені інтеграли.

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{5 - 4x^2}; \quad 2) \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$3) \int_0^{\pi/2} (e^x + 3) \sin x dx; \quad 4) \int_1^e (x - 8) \ln x dx.$$

$$5) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}}; \quad 6) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{2 \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}; \quad 7) \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + 3} dx.$$

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$а) \int_0^{\infty} x \sin x dx; \quad б) \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x + 3}}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 4x + x^2$, $y = x + 4$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = 2x^3y - \frac{x}{y^2}; \quad \text{б) } z = \ln(\sqrt{xy} - y^2).$$

9. Обчислити значення частинних похідних функції $e^z - xyz - x + 1 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(2; 1; 0)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arctg(x + 2y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$\text{а) } \sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x; \quad \text{б) } y dx + (\sqrt{xy} - x) dy = 0.$$

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - \frac{y'}{x-1} = x - 1$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''(y + 3) - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

$$\text{а) } y'' - 3y' = 0; \quad \text{б) } y'' - 7y' - 8y = 0; \quad \text{в) } y'' + 4y' + 13y = 0.$$

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 4y' = f(x)$, якщо:

$$\text{а) } f(x) = xe^{4x}; \quad \text{б) } f(x) = 3\cos 4x; \quad \text{в) } f(x) = 2x^2 + 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = 1/\sin x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

Варіант 11

1. Дано числа $z_1 = 6 - 8i$, $z_2 = 9 + 7i$, $z_3 = 3i - 3$. Знайти $4z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$; $z_2 = -4 - 4i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 64 = 0$, б) $z^3 + 2z^2 + 4z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt{x^5 - 3x^4}}{x^3} dx$; 2) $\int \frac{dx}{5 + 4x}$; 3) $\int \frac{\sqrt{14} dx}{2x^2 - 7}$;

4) $\int \cos\left(\frac{2x}{3} + 1\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\ln^3(x+5)}$; 6) $\int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$;

7) $\int \frac{e^{2 \operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$; 8) $\int \cos^2 3x \sin 4x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$;

10) $\int \frac{-2x dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$; 11) $\int \frac{2x - 1}{3x^2 - 6x - 9} dx$; 12) $\int \frac{x - 2 dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$;

13) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$; 14) $\int \arcsin(x + 7) dx$;

15) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2}$; 16) $\int \frac{2x^2 + 7x + 7}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$;

17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-4}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$; 2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$.

3) $\int_0^2 (x + 4) \cos 3x dx$; 4) $\int_1^e x \ln^2 x dx$;

5) $\int_0^{\ln^2 \sqrt{x+2}} \frac{dx}{x+3}$; 6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$; 7) $\int_{\ln 3}^0 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7 dx}{(x^2 - 4x) \ln 5}$; б) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1} \ln 2}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = \sqrt{x}/2$, $y = 5 - x$, $x = 0$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$; б) $z = \arctg(x^2/y^3)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(1; -1; 2)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arctg(x - y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = xy - 3x - 2y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $x = 4$, $x = 0$, $y = 4$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $1 + xy' e^y = 0$; б) $(x - y) dx - x^2 dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$4y''^2 = 1 + y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$; в) $y'' + 2y' = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 2y' + 2y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = xe^{4x}$; б) $f(x) = 2\sin x$; в) $f(x) = e^x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y = 1/\sin 2x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Варіант 12

1. Дано числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 9i$, $z_3 = 2i - 4$. Знайти $5z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^6 + 3$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 - 4i = 0$, б) $z^3 - 2z^2 + 10z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

$$1) \int \frac{2 - 3\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^5}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{6 - 3x}; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x^2}};$$

$$4) \int \sin\left(3 - \frac{4x}{5}\right) dx; \quad 5) \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx; \quad 6) \int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt{\sin^3 5x}};$$

$$7) \int \frac{dx}{e^{\operatorname{ctg} x} \sin^2 x}; \quad 8) \int \sin^2 2x \sin 5x dx; \quad 9) \int \frac{3x dx}{\sqrt{1 - 2x^2}};$$

$$10) \int \frac{2x - 4}{x^2 + 16} dx; \quad 11) \int \frac{2x - 1}{3 + x - 2x^2} dx; \quad 12) \int \frac{x - 8}{\sqrt{4x^2 + x - 5}} dx;$$

$$13) \int (x - 2) e^{-x/3} dx; \quad 14) \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$15) \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx; \quad 16) \int \frac{19x - x^2 - 34}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx;$$

$$17) \int \frac{\sqrt{x + 4}}{x} dx; \quad 18) \int \frac{7 + 6\sin x - 5\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

5 Обчислити визначені інтеграли.

$$1) \int_2^3 \frac{dx}{8x^2 - 9}; \quad 2) \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx.$$

$$3) \int_0^{\pi/2} (x + 8) \sin 3x dx; \quad 4) \int_4^5 \arccos(x - 4) dx.$$

$$5) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 + \sqrt{\sin x}} dx; \quad 6) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}; \quad 7) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x + 2}}{e^x + 3} dx.$$

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$а) \int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(9x^2 + 1) \operatorname{arctg}^2 3x}; \quad б) \int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 2 - 2x^2$, $y = -1 - x$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x^2 - 2y^3 + 5xy$; б) $z = \cos(\sqrt{xy^3})$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(0; -2; 2)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \ln(x^2 - 5y^3)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + xy - 2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 4x^2 - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x \geq 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $yy' \operatorname{ctg} x + y^2 = 2$; б) $xy + y^2 = x^2 + xy y'$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + 2xy = -2x^3$, $y|_{x=1} = e^{-1}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$2y'^2 = y - 1 y'', \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $5y'' - 6y' + y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = \cos x - \sin x$; в) $f(x) = x^2 e^x$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$$

Варіант 13

1. Дано числа $z_1 = -3 - 5i$, $z_2 = 8 + 8i$, $z_3 = 4 - i$. Знайти $3z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = -2\sqrt{6} - \sqrt{8}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 2i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 27i = 0$, б) $z^3 - 3z^2 + 4z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{x^3 - \sqrt[4]{x^3}}{3x^2} dx$; 2) $\int \frac{dx}{6 + 5x}$; 3) $\int \frac{dx}{3x^2 - 2}$;

4) $\int \cos\left(\frac{2-3x}{4}\right) dx$; 5) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{3x+4} dx$; 6) $\int \frac{\sin 5x dx}{\cos^4 5x}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + \sqrt{\arctg 2x}}}$; 8) $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$; 9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$;

10) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}} dx$; 11) $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1} dx$; 12) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx$;

13) $\int (-1) \ln x dx$; 14) $\int \arcsin(x+4) dx$;

15) $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx$; 16) $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{2+3x^2}$; 2) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

3) $\int_0^{\pi/4} (x+6) \cos 4x dx$; 4) $\int_0^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$.

5) $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x-1}} dx$; 6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos^2 x + 2}$; 7) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 3}{e^{2x} + 1} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{\pi \cdot \arctg(x/2)}}$; б) $\int_0^3 \frac{x^3 \sqrt{9} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $x = \sqrt{y-2}$ та $x = 4y - 8$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = \sqrt{x+y} + x^2 y^3$; б) $z = \sin(\sqrt{x-2y})$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 2; 0)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = e^{\sqrt{x+2y}}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = xy\sqrt{x-y}$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\frac{e^{-x^2} dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$; б) $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2}$, $y(1) = \frac{2}{3}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y' = 2x^2$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$1 + y'^2 = yy', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 - 2x$; б) $f(x) = -3\cos 2x$; в) $f(x) = e^{-2x} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$$

Варіант 14

1. Дано числа $z_1 = 6 - 7i$, $z_2 = -4 - 3i$, $z_3 = 1 + 7i$. Знайти $z_1 \cdot z_3 - 2z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -3 - 3i$; $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^7 + 4i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 - 1 = 0$, б) $z^3 + 3\sqrt{2}z^2 + 6z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{1 - 7x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 2x^2}}$;

4) $\int \sin\left(\frac{3 - 4x}{2}\right) dx$; 5) $\int e^{1 - 2\sin x} \cos x dx$; 6) $\int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$;

7) $\int \frac{\arctg^4 5x dx}{1 + 25x^2}$; 8) $\int \sin^2 3x \cos 4x dx$; 9) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$;

10) $\int \frac{e^{x-1} dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$; 11) $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x - 2} dx$; 12) $\int \frac{e^{-6} dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$;

13) $\int (e^{-6})^{2x} dx$; 14) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$;

15) $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} dx$; 16) $\int \frac{8}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx$;

17) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+10} dx$; 18) $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_3^8 \sqrt{3x+1} dx$; 2) $\int_0^{1/2} \frac{2x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$.

3) $\int_0^2 x^2 \cos(x+9) dx$; 4) $\int_{1/2}^1 \arcsin(x) dx$.

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x-3} dx$; 6) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$; 7) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x) \ln 3}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $x = y^2 + 1$, $x + y = 3$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = (x - y)^2 + 2y^2x^3$; б) $z = \operatorname{tg} \sqrt{x - y^2}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 + 3xy - yz - 4x - 3y - z = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(1; -1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arcsin(x + y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 2$, $y = -1$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$; б) $\sqrt{xy} - y dx + x dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy'' - y' = 2x^2 e^x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' + y y'^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 2y' - 15y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 4x$; б) $f(x) = x \sin 5x$; в) $f(x) = e^x + 8e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$$

Варіант 15

1. Дано числа $z_1 = -5 - 2i$, $z_2 = 6 + 8i$, $z_3 = 5i - 1$. Знайти $2z_1 - z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -3 + 3i$; $z_2 = 3 - \sqrt{27}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 8 = 0$, б) $z^3 + 6z^2 + 10z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{1+6x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$;

4) $\int \cos\left(\frac{2x+1}{3}\right) dx$; 5) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^3(4x+3)}}{4x+3} dx$; 6) $\int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$;

7) $\int x^3 e^{3x^4+2} dx$; 8) $\int \cos 5x \cos^2 3x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5}}$;

10) $\int \frac{6x+4}{5-2x^2} dx$; 11) $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4} dx$; 12) $\int \frac{e^{x+3}}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx$;

13) $\int (e+3)e^{-x} dx$; 14) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$;

15) $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)} dx$; 16) $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$;

17) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(e^x-1)} dx$; 18) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_{1/2\sqrt{5-4x^2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$.

3) $\int_0^{\pi/7} (e^x+1) \cos 7x dx$; 4) $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

5) $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$; 6) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$; 7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x+3}{e^{2x}-1} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $x = 4 - y^2$, $x - y + 2 = 0$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x^2y^3 + \sqrt{x - y}$; б) $z = \operatorname{ctg} \sqrt{x/\sqrt{x - y}}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(0; 1; -1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arccos \sqrt{x - 5y}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 4\sqrt{x - y} - x^2 - y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x - 2y = 4$, $x = 0$, $x + 2y = 4$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\int e^{3y} \sqrt{x} dx = e^{3y} \sqrt{2x^2 + 1} dy$; б) $xy' + y \ln(y/x) - 1 = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x \sqrt{x+1}$, $y(0) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x(y'' + 1) + y' = 0$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 3y' = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^3 - 4x$; б) $f(x) = e^{3x} \cos x$; в) $f(x) = x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

Варіант 16

1. Дано числа $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -6 + i$, $z_3 = 2 - 4i$. Знайти $2z_1 - z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = i - \sqrt{3}$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 2$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - z^2 + 2z = 0$, б) $z^3 + 27 = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{3 - 2x}$; 3) $\int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}$;

4) $\int \cos\left(\frac{1+x}{2}\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1} \ln \sqrt[4]{x+1}}$; 6) $\int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$;

7) $\int \frac{\arcsin^3 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 8) $\int \cos^2 2x \cos 3x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{7x^2 - 4}$;

10) $\int \frac{2x-3}{4+3x^2} dx$; 11) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx$; 12) $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$;

13) $\int (x+1)e^{2x} dx$; 14) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx$;

15) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$; 16) $\int \frac{3x+13}{x^2+2x+5} dx$;

17) $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{2x+3}}$; 18) $\int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$; 2) $\int_0^{\sqrt{8}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$.

3) $\int_0^{\pi/4} 3x \cos 4x dx$; 4) $\int_2^3 x \ln(x-1) dx$.

5) $\int \frac{29 \sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x^2}} dx$; 6) $\int_0^{\pi/6} \frac{2 dx}{3 \sin 2x - 5 \cos 2x}$; 7) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$; б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = \sqrt{x-2}$ та $y = 4x - 8$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 2x^3y - 4xy^5$; б) $z = \ln(x^2 - e^{-x})$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, яка задана неявно в точці $M_0(2; 1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arctg(x + 1/y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 3x + y - xy$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $(x + y)e^{x+3y} dy = x dx$; б) $(y - xy') \cos(y/x) = x$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(-x^2 y'' - xy') = 2$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = y' e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + y' + y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 2x - 1$; б) $f(x) = 2 \sin x$; в) $f(x) = 2e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 17

1. Дано числа $z_1 = 4i - 2$, $z_2 = 3 + 6i$, $z_3 = 1 - 8i$. Знайти $5z_1 + z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^6 - 1$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - \sqrt{3}z^2 + 7z = 0$, б) $z^4 + 9i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^3}{x^2} dx$;

2) $\int \frac{dx}{3x + 9}$;

3) $\int \frac{dx}{2x^2 - 3}$;

4) $\int \sin\left(\frac{3+2x}{4}\right) dx$;

5) $\int \frac{x}{e^{3x^2-1}} dx$;

6) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$;

7) $\int \frac{\arccos^7 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$;

8) $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$;

9) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+3x^2}}$;

10) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{5-4x^2}} dx$;

11) $\int \frac{x+6}{3x^2-8x-3} dx$;

12) $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$;

13) $\int (-2)^{5x-1} dx$;

14) $\int (-1) \ln^2 x dx$;

15) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx$;

16) $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$;

17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$;

18) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 2\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{4+3x^2}$;

2) $\int_0^1 \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}} dx$.

3) $\int_0^\pi (x+3) \cos 3x dx$;

4) $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

5) $\int_0^4 \frac{dx}{3x + \sqrt{2x+1}}$;

6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x}$;

7) $\int_1^{\ln 2} \frac{dx}{e^x (e^x + 1)}$

6. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^\infty \frac{16x dx}{16x^4 - 1}$;

б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 1 - x^2$ та $y = 2x - 2$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = x^2y - 3y \cdot \sin x$; б) $z = \arcsin \sqrt{xy^3}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, яка задана неявно в точці $M_0(-1; 0; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \sin \sqrt{y}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = xy - x - 2y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = x$, $y = 0$, $x = 3$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y' \cdot \sin x = y \ln y$; б) $y^2 - 3x^2 dy + 2xy dx = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - y \operatorname{ctg} x = 2 \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2xy' y'' = y'^2 - 1$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'^2 + 2yy'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 2y' + 5y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 4x + 3$; б) $f(x) = 3e^{2x}$; в) $f(x) = e^{-x} \cdot \cos 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

Варіант 18

1. Дано числа $z_1 = -9 - i$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = -6 - 3i$. Знайти $z_1 \cdot z_3 + 4z_2$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -i + 1$; $z_2 = -3 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^5 + 2i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + \sqrt{2}z^2 + 4z = 0$, б) $z^3 + 27i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2\sqrt[5]{x-x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{2-3x}$; 3) $\int \frac{dx}{2x^2-3}$;

4) $\int \cos \sqrt{-5x} dx$; 5) $\int \frac{dx}{(-2x)\sqrt[3]{\ln^2(-2x)}}$; 6) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} x dx$;

7) $\int \frac{dx}{(+4x^2)\sqrt{\arctg 2x}}$; 8) $\int \cos^2 2x \cos 5x dx$; 9) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3x^2+1}}$;

10) $\int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx$; 11) $\int \frac{2x-1}{3x^2-9x+6} dx$; 12) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx$;

13) $\int x^2 e^{-x} dx$; 14) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;

15) $\int \frac{3x^2+1}{(-1)\sqrt{-1}} dx$; 16) $\int \frac{12-6x}{(+1)\sqrt{-4x+13}} dx$;

17) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$; 18) $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{2 + \cos x} dx$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$; 2) $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2+1} dx$.

3) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{x-1} \cos 4x dx$; 4) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x/2}}{\sqrt{2-x}} dx$.

5) $\int_0^5 \frac{dx}{3x + \sqrt{3x+1}}$; 6) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{2\sin^2 x - \cos^2 x}$; 7) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+2} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{6-x^5}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 4 - x^2$ та $y = x^2 - 2x$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = x^3 y^4 - x \cos y$; б) $z = \arctg \sqrt{x + y}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $3x - 2y + z = xz + 5$, яка задана неявно в точці $M_0(2; 1; -1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 2$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $xy' = (x-1) \operatorname{ctg} y$; б) $(x+2y) dx - xdy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y(0) = 0$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x^3 y'' + x^2 y' = 1$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' + y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $2y'' + y' - y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 4x + 1$; б) $f(x) = x \sin x$; в) $f(x) = (x^2 - 5)e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Варіант 19

1. Дано числа $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = -4 + 5i$, $z_3 = 7 + 8i$. Знайти $3z_1 + z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -\sqrt{12} - 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 3i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 2z^2 + 3z = 0$, б) $z^4 + 16i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^6}}{x} dx$; 2) $\int \frac{dx}{1-4x}$; 3) $\int \frac{2dx}{9x^2-3}$;

4) $\int \sin\left(\frac{2-x}{3}\right) dx$; 5) $\int \frac{x^4 dx}{e^{x^5+1}}$; 6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 3x} dx$; 8) $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2-4}}$;

10) $\int \frac{x+3}{3x^2+4} dx$; 11) $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$; 12) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$;

13) $\int (e+1)e^{-4x} dx$; 14) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$;

15) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx$; 16) $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$;

17) $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$; 18) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{1-8x^2}$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

3) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$; 4) $\int_2^3 x^2 \ln(x-1) dx$.

5) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$; 6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x} dx$; 7) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{x-1}{\sqrt{e^x+1}} dx$

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4-1}} dx$; б) $\int_0^{1/3} \frac{e^{3-1/x}}{x^2} dx$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій та $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = \sqrt{xy} - 3xy^2$; б) $z = \cos(x^3 - 2xy)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $e^z + x + 2y + z = 4$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 1; 0)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \operatorname{tg}(xy^2)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 1$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $(x^2 + 1) \operatorname{tg} y dy + x^3 \cos^2 y dx = 0$; б) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' + 2yy'^3 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $2y'' - 9y' + 4y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = -2e^{4x}$; б) $f(x) = e^x \cos 4x$; в) $f(x) = 2x^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$$

Варіант 20

1. Дано числа $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -8 + 3i$, $z_3 = 1 + 11i$. Знайти $2z_3 - z_1 \cdot z_2$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$; $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^9 + 3$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - \sqrt{3}z^2 + 3z = 0$, б) $z^3 + 27 = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5}{x^2} dx$;

2) $\int \frac{dx}{2 + 3x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 9x^2}}$;

4) $\int \cos(2x) dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{\ln^2(-2x)}}{2x-1} dx$;

6) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$;

8) $\int \sin^2 2x \sin 3x dx$;

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + 5x^2}}$;

10) $\int \frac{3x - 2}{2x^2 + 7} dx$;

11) $\int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx$;

12) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 9}} dx$;

13) $\int 3x^2 e^{1-2x} dx$;

14) $\int \ln(x^2 + 1) dx$;

15) $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx$;

16) $\int \frac{x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx$;

17) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}$;

18) $\int \frac{dx}{5 \cos x + 10 \sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{3 - 2x^2}$;

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$.

3) $\int_0^{\pi/3} (x + 2) \cos 2x dx$;

4) $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$.

5) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx$;

6) $\int_0^{\pi/3} \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$;

7) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} + 1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$;

б) $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(x-1)}{3x-1} dx$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; б) $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 1; -1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \sin(x^2 - y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x - y + 1 = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $(e^x y) dy - e^y dx = 0$; б) $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(1) = \frac{3}{2}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' x \ln x = y'$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 49y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 + 4x$; б) $f(x) = 3 \sin 7x$; в) $f(x) = xe^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$$

Варіант 21

1. Дано числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_3 = -8 - 3i$. Знайти $z_1 \cdot z_2 + 3z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -3 - 3i$; $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 2i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 4z^2 + 16z = 0$, б) $z^4 - 16i = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx$; 2) $\int \frac{dx}{2 - 5x}$; 3) $\int \frac{dx}{7x^2 - 4}$;

4) $\int \sin\left(\frac{3-5x}{2}\right) dx$; 5) $\int e^{\sin x + 1} \cos x dx$; 6) $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}$; 8) $\int \cos^2 3x \sin 5x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-5x^2}}$;

10) $\int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$; 11) $\int \frac{3x-2}{8-2x-x^2} dx$; 12) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$;

13) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; 14) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$;

15) $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$; 16) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx$;

17) $\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{3+2\cos x - \sin x}$.

5 Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$; 2) $\int_{3/4}^{4/3} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$.

3) $\int_0^{\pi/4} (x-2) \cos 4x dx$; 4) $\int_1^2 (y-1) \ln y dy$.

5) $\int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+5} dx$; 6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x}$; 7) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+8}}$; б) $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = y \cdot \operatorname{tg} x + y\sqrt{x}$; б) $z = \cos(\sqrt{x} - y^2)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arctg(\sqrt[3]{x} + \sqrt{y})$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x + y - 1 = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y^2 + 3 \int dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$; б) $y^2 + x^2 y' = x y y'$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x y'' - y' = x^2 e^x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$2y y'' = y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' + 2y' + 17y = 0$; в) $y'' - y' - 12y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $3y'' + 10y' + 3y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = 2 \cos 3x$; в) $f(x) = 2x^2 + 5$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + y = x e^x + \frac{1}{x e^x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$

Варіант 22

1. Дано числа $z_1 = -1 - 9i$, $z_2 = 6 + 2i$, $z_3 = 12 - i$. Знайти $5z_1 + z_2 \cdot z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$; $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^6 - 1$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - \sqrt{5}z^2 + 5z = 0$, б) $z^3 - 1 = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt{x^3 - 7x^5}}{x^2} dx$; 2) $\int \frac{dx}{3x - 2}$; 3) $\int \frac{3dx}{7x^2 - 4}$;

4) $\int \cos\left(4 + \frac{x}{2}\right) dx$; 5) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+1)} dx}{3x+1}$; 6) $\int \frac{\cos x}{\sin x + 2} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x \sqrt{\operatorname{tg}^3 2x}}$; 8) $\int \sin 2x \cos^2 7x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3+4x^2}}$;

10) $\int \frac{5+x}{3x^2+1} dx$; 11) $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx$; 12) $\int \frac{5x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$;

13) $\int (x-4) \ln x dx$; 14) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx$;

15) $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx$; 16) $\int \frac{36x}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

17) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$; 18) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$; 2) $\int_0^1 x e^{-2x^2} dx$.

3) $\int_0^{\pi/4} (x-2) \cos 8x dx$; 4) $\int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx$.

5) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} dx$; 6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\sin^2 x - \sin 2x}$; 7) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{6+x^2}}$; б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{(-x) \ln^2(-x)}$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x^2y + 2y^3x^4$; б) $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3} + x$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, яка задана неявно в точці $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arcsin(-y^3)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x + y + 2 = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\sin y \cos^2 x dy = \cos y \sin x dx$; б) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' x \ln x = 2y'$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - y'^2 = y^4, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + y' - 6y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = xe^{2x}$; б) $f(x) = 3\cos 4x$; в) $f(x) = x + 2e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

Варіант 23

1. Дано числа $z_1 = 3 + 6i$, $z_2 = 9 - 2i$, $z_3 = -2 - 7i$. Знайти $z_1 \cdot z_2 + 2z_3$; z_1/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 4 - 4i$; $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^7 + 2i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - \sqrt{2}z^2 + 5z = 0$, б) $z^4 + 16 = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2x^4}{x} dx$; | 2) $\int \frac{dx}{2x + 3}$; | 3) $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}$; |
| 4) $\int \sin \left(\frac{1}{5x} \right) dx$; | 5) $\int \frac{x dx}{e^{1-2x^2}}$; | 6) $\int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$; |
| 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 9x^2} \arctg^5 3x}$; | 8) $\int \cos^2 3x \cos 8x dx$; | 9) $\int \frac{4x dx}{2 - 5x^2}$; |
| 10) $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{7 - 3x^2}} dx$; | 11) $\int \frac{x + 4}{2x^2 - 7x + 1} dx$; | 12) $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx$; |
| 13) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$; | 14) $\int \arctg 4x dx$; | |
| 15) $\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx$; | 16) $\int \frac{9x - 9}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx$; | |
| 17) $\int \frac{\sqrt{x + 2} dx}{x - 3}$; | 18) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$. | |

5. Обчислити визначені інтеграли.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$; | 2) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 4}} dx$. | |
| 3) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$; | 4) $\int_0^1 e^{-4x} x^2 dx$. | |
| 5) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} - 1}{2 + \sqrt{x}} dx$; | 6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{5 \cos 2x + 2 \sin^2 x}$; | 7) $\int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} dx$. |

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

- | | |
|--|---|
| а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$; | б) $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(x - 3x)} dx}{2 - 3x}$. |
|--|---|

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $xy=6$, $x+y=7$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$; б) $z = xe^{-x^2+y^3}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, яка задана неявно в точці $M_0(2; \pi/2; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arccos(x+y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y=1$, $x=1$, $x=0$, $y=0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y' = y^2 + y \operatorname{tg} x$; б) $xy' = y - xe^{y/x}$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y|_{x=\pi} = \frac{1}{\pi}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x^2y'' + xy' = 1$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = -\frac{1}{2y^3}, \quad y|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad y'|_{x=1} = \sqrt{2}.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = \sin 2x + 2e^x$; б) $f(x) = x^2 - 4$; в) $f(x) = x^2 e^{2x}$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$$

Варіант 24

1. Дано числа $z_1 = 8 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 4 - 3i$. Знайти $5z_1 - z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 4 - 4i$; $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 5$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 + 9 = 0$, б) $z^3 - z^2 + z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{3\sqrt{x^7} - 4}{x^3} dx$; 2) $\int \frac{dx}{2 + 7x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$;

4) $\int \sin\left(\frac{3 - 4x}{7}\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$; 6) $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$;

7) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; 8) $\int \cos 2x \sin^2 5x dx$; 9) $\int \frac{2x dx}{3 + 5x^2}$;

10) $\int \frac{3x - 3}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx$; 11) $\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 2x - 7} dx$; 12) $\int \frac{-9 dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$;

13) $\int x^3 e^{-x^2} dx$; 14) $\int \arccos x dx$;

15) $\int \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$; 16) $\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 13} dx$;

17) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x - 2}}$; 18) $\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{6 - 5x^2}$; 2) $\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$.

3) $\int_0^2 (x + 2) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$; 4) $\int_{-1}^0 x \ln(-x) dx$.

5) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} dx$; 6) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{3 - 2 \sin^2 x}$; 7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $x = 4 - y^2$ та $x = y^2 - 2y$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = y^2 - 3xy - x^4 y^3$; б) $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^3}}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$, яка задана неявно в точці $M_0(4; 3; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \sin \sqrt{x/y}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x = 3$, $y = 0$, $y = x + 1$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\sin(x + y) \overset{\sim}{=} \sin(x - y) \overset{\sim}{=} dx = dy / \sin y$; б) $(x^2 + y^2) \overset{\sim}{=} dx + 2xydy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y' = \cos 2x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 10y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 7y' + 12y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 2e^x$; б) $f(x) = 3x \sin 2x$; в) $f(x) = xe^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

Варіант 25

1. Дано числа $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 2 + 7i$, $z_3 = -3 - 6i$. Знайти $z_2 \cdot z_3 - 3z_1$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{12} - 2i$; $z_2 = -2 + 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^9 - 3i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 8 = 0$, б) $z^3 + 3z^2 + 9z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt{x-3x^2}}{2\sqrt{x^3}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{7-3x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$;

4) $\int \cos\left(\frac{2-3x}{4}\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\ln^4(x+3)}$; 6) $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$;

7) $\int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 8) $\int \cos^2 4x \sin 3x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+1}}$;

10) $\int \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+9}} dx$; 11) $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx$; 12) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}} dx$;

13) $\int (e^2 - 3)e^x dx$; 14) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$;

15) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$; 16) $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx$;

17) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 2) $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt[4]{2-5x^2}}$.

3) $\int_0^{\pi/3} \left(\frac{4x+1}{5}\right) \sin 2x dx$; 4) $\int_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}} dx$.

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+3}}{x+1} dx$; 6) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}$; 7) $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; б) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 11 - x^2$, $y = -10x$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x^2 - y^2x^3 + y^4$; б) $z = \arccos(x^2 + y^2)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$, яка задана неявно в точці $M_0(3; 1; 4)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \cos(x^2 - y^3)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 2$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2} dy + \cos y \sqrt{1+x^2} dy$; б) $(y^2 - 2xy) dx - x^2 dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{2y}{x+1} = x+1$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' = \sin x$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$y(-\ln y) y'' + (\ln y) y'^2 = 0$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 5y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 6y' + 8y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 9y' = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 4x - 3$; б) $f(x) = e^{2x} \sin x$; в) $f(x) = \sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos x$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$$

Варіант 26

1. Дано числа $z_1 = -2 - 6i$, $z_2 = 1 - 18i$, $z_3 = 2 + 3i$. Знайти $4z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 6 - 6i$; $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 + 1 = 0$, б) $z^3 - \sqrt{5}z^2 + 5z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{5 - 2x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x^2}}$;

4) $\int \sin\left(\frac{2 + 5x}{3}\right) dx$; 5) $\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx$; 6) $\int \sin^4 8x \cos 8x dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{\tg 4x}}{\cos^2 4x} dx$; 8) $\int \sin^2 3x \sin 7x dx$; 9) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$;

10) $\int \frac{3 - 2x}{x^2 - 8} dx$; 11) $\int \frac{x + 2}{2x^2 - 3x + 1} dx$; 12) $\int \frac{3x - 4}{\sqrt{2x^2 - 6x + 1}} dx$;

13) $\int x e^{-4x} dx$; 14) $\int \ln \frac{2 - x}{2 + x} dx$;

15) $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x + 1} dx$; 16) $\int \frac{4x^2 + 7x + 5}{x^2 + 2x + 5} dx$;

17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x - 2}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 3}$; 2) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

3) $\int_0^{\pi} (x + 4) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$; 4) $\int_1^2 \ln(x + 2) dx$.

5) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}} dx$; 6) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$; 7) $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3}}{e^x + 2} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x + 1)}$; б) $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = 3\sqrt{x}$, $xy = 3$, $x = 4$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = \sqrt{x^2 + 3y^2} + x^3 y^2$; б) $z = \arcsin(\sqrt{x - y^2})$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$, яка задана неявно в точці $M_0(-2; -1; 2)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arctg(\sqrt{x + 2y})$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y' \sqrt{1 - x^2} - x \cdot \cos^2 y = 0$; б) $(x + 2y) dx + x dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - y \cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x^2 y'' = y'^2$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''(x + y) = y'^2 + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 5y' + 4y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 4y' + 5y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = x \cos 2x$; в) $f(x) = -2x e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - y' = e^{2x} \sin x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$$

Варіант 27

1. Дано числа $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -5 - 3i$, $z_3 = 1 - 9i$. Знайти $3z_2 - z_3 \cdot z_1$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 3 - \sqrt{3}i$; $z_2 = -2 - 2i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^5 + 2i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 64 = 0$, б) $z^3 - 4z^2 + 12z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{\sqrt[4]{x^5 - 3x^3}}{x^2} dx$; 2) $\int \frac{dx}{2x+7}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$;

4) $\int \cos\left(\frac{4-2x}{3}\right) dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{5x+6} dx$; 6) $\int \sin^5 4x \cos 4x dx$;

7) $\int \frac{dx}{(9x^2 + 1)e^{\arctg 3x}}$; 8) $\int \cos^2 4x \cos 3x dx$; 9) $\int \frac{4x dx}{5+3x^2}$;

10) $\int \frac{x-5}{8-4x^2} dx$; 11) $\int \frac{x-2}{x^2+5x-1} dx$; 12) $\int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}} dx$;

13) $\int (x+2)e^{-3x} dx$; 14) $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$;

15) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx$; 16) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} dx$;

17) $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{8x^2+9}$; 2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

3) $\int_0^3 (x+1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$; 4) $\int_0^2 x \ln(x+7) dx$.

5) $\int_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{x-3} dx$; 6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$; 7) $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x+2}} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$; б) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = e^{-1}$, $y^2 = x - 1$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = \frac{x^3}{y} - x^2 y^3$; б) $z = \ln(y^2 - e^{-x})$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $x^3 + 3xyz - z^3 = 27$, яка задана неявно в точці $M_0(3; 1; 3)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \ln(x^2 - 3y^4)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 4 - 2x^2 - y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $e^x \operatorname{tg} y dx = (-e^x) \sec^2 y dy$; б) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -1/2$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2xy'' y' = y'^2 - 4$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = y' / \sqrt{y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 3y' + 2y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = e^{-7x}$; б) $f(x) = 3 \sin x$; в) $f(x) = x^2 + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

Варіант 28

1. Дано числа $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = 9 - i$, $z_3 = 6 + 11i$. Знайти $5z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^7 + 5$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 + 4i = 0$, б) $z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^2}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{2x + 9}$; 3) $\int \frac{dx}{4x^2 + 7}$;

4) $\int \sin\left(\frac{4x+2}{2}\right) dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}}$; 6) $\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt[3]{\cos 4x}}$;

7) $\int \frac{x^2 dx}{e^{2x^3+1}}$; 8) $\int \cos 4x \sin^2 5x dx$; 9) $\int \frac{x dx}{3x^2 - 1}$;

10) $\int \frac{x+4}{7x^2+3} dx$; 11) $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1} dx$; 12) $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}} dx$;

13) $\int x e^{-5x} dx$; 14) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

15) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$; 16) $\int \frac{6x}{x^3 - 1} dx$;

17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+6}} dx$; 18) $\int \frac{dx}{4 - 4\sin x + 3\cos x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$; 2) $\int_0^2 x \sqrt{3 + 2x^2} dx$.

3) $\int_0^4 (x+2) \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$; 4) $\int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx$.

5) $\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$; 6) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$; 7) $\int_{\ln 6}^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3} dx}{e^x - 2}$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}}$; б) $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{6-x^2}}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $x = \sqrt{4 - y^2}$ та $x = 0, y = 1$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 7x - x^3y^2 + y^4$; б) $z = \cos(x - y) \sqrt{x^2 + y^2}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$, яка задана неявно в точці $M_0(1; 1; 3)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \operatorname{arctg}(x - 4y)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y = -1, y = 1, x = 1, x = -1$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$; б) $2x^3y' = y(x^2 - y^2)$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'''x \ln x = y''$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1 + y'^2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' - 8y' + 16y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 2x + 5x^2$; б) $f(x) = \cos 4x$; в) $f(x) = 2xe^{4x}$; $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$$

Варіант 29

1. Дано числа $z_1 = 5 + 8i$, $z_2 = 9i - 1$, $z_3 = -8 - 3i$. Знайти $z_1 \cdot z_2 - 3z_3$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = -5 - 5i$; $z_2 = -3 + \sqrt{27}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + 4i$; $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 + 81 = 0$, б) $z^3 - 2\sqrt{5}z^2 + 10z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\int \frac{\sqrt{x^5 - 3}}{4x^2} dx;$ | 2) $\int \frac{dx}{7x - 3};$ | 3) $\int \frac{2dx}{4 + 3x^2};$ |
| 4) $\int \cos\left(\frac{1 - 3x}{4}\right) dx;$ | 5) $\int \frac{\ln^6(x + 9)}{4x + 9} dx;$ | 6) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}};$ |
| 7) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx;$ | 8) $\int \sin^2 3x \sin 5x dx;$ | 9) $\int \frac{x dx}{3x^2 + 1};$ |
| 10) $\int \frac{3x + 5}{\sqrt{2x^2 - 1}} dx;$ | 11) $\int \frac{3x + 5}{2x^2 + x - 6} dx;$ | 12) $\int \frac{3x - 7}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}} dx;$ |
| 13) $\int x^2 e^{x+3} dx;$ | 14) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x + 1}} dx;$ | |
| 15) $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx;$ | 16) $\int \frac{5x^2 + 17x + 36}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)} dx;$ | |
| 17) $\int \frac{1}{3 + \sqrt{x - 6}} dx;$ | 18) $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}.$ | |

5. Обчислити визначені інтеграли.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\int_0^1 \sqrt[4]{6 + 5x} dx;$ | 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx.$ | |
| 3) $\int_0^{\pi} (x + 3) \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx;$ | 4) $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx.$ | |
| 5) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x + 3}}{x + \sqrt{x + 3}} dx;$ | 6) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x};$ | 7) $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}} dx.$ |

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

- | | |
|--|--|
| а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2};$ | б) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$ |
|--|--|

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $xy=2$, $y=7e^x$, $y=2$, $y=7$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = e^{y-x}(x^2 + y^3x)$; б) $z = \sin\sqrt{y/(x+y)}$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(2; 1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \ln(y^3 - 4)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y=0$, $x+y=6$, $x=0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $\cos^3 y y' - \cos(x+y) = \cos(x-y)$; б) $x^2 y' = y(x+y)$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(x+x^3)}{3}$, $y(0) = 0$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y y'' - 2y y' \ln y = y^{1/2} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; б) $y'' + 16y = 0$; в) $4y'' - 4y' + y = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + y' - 2y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = x \cos 2x$; в) $f(x) = (x-1)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$$

Варіант 30

1. Дано числа $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 2 - 7i$, $z_3 = -4 - 8i$. Знайти $5z_1 + z_3 \cdot z_2$; z_2/z_3 .

2. Представити комплексні числа $z_1 = 3 - 3i$; $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^8 + i + 1$; $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Розв'язати рівняння: а) $z^4 - 4 = 0$, б) $z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z = 0$.

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1) $\int \frac{2x^3 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{6x+1}$; 3) $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2+3}}$;

4) $\int \sin(-2x) dx$; 5) $\int x e^{3x^2+1} dx$; 6) $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 2x}}{\sin^2 2x} dx$; 8) $\int \cos^2 4x \cos 7x dx$; 9) $\int \frac{x}{\sqrt{4+9x^2}} dx$;

10) $\int \frac{2-3x}{2x^2+3} dx$; 11) $\int \frac{x-4}{x^2+7x+11} dx$; 12) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx$;

13) $\int (-9) \ln \frac{x}{2} dx$; 14) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

15) $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2} dx$; 16) $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

17) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$; 18) $\int \frac{dx}{2-3\cos x + \sin x}$.

5. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{2dx}{4-3x^2}$; 2) $\int_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}$;

3) $\int_0^1 (x+3) \cos(x-x) dx$; 4) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

5) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$; 6) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{4\cos^2 x - 5\sin^2 x}$; 7) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-1}{e^x+3} dx$.

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $xy=1$, $y=x^2$, $y=2$, $x=0$.

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а) $z = 3x^2y^3 + 5\sqrt{-2y}$; б) $z = \arctg(x-y)$.

9. Обчислити значення частинних похідних функції $z^2 = xy - z + x^2 - 4$, яка задана неявно в точці $M_0(2; 1; 1)$.

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \operatorname{tg}(y^2)$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

11. Дослідити функцію $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $y=0$, $y=6$, $x=1$, $x=0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $3y^{2-x^2} = yy'/x$; б) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші $y' - y \cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x^2 y'')' = 2xy$, яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1/\sqrt{y}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 12y' + 37y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 3y' - 4y = f(x)$, якщо:

а) $f(x) = 6xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2 \sin 2x$; в) $f(x) = e^x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$$

Розв'язання типового варіанта завдання

1. Дано числа $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - i$, $z_3 = i - 1$. Знайти $z_1 \cdot z_2 - 3z_3$; z_2/z_1 .

Обчислюємо:

$$z_1 \cdot z_2 - 3z_3 = (3 + 2i)(4 - i) - 3(i - 1) = (12 + 8i - 3i - 2i^2) - 3(i - 1) = 14 + 5i - 3i + 3 = 17 + 2i.$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4 - i}{3 + 2i} = \frac{(4 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{10 - 11i}{9 + 4} = \frac{10}{13} - \frac{11}{13}i.$$

2. Представити комплексні числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$; $z_2 = 8i$ в тригонометричній формі при $\varphi \in [0, 2\pi)$ знайти $z_1^6 + 2i$; $\sqrt[3]{z_2}$.

Представимо основу $1 - i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі:

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

і скористаємося формулою Муавра:

$$(1 - i\sqrt{3})^6 = 2^6 \left(\cos \left(6 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) \right) = 64 (\cos 10\pi + i \sin 10\pi) = 64.$$

Отже, $z_1^6 + 2i = 64 + 2i$.

Далі запишемо модуль та аргумент числа $z = 8i$: $p = |z| = 8$ та $\varphi = \arg z = \pi/2$ і скористаємося формулою значень $\sqrt[n]{z}$ для $n = 3$. Покладаючи в цій формулі послідовно $k = 0, 1, 2$, дістаємо такі три значення $\sqrt[3]{8i}$:

$$w_0 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi/2}{3} + i \sin \frac{\pi/2}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi/2 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 2\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi/2 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i.$$

3. Розв'язати рівняння: а) $z^3 - 2z^2 + 4z = 0$, б) $z^3 + 125 = 0$.

а) $z^3 - 2z^2 + 4z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ або $z^2 - 2z + 4 = 0$.

$$\text{Звідки } z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

б) $z^3 + 125 = 0$, тоді $z^3 = -125$, $z = \sqrt[3]{-125}$.

Запишемо модуль та аргумент числа $z = -125$: $p = |z| = 125$ та $\varphi = \arg z = \pi$ і, використавши формулу значень $\sqrt[3]{z}$, дістаємо такі три значення $\sqrt[3]{-125}$:

$$w_0 = \sqrt[3]{125} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 5 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{125} (\cos \pi + i \sin \pi) = 5(-1 + 0i) = -5,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{125} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 5 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Отже, корені рівняння $\frac{5}{2} \pm i \frac{5\sqrt{3}}{2}$ та -5 .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

$$1) \int \frac{3 - 2x^4 + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$$

Поділимо чисельник підінтегральної функції на знаменник та зведемо інтеграл до інтегрування степеневих функцій використовуючи формулу:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

$$\int \frac{3 - 2x^4 + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx = 3 \int x^{-\frac{1}{4}} dx - 2 \int x^{\frac{15}{4}} dx + 3 \int dx = 3 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} - 2 \frac{x^{\frac{19}{4}}}{\frac{19}{4}} + 3x + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19} \sqrt[4]{x^{19}} + 3x + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19} \sqrt[4]{x^{19}} + 3x + C \right)' = 4 \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - \frac{8}{19} \cdot \frac{19}{4} x^{\frac{15}{4}} + 3 = 3 \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 2\sqrt[4]{x^{15}} + 3 = \frac{3 - 2x^4 + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{9 - 11x}.$$

Зведемо до табличного інтеграла $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

$$\text{Маємо: } \int \frac{dx}{9 - 11x} = -\frac{1}{11} \int \frac{d(9 - 11x)}{9 - 11x} = -\frac{1}{11} \ln|9 - 11x| + C.$$

Виконаємо перевірку результату:

$$\left(-\frac{1}{11} \ln|9 - 11x| + C \right)' = -\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{9 - 11x} \cdot (-11) = \frac{1}{9 - 11x}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{3} dx}{3 - 4x^2}.$$

Винесемо множник 4 із знаменника, щоб звести даний інтеграл до табличного

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$$

$$\text{Маємо } \int \frac{\sqrt{3} dx}{3 - 4x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{dx}{\frac{3}{4} - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{3}}{2x - \sqrt{3}} \right| + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{3}}{2x - \sqrt{3}} \right| + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} \cdot \frac{2(x - \sqrt{3}) - 2(x + \sqrt{3})}{(x - \sqrt{3})^2} = \frac{1}{4} \frac{4x - 2\sqrt{3} - 4x - 2\sqrt{3}}{4x^2 - 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3 - 4x^2}.$$

4) $\int \cos e^{-5x} dx.$

$$\int \cos e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} \int \cos e^{-5x} d e^{-5x} = -\frac{1}{5} \sin e^{-5x} + C.$$

5) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2} dx.$

$$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2} dx = \int \ln^3(x+2)^{\frac{3}{7}} d \ln(x+2) = \frac{7}{10} \ln^{\frac{10}{7}}(x+2) + C = \frac{7}{10} \sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)} + C.$$

6) $\int \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx.$

$$\int \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int \cos^4 2x d \cos 2x = -\frac{1}{2} \frac{\cos^6 2x}{6} + C = -\frac{\cos^6 2x}{12} + C.$$

7) $\int \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2}.$

$$\int \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2} = \int \arctg^2 x d \arctg x = \frac{\arctg^3 x}{3} + C$$

8) $\int \sin^2 3x \cos 5x dx.$

Використовуючи тригонометричні формули, представимо підінтегральну функцію у вигляді суми:

$$\int \sin^2 3x \cos 5x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x \cos 6x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{4} \int \cos 11x - \frac{1}{4} \int \cos x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{11} \sin 11x - \frac{1}{4} \sin x + C =$$

$$= \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{44} \sin 11x - \frac{1}{4} \sin x.$$

9) $\int \frac{7x dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$

$$\int \frac{7x dx}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{7}{8} \int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{7}{8} \cdot 2\sqrt{9-4x^2} + C = -\frac{7}{4} \sqrt{9-4x^2} + C.$$

$$10) \int \frac{3-7x}{4x^2+5} dx.$$

Розіб'ємо інтеграл на два. Перший з яких зведеться до табличного, а в другому інтегралі внесемо x під знак диференціалу, оскільки $d(x^2+5) = 8x$ і з урахуванням константи, $7x dx = \frac{7}{8} d(x^2+5)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3-7x}{4x^2+5} dx &= 3 \int \frac{dx}{4x^2+5} - 7 \int \frac{x dx}{4x^2+5} = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{4}} - \frac{7}{8} \int \frac{d(x^2+5)}{4x^2+5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \\ & - \frac{7}{8} \ln(x^2+5) + C = \frac{3}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8} \ln(x^2+5) + C. \end{aligned}$$

$$11) \int \frac{3x-6}{2-5x-x^2} dx.$$

Виділимо у чисельнику підінтегрального виразу похідну квадратного тричлена та представимо даний інтеграл у вигляді суми двох, залишивши похідну в чисельнику першого дробу, а константу у другому:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-6}{2-5x-x^2} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{d(2x-5)}{2-5x-x^2} - \frac{3}{2} \cdot 9 \int \frac{dx}{2-5x-x^2} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \int \frac{dx}{x^2+5x-2} = -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \int \frac{dx}{x+\frac{5}{2}-\frac{25}{4}-2} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \int \frac{d(x+\frac{5}{2})}{x+\frac{5}{2}-\frac{33}{4}} = -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{33}} \ln \left| \frac{x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + C = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{\sqrt{33}} \cdot \ln \left| \frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$12) \int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx.$$

Аналогічно попередньому прикладу. Маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(6x-4)}{\sqrt{1-4x-3x^2}} - \frac{25}{3\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}} = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d(-4x-3x^2)}{\sqrt{1-4x-3x^2}} - \frac{25}{3\sqrt{3}} \int \frac{d(x+\frac{2}{3})}{\sqrt{-(x+\frac{2}{3})^2-\frac{7}{9}}} = -\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}} \int \frac{d(x+\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{7}{9}-(x+\frac{2}{3})^2}} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

$$13) \int (x-7)e^{5x} dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\int (x-7)e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x-7, \quad du = dx \\ dv = e^{5x} dx, \quad v = \frac{1}{5}e^{5x} \end{array} \right| = (x-7) \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \frac{x-7}{5}e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C.$$

14) Аналогічно попередньому прикладу

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1}, \quad du = \frac{-1}{1+3x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot 3 dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{3x-1}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x\sqrt{3x-1}} dx = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} + \frac{1}{3} \sqrt{3x-1} + C.$$

$$15) \int \frac{7x - x^3 - 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} dx.$$

Оскільки підінтегральна функція є неправильний дріб, то шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити його у вигляді суми цілого многочлена та правильного раціонального дробу, який розіб'ємо на елементарні дробки.

$$\int \frac{7x - x^3 - 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} dx = \int \left(-1 - \frac{4x^2 - 8x - 2}{(x+1)(x-2)(x-3)} \right) dx = -x - 2 \int \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx;$$

$$\left| \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}; \right.$$

$$2x^2 - 4x - 1 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2);$$

$$\begin{array}{l|l} x = -1 & 5 = 12A, \quad A = \frac{5}{12} \\ x = 2 & -1 = -3B, \quad B = \frac{1}{3} \\ x = 3 & 5 = 4C, \quad C = \frac{5}{4} \end{array}.$$

Маємо:

$$-x - 2 \int \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{5}{4} \right) dx = -x - \frac{5}{6} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \ln|x-2| - \frac{5}{2} \ln|x-3| + C.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використали метод частинних значень.

$$16) \int \frac{2+x}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx.$$

$$\int \frac{2+x}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \int \frac{2+x}{x(x^2 + 2x + 5)} dx;$$

$$\left| \frac{2+x}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2x + 5}; \quad 2+x = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx+C)x; \right.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B, \quad A = \frac{2}{5} \\ x^1 & 1 = 2A + C, \quad B = -\frac{2}{5} \\ x^0 & 2 = 5A, \quad C = \frac{1}{5} \end{array};$$

$$\int \left(\frac{\frac{2}{5}}{x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2x-1}{x^2+2x+5} \right) dx = \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \left(\frac{2x+2-3}{x^2+2x+5} \right) dx = \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx +$$

$$+ \frac{3}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln|x^2+2x+5| + \frac{3}{10} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використали метод невизначених коефіцієнтів.

$$17) \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx.$$

Замінімо корінь на нову змінну та зведемо ірраціональний вираз до раціонального.

$$\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t \\ x = t^2 + 2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t^2+3}{3-t} \cdot 2tdt = 2 \int \frac{t^3+3t}{3-t} dt - 2 \int \frac{t^3+3t}{t-3} dt =$$

$$= -2 \int \left(t^2 + 3t + 12 + \frac{36}{t-3} \right) dt = -2 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + 36 \ln|t-3| + C \right) = -\frac{2}{3} \sqrt{x-2}^3 - 3 \sqrt{x-2} -$$

$$-24\sqrt{x-2} - 72 \ln|\sqrt{x-2}-3| + C.$$

$$18) \int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}.$$

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку.

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{6t-2+2t^2+1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2+6t-1} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2+2t+1-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\left(t+1\right)^2 - \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ln \left| \frac{t+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{t+1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} + 2} \right| + C.$$

5. Обчислити визначені інтеграли.

$$1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+2x^2}}.$$

Для обчислення визначених інтегралів застосуємо формулу Ньютона-

Лейбніца $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+2x^2}} = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}} (+2x^2)^{\frac{1}{3}} d(+2x^2) = \frac{3(+2x^2)^{\frac{2}{3}}}{8} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{8} \left(7^{\frac{2}{3}} - 1 \right).$$

$$2) \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (+x^2)^{\frac{1}{2}} d(+x^2) = \frac{1}{2} \frac{(+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1).$$

$$3) \int_0^{\pi} x \sin 3x dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами у визначеному

інтегралі $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

$$\int_0^{\pi} x \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{x}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x dx = -\frac{\pi}{3} \cos 3\pi + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} (\sin 3\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{3}.$$

$$4) \int_1^e \ln^2 x dx.$$

Застосувавши два рази метод інтегрування частинами, одержимо:

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = e \ln^2 e - 2 (\ln x - x) \Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

$$5) \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{3 + \sqrt[3]{x-2}} dx.$$

$$\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{3+\sqrt[3]{x-2}} dx = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x-2} \\ x = t^3 + 2 \\ dx = 3t^2 dt \\ \text{при } x=3 \quad t=1 \\ \text{при } x=29 \quad t=3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{t}{3+t} \cdot 3t^2 dt = 3 \int_1^3 \frac{t^3 + 27 - 27}{t+3} dt =$$

$$= 3 \int_1^3 \left(t^2 - 3t + 9 - \frac{27}{t+3} \right) dt = 3 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 27 \ln|t+3| \right) \Big|_1^3 = 3 \left(9 - \frac{27}{2} - 27 \ln 6 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 27 \ln 4 \right) =$$

$$= \left(27 \ln \frac{3}{2} - \frac{10}{3} \right) \cdot 3 = 81 \ln \frac{3}{2} - 10.$$

6) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{4+3\cos 2x}$.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{4+3\cos 2x} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \text{при } x=0 \quad t=0 \\ \text{при } x=\pi/3 \quad t=\sqrt{3} \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{+t^2 \left(4+3\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{7+t^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{7}} - 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{7}}$$

7) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$.

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{e^x-1} = t \\ x = \ln(t+1) \\ dx = \frac{dt}{t+1} \\ \text{при } x=0 \quad t=0 \\ \text{при } x=\ln 2 \quad t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t dt}{t+1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = t - \ln|t+1| \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

6. Обчислити невідкладні інтеграли або довести їх розбіжність:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt{5}} \right) +$$

$$+ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \left(x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} \right) dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^1 \left(x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{9}{7} x^{\frac{7}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\frac{9}{7} x^{\frac{7}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{0+\varepsilon_2}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{9}{7} \left(-\varepsilon_1^{\frac{7}{3}} \right) + 6 \left(-\varepsilon_1^{\frac{1}{3}} \right) + \frac{9}{7} + 6 \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\frac{9}{7} + 6 - \frac{9}{7} \left(\varepsilon_2^{\frac{7}{3}} \right) - 6 \left(\varepsilon_2^{\frac{1}{3}} \right) \right) = 14 \frac{4}{7}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій $y = x^2 - 3x$ та $y + 3x - 4 = 0$.

Знайдемо точки перетину параболы та прямої M_1, M_2 (рисунок 1):

$$x^2 - 3x = -3x + 4; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2.$$

$$M_1(-2; 10) \text{ та } M_2(2; -2).$$

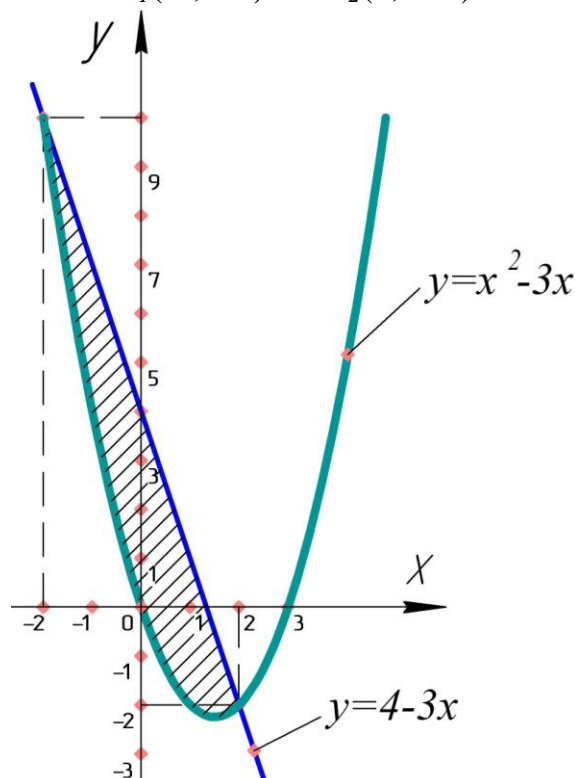


Рисунок 1 – Зображення області

Маємо:

$$S = \int_{-2}^2 (-3x - x^2 + 3x) dx = \int_{-2}^2 (-x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

а) $z = 2x^5y^2 - 4x^3y - 5x + 3y;$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 \cdot 5x^4 - 4y \cdot 3x^2 - 5 + 0 = 10x^4y^2 - 12x^2y - 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^5 \cdot 2y - 4x^3 \cdot 1 - 0 + 3 = 4x^5y - 4x^3 + 3.$$

Згідно формули $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, маємо:

$$dz = (10x^4y^2 - 12x^2y - 5) dx + (4x^5y - 4x^3 + 3) dy.$$

б) $z = \ln(y^3 + e^{2x}).$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x}}{y^3 + e^{2x}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{y^3 + e^{2x}};$$

$$dz = \frac{1}{y^3 + e^{2x}} (e^{2x} dx + 3y^2 dy).$$

9. Обчислити значення частинних похідних функції $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz - z^2 - 3 = 0$, яка задана неявно в точці $M_0(0; 1; -1)$.

Позначимо $F(x, y, z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz - z^2 - 3$, тому

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z; \quad F'_y = -9y^2 + 2xz; \quad F'_z = 2xy - 4x + 2z.$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$, одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Обчислимо значення $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M_0(0; 1; -1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0; 1; -1) = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0; 1; -1) = -4,5.$$

10. Знайти другі частинні похідні функції $z = \arccos \sqrt{x/y}$ та переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Спочатку знаходимо перші частинні похідні:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{yx-x^2}};$$

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}{2\sqrt{y^3} \sqrt{y-x}} = \frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3 - xy^2}}.$$

Диференціюючи кожен з отриманих похідних по x та по y , знаходимо другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot (-2x) = -\frac{y-2x}{4\sqrt{1-\frac{x}{y}}};$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot x = \frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x}{y}}};$$

$$z''_{yy} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot (y^2 - 2xy) = -\frac{\sqrt{x} \cdot (y^2 - 2xy)}{4\sqrt{1-\frac{x}{y}}};$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} + \sqrt{x} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot (y^2) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3 - xy^2 + xy^2}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-\frac{x}{y}}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{\sqrt{x} \cdot y^3 \cdot \sqrt{1-\frac{x}{y}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{x}{y}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}.$$

Зазначимо, що мішані частинні похідні z''_{xy} та z''_{yx} рівні.

11. Дослідити функцію $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області \bar{D} , яка обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$ (рисунк 2).

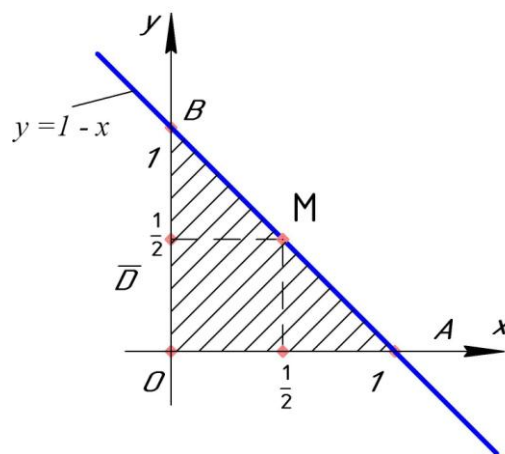


Рисунок 2 – Зображення області \bar{D}

Знайдемо частинні похідні функції $z'_x = y + 3$, $z'_y = x - 2y + 4$.

Прирівнюючи їх до нуля одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = y + 3 = 0 \\ z'_y = x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

з якої знайдемо стаціонарну точку даної функції $M \in (-10; -3)$. З'ясуємо, чи буде ця точка точкою екстремуму. Для цього спочатку знайдемо другі частинні

похідні даної функції $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = 1$, $z''_{yy} = -2$. Використовуючи останні умови екстремуму, маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$, тобто в точці $M(-10; -3)$ екстремуму не має, тому дана функція не має локального екстремуму.

Далі побудуємо область \bar{D} , тобто трикутник OAB і дослідимо функцію на межі області \bar{D} . Сторона OA : $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$; $z(x, 0) = 3x$; $z'_x = 3$, тобто стаціонарних точок на відрізку OA немає. В точках O і A відповідно $z(0; 0) = 0$; $z(1; 0) = 3$.

На стороні OB :

$x = 0$, $0 \leq y \leq 1$; $z(0, y) = 4y - y^2$; $z'_y = 4 - 2y$; $4 - 2y = 0$. $y = 2 > 1$, тому стаціонарних точок на відрізку OB також немає. $z(0, 1) = 3$ в точці B .

Сторона AB :

$y = 1 - x$, $z(x, 1 - x) = x(-x) - (-x)^2 + 3x + 4(-x) = -2x^2 + 2x + 3$, тоді $z'_x = -4x + 2$ і з $z' = 0$ випливає, що $x = \frac{1}{2}$. Стаціонарна точка $M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ належить межі області \bar{D} . Значення функції в ній $z(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = 3,5$. Порівнюючи всі отримані значення функції, бачимо, що $z_{\text{НАЙБ.}} = z(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = 3,5$; $z_{\text{НАЙМ.}} = z(0; 0) = 0$.

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а) $(y^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Маємо рівняння з відокремленими змінними. Перетворимо його до виду $y(-x^2)dy = -x(y^2 + 1)dx$ і відокремимо змінні.

Одержимо: $\frac{ydy}{y^2 + 1} = -\frac{xdx}{1 - x^2}$.

Проінтегруємо обидві частини в останній рівності.

$$\int \frac{ydy}{y^2 + 1} = -\int \frac{xdx}{1 - x^2} + C; \frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln C$$

$$y^2 + 1 = C|x^2 - 1|, \quad y^2 = C|x^2 - 1| - 1.$$

Загальним розв'язком початкового рівняння є функція:

$$y = \pm \sqrt{C|x^2 - 1| - 1}.$$

б) $y - x \frac{dy}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}$.

З даного рівняння знаходимо $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$. Це однорідне рівняння першого порядку, тому

розв'язуємо його за допомогою заміни $\frac{y}{x} = u$. Звідки:

$$y = x \cdot u; \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux}; \quad u'x + u = \frac{u-1}{1+u};$$

$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u = -\frac{u^2-1}{u+1}; \quad x \frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{1+u}.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{u+1}{u^2+1} du = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|, \quad \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctgu = \ln \left| \frac{C}{x} \right|,$$

$$\arctgu = \ln \left| \frac{C}{x\sqrt{u^2+1}} \right|, \quad \arctg \frac{y}{x} = \ln \frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad - \text{загальний інтеграл}$$

початкового рівняння.

13. Знайти розв'язок задачі Коші.

$$dy - e^{-x} dx + ydx - xdy = xydx, \quad y(0) = \ln 5.$$

Відокремлюючи похідну перетворимо рівняння до виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x} \cdot y = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Маємо лінійне рівняння першого порядку виду $y' + P(x)y = Q(x)$,

$$\text{де } P(x) = 1; \quad Q(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки $y = u(x)v(x)$.

$$\text{Маємо: } y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

$$u'v + u \left(\frac{dv}{dx} + v \right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \quad (1)$$

Знаходимо $v(x)$ з умови $\frac{dv}{dx} + v = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -v; \quad \frac{dv}{v} = -dv; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx, \quad \ln|v| = -x, \quad v = e^{-x}.$$

Підставимо одержаний вираз для $v(x)$ в рівняння (1):

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x}; \quad du = \frac{dx}{1-x};$$

$$\int du = \int \frac{dx}{1-x}; \quad u = -\ln|1-x| + \ln C; \quad u = \ln \frac{C}{|1-x|}.$$

Тоді $y = u \cdot v = e^{-x} \ln \frac{C}{|1-x|}$ є загальним розв'язком початкового рівняння. Знайдемо C , використовуючи початкову умову:

$$y(0) = \ln C = \ln 5, \quad C = 5.$$

Отримаємо частинний розв'язок:

$$y = e^{-x} \ln \frac{5}{|1-x|}.$$

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''(x+1) + y' = 0$, яке припускає пониження порядку.

Це рівняння не містить явно змінну y , тому зробимо підстановку $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'(x)$ і $z'(x+1) + z = 0$, $\frac{dz}{dx}(x+1) = -z$, $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{e^x+1}$.

Шляхом заміни $e^x+1 = t$ знаходимо:

$$\ln|z| = \ln(x+1) - \ln e^x + \ln C, \quad \text{звідси } z = C_1 \frac{e^x+1}{e^x}, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{e^x+1}{e^x},$$

$$y = C_1 \int \frac{e^x+1}{e^x} dx = C_1 (e - e^{-x}) + C_2.$$

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y^3 y'' = -1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

В даному рівнянні відсутня змінна x , тому понизимо порядок, використовуючи підстановку $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Далі, $y^3 p \frac{dp}{dy} = -1$,

$$p dp = -\frac{dy}{y^3}, \quad \int p dp = -\int \frac{dy}{y^3}, \quad \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2y^3} + C_1, \quad p = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}.$$

Знайдемо C_1 : $p = y'$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$, тоді $0 = \pm \sqrt{1 + 2C_1}$, звідки $C_1 = -\frac{1}{2}$.

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx, \quad \mp \frac{1}{2} \int \frac{d(-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx,$$

$$C_2 \mp \sqrt{1-y^2} = x.$$

Знайдемо C_2 : $C_2 \mp \sqrt{1-1} = 1$, $C_2 = 1$.

Шуканий розв'язок має вигляд:

$$x = \mp \sqrt{1-y^2} + 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

а) $4y'' - 11y' + 6y = 0$;

б) $4y'' - 4y' + y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 37y = 0$.

Для кожного з даних рівнянь складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його. За виглядом отриманих коренів характеристичного рівняння записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $4\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, корені $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = 2$ – дійсні різні, тому

$$y = C_1 e^{\frac{3}{4}x} + C_2 e^{2x};$$

б) $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ – дійсні рівні, тому

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}};$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0$, корені $\lambda_{1,2} = 1 \pm 6i$ – комплексно-спряжені, тому

$$y = e^x (C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x);$$

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною: $y'' + 16y = f(x)$.

а) $f_1(x) = e^{2x}$;

б) $f_2(x) = 1 - 4x$;

в) $f_3(x) = 12 \cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння: $y'' + 16y = 0$, $\lambda^2 + 16 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 4i$ – корені характеристичного рівняння, звідки загальний розв'язок однорідного рівняння. $y_{30} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

а) $f_1(x) = e^{2x}$. За виглядом спеціальної правої частини частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд: $y_{чн} = A e^{2x}$.

Знаходимо $y'_{чн} = 2A e^{2x}$, $y''_{чн} = 4A e^{2x}$. Підставимо $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в початкове рівняння та знайдемо A : $4A e^{2x} + 16A e^{2x} = 10 e^{2x}$, $20A = 10$, $A = \frac{1}{2}$,

тоді $y_{чн} = \frac{1}{2} e^{2x}$ і загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y_{3н} = y_{30} + y_{чн} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \frac{1}{2} e^{2x}.$$

б) $f_2(x) = 1 - 4x$. За виглядом спеціальної правої частини частинний розв'язок матиме таку структуру: $y_{чн} = Ax + B$.

Знаходимо $y'_{чн} = A$, $y''_{чн} = 0$. Підставимо $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в початкове рівняння та знайдемо A та B : $16Ax + 16B = 1 - 4x$, $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{16}$ тоді

$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}$ і загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}.$$

в) $f(x) = 12 \cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$. За виглядом спеціальної правої частини частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:
 $y_{\text{чн}} = A \cos 2x + B \sin 2x$.

$$\text{Знаходимо } y'_{\text{чн}} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad y''_{\text{чн}} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в початкове рівняння та знайдемо A і B :

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 16A \cos 2x + 16B \sin 2x = 12 \cos 2x, \quad \begin{cases} \cos 2x & | 12A = 12, & \Rightarrow A = 1, \\ \sin 2x & | 12B = 0, & \Rightarrow B = 0, \end{cases}$$

тоді $y_{\text{чн}} = \cos 2x$ і загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \cos 2x.$$

Відшукаємо константи C_1 та C_2 з початкових умов.

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \cos 0 = 1, \quad C_1 = 0.$$

$$y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - 2 \sin 2x,$$

$$y'(0) = 4C_2 \cos 0 - 2 \sin 0 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Одержимо частинний розв'язок рівняння: $y = \frac{1}{4} \sin 4x + \cos 2x$.

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - y = 0, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad y_{\text{зо}} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x.$$

Вважаємо, що C_1 та C_2 функції від x , тобто:

$$y_{\text{зн}} = C_1(x) \cdot e^{-x} + C_2(x) \cdot e^x.$$

Визначаємо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ з системи:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^x = \frac{2e^x}{e^x - 1} \end{cases}$$

яка для даного рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^x = \frac{2e^x}{e^x - 1} \end{cases}$$

Знаходимо з неї C_2' , C_1' , а потім за допомогою інтегрування знаходимо функції C_1 , C_2 .

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 1+1=2. \quad \Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{2e^x}{e^x-1} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{2e^{2x}}{e^x-1};$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{2e^x}{e^x-1} \end{vmatrix} = \frac{2}{e^x-1};$$

За формулами Крамера маємо:

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = \frac{-e^{2x}}{e^x-1}; \quad C_2 = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{1}{e^x-1};$$

$$C_1 = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x-1} = \begin{vmatrix} e^x = t, \\ x = \ln t, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{vmatrix} = -\int \frac{t^2 dt}{t(t-1)} = -\int \frac{(t-1)+1}{t-1} dt = -\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= -t - \ln|t-1| + C_1 = -e^x - \ln|e^x-1| + C_1;$$

$$C_2 = \int \frac{dx}{e^x-1} = \begin{vmatrix} e^x = t, \\ x = \ln t, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2 = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|.$$

Маємо такий загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(e^x - \ln|e^x-1| + C_1 \right) \cdot e^{-x} + \left(\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + C_2 \right) \cdot e^x =$$

$$= C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x + e^x \cdot \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| - e^{-x} \cdot \ln|e^x-1| - 1.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

Це однорідна система. Розв'яжемо її методом виключення. Про диференціюємо перше рівняння. Одержимо: $x'' = -7x' + y'$. Замінюючи в останньому рівнянні y' його виразом з другого рівняння системи, маємо $x'' = -7x' - 2x - 5y$. В останньому рівнянні замість y підставимо вираз

$y = x' + 7x$, який знайшли з першого рівняння системи. Отримаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно $x(t)$:

$$x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x), \quad x'' + 12x' + 37x = 0.$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i;$$

$$x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Знаходимо x' , а потім x та x' підставимо в $y = x' + 7x$.

$$\begin{aligned} x' &= -6e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = \\ &= e^{-6t} (C_1 (-6 \cos t - \sin t) + C_2 (-6 \sin t + \cos t)). \end{aligned}$$

Маємо: $y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)).$

Шуканий розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)) \end{cases}$$

Рекомендована література

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1969. – 736 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432с.
4. Гусак А.А. Высшая математика. – Минск: Издательство Белорус. университета, 1983. – 460с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 365с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Учеб. пособие для вузов. Ч 2. – М.: Высшая школа, 1985. – 207с.
7. Задорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460с.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1988. – 223с.
9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике: Типовые расчёты. – М.: Высшая школа, 1983. – 176с.
10. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2ч. – К.: Техніка, 2000. – 592с.
12. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Вища школа, 1987. – 552с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2т. – М.: Наука, 1985, Т.1. – 432с.
14. Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, В.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 462с.
15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие в 3 ч. Ч.1 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юреть: Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 270с.