

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт
для студентів напряму підготовки
6.050802 – "Електронні пристрої та системи"

Затверджено
на засіданні кафедри
промислової електроніки
протокол № 9 від 23.04.2013 р.

ЧЕРНІГІВ ЧДТУ 2013

Методи перетворення сигналів. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів напряму підготовки 6.050802 – "Електронні пристрої та системи"/ Укл.: Іванець С.А., Хоменко М.А., Заровський Р.В. – Чернігів: ЧДТУ. – 2013. – 29 с.

Укладачі: Іванець Сергій Анатолійович, кандидат технічних наук, доцент кафедри промислової електроніки
Хоменко Максим Анатолійович, кандидат технічних наук, доцент кафедри біомедичних радіоелектронних апаратів та систем
Заровський Руслан Владиславович, кандидат технічних наук, доцент кафедри промислової електроніки

Відповідальний за випуск: Денисов Ю. О., завідувач кафедри промислової електроніки, доктор технічних наук, професор

Рецензент: Нікітенко Є.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник завідувача кафедри інформаційних та комп'ютерних систем Чернігівського державного технологічного університету

Зміст

Вступ.....	4
1 Лабораторна робота № 1 Аналіз детермінованих сигналів у часі	5
Теоретичні відомості	5
Хід роботи.....	7
Контрольні питання	8
2 Лабораторна робота № 2 Частотний аналіз детермінованих сигналів. .	9
Теоретичні відомості	9
Спектр періодичного сигналу	10
Перетворення Фур'є.....	12
Хід роботи.....	14
Контрольні питання	15
3 Лабораторна робота № 3 Модуляція сигналів	16
Теоретичні відомості	16
Однотональна амплітудна модуляція	17
Спектр довільного АМ сигналу	17
Хід роботи.....	18
Контрольні питання	19
4 Лабораторна робота № 4 Випадкові сигнали.	20
Теоретичні відомості	20
Числові характеристики випадкових величин	21
Випадкові сигнали.....	22
Хід роботи.....	25
Контрольні питання	27
Рекомендована література	28
Додаток А – Приклад титульного листа звіту про виконання циклу лабораторних робіт	29

Вступ

Дані методичні вказівки призначені для самостійної підготовки до лабораторних робіт з дисциплін “Методи перетворення сигналів” студентів денної та заочної форм навчання, які навчаються за напрямом підготовки “Електронні пристрої та системи” (6.050802). Лабораторні роботи виконуються на персональному комп’ютері з використанням спеціалізованого програмного забезпечення у якості якого рекомендується математичний пакет Maple (може використовуватися інше спеціалізоване програмне забезпечення за умови попереднього узгодження з викладачем).

Лабораторні роботи присвячені вивченню методів аналізу детермінованих та випадкових сигналів. Виконання циклу лабораторних робіт сприяє більш глибокому розумінню теоретичного матеріалу та набуттю навичок практичного застосування здобутих знань.

До складу кожної лабораторної роботи входять короткі теоретичні відомості, що містять основні розрахункові формули, співвідношення та їх властивості, знання яких є необхідним для виконання даної роботи. Окрім цього підготовка до лабораторної роботи потребує обов’язкової самостійної роботи з рекомендованою літературою та лекційним матеріалом. Після теоретичної частини наведено перелік та варіанти завдань, які необхідно вирішити при виконанні лабораторної роботи. Далі знаходиться список контрольних питань, за допомогою яких студент може перевірити ступінь опанування теоретичного матеріалу та готовність до виконання або захисту лабораторної роботи.

Результати виконання робіт оформлюються у вигляді звітів на аркушах формату А4. Звіт повинен містити наступну інформацію:

- 1) назву та номер лабораторної роботи, мету, прізвище, ініціали та номер групи студента, що виконав лабораторну роботу;
- 2) завдання на лабораторну роботу з зазначенням номеру варіанту;
- 3) опис виконання роботи, що повинен містити розрахункові формули та їх опис, результати розрахунків, графіки, діаграми та підписи до них;
- 4) висновки щодо отриманих результатів.

При оформленні звіту студент повинен керуватися вимогами діючих стандартів. Оформлений звіт надається викладачу на захист лабораторної роботи. Захист лабораторної роботи без звіту неможливий.

В кінці семестру студент повинен оформити і здати викладачу загальний звіт про виконання циклу лабораторних робіт.

1 Лабораторна робота № 1

Аналіз детермінованих сигналів у часі

Мета: навчитися розраховувати кореляційні функції сигналів та їх часові параметри.

Теоретичні відомості

Під сигналом розуміють процес зміни в часі фізичного стану будь-якого об'єкту, що використовується для відображення, передачі та реєстрації інформації. Для того, щоб проводити теоретичні дослідження та розрахунки з використанням сигналів необхідно створити їх математичну модель. В цій лабораторній роботі ми будемо вивчати імпульсні сигнали, тобто коливання які існують лише в межах обмеженого проміжку часу. Розрізняють такі види імпульсних сигналів: відеоімпульс та радіоімпульс. Відеоімпульс (рисунок 1.1) описується лише обвідною.

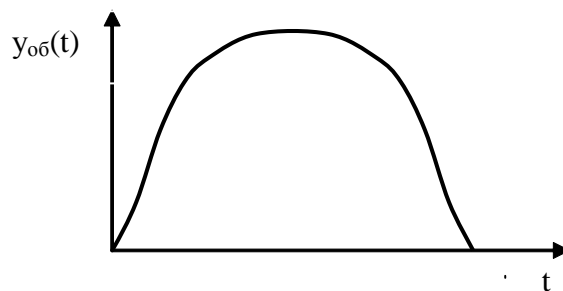


Рисунок 1.1 – Відеоімпульс

Радіоімпульс (рисунок 1.2) – це сигнал, що складається з обвідної та її гармонійного заповнення. В лабораторній роботі використовується радіоімпульс, що описується наступним виразом:

$$x = \begin{cases} y_{об} U \sin(2\pi f t + \varphi), t \leq \tau; \\ 0, t > \tau; \end{cases}$$

де $y_{об}$ – обвідна радіоімпульсу;

U – амплітуда гармонічного заповнення, В;

f – частота гармонічного заповнення, Гц;

φ – початкова фаза гармонічного заповнення, градусів;

τ – тривалість радіоімпульсу та відеоімпульсу.

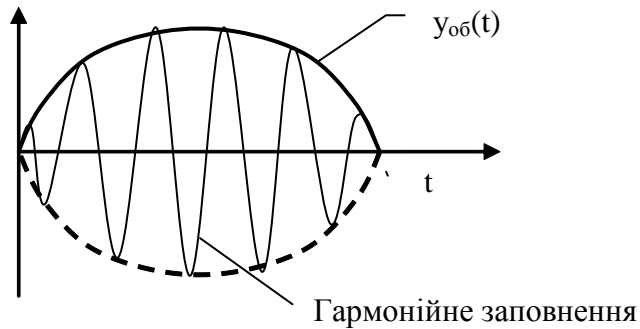


Рисунок 1.2 - Радіоімпульс

Постійна складова сигналу (середнє арифметичне значення) – це усереднене у часі середнє арифметичне значення періодичної величини протягом одного періоду T :

$$\bar{x} = \bar{x}_{\text{ар}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Середньовипрямлене значення сигналу – це усереднене у часі середнє арифметичне абсолютного значення періодичної величини протягом одного періоду T :

$$|\bar{x}| = \bar{x}_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt.$$

Ефективне (діюче) значення – це усереднене у часі середнє квадратичне значення періодичної величини протягом одного періоду T :

$$\bar{x} = \bar{x}_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}.$$

Автокореляційна функція (АКФ) являє собою інтеграл від добутку двох копій сигналу, зсунутих відносно один одного на час τ :

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t+\tau) dt.$$

Ця функція характеризує ступінь схожості між сигналом та його зсунутою копією. Чим більша ця функція, тем більше сигнали схожі між собою.

Властивості АКФ:

1. При $\tau=0$ АКФ дорівнює енергії сигналу:

$$B(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

2. АКФ є парною функцією:

$$B(\tau) = B(-\tau)$$

3. При будь-якому значенні τ значення АКФ не перевищує енергії сигналу:

$$B_x(\tau) \leq B_x(0)$$

4. В залежності від виду сигналу АКФ може мати монотонний характер або коливальний.

Взаємна кореляційна функція (ВКФ) характеризує ступінь схожості двох різних сигналів.

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t+\tau) dt$$

Видно, що АКФ – це окремий випадок ВКФ при $x(t) = y(t)$.

Властивості ВКФ:

1. $B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau)$, тобто зміна знаку τ рівносильна взаємній перестановці сигналів.
2. ВКФ не є парною функцією параметра τ :

$$B_{xy}(\tau) \neq B_{xy}(-\tau)$$

3. Значення ВКФ при $\tau=0$ не обов'язково максимально, а максимум ВКФ може знаходитись де завгодно.

Хід роботи

1. Використовуючи свій номер варіанту задати імпульс з синусоїдальним заповненням і без заповнення. Радіоімпульс та відеоімпульс мають однакову обвідну, але радіоімпульс містить гармонійне заповнення. Тривалість імпульсів (мс) визначається як добуток 10 і останніх двох цифр залікової книжки.

2. Розрахувати норму, енергію сигналу, його максимальне, середнє, середньовипрямлене та діюче значення.

3. Кожен з сигналів має спостерігатись у вікні тривалістю 1 с. Варіанти сигналів наведені в таблиці 1.1.

4. Для кожного з сигналів розрахувати автокореляційну функцію.

5. Для радіоімпульсу та відеоімпульсу розрахувати взаємну кореляційну функцію.

Таблиця 1.1 – Параметри сигналів

	Параметри гармонійного заповнення			Форма обвідної
	U, В	f, Гц	$\varphi, ^\circ$	
1	2	3	4	5
1.	10	150	0	прямокутник
2.	15	178	15	трикутник
3.	12	564	30	трапеція
4.	14	192	45	парабола

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
5.	13	480	60	прямокутник
6.	18	50	75	трикутник
7.	19	700	90	трапеція
8.	21	1254	135	парабола
9.	25	1234	180	прямокутник
10.	17	234	270	трикутник
11.	5	456	0	трапеція
12.	1	678	180	парабола
13.	0,5	890	15	прямокутник

Контрольні питання

1. Що таке АКФ? Які її властивості?
2. Що таке ВКФ? Які її властивості?
3. Розрахувати АКФ або ВКФ для прямокутного відеоімпульсу та трикутного відеоімпульсу.
4. Як розрахувати максимальне, середнє, середньовипрямлене та діюче значення сигналу? Який фізичний сенс мають ці параметри?

2 Лабораторна робота № 2

Частотний аналіз детермінованих сигналів.

Мета: навчитися розраховувати амплітудний та фазовий спектри сигналу, отримувати сигнал з його спектру.

Теоретичні відомості

Розкладатися в ряд Фур'є можуть тільки періодичні сигнали. При цьому використовують фрагмент сигналу в один період.

~~$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t) \right]$$~~

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cdot \cos k\omega_1 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cdot \sin k\omega_1 t dt$$

де ω_1 – основна частота.

Межі інтегрування можуть бути будь-якими, але довжина інтервалу повинна дорівнювати періоду сигналу T .

Якщо $S(t)$ – парна функція, то $b_k=0$, якщо непарна, то $a_k=0$.

Комплексна форма запису ряду Фур'є є найбільш часто вживаною.

При цьому:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

З формули Ейлера $e^{ix} = \cos x + j \sin x$.

Для цього формулу ряду Фур'є (2.1) приводять до вигляду:

~~$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$~~

Тоді:

~~$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$~~

Члени ряду з від'ємними ступенями експоненти будемо вважати як члени з від'ємними номерами. a_0 – нульовий член. Тому межі добутку зміняться від $-\infty$ до $+\infty$. Тоді отримаємо комплексну форму запису ряду Фур'є.

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}$$



Зв'язок коефіцієнтів ряду Фур'є в різних формах запису:

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2}$$

$$a_k = 2\Re(\dot{C}_k)$$

$$b_k = -2\Im(\dot{C}_k)$$

Тому

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\ \dot{C}_{-k} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{jk\omega_1 t} dt \\ \dot{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\ \dot{C}_{-k} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{jk\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

Спектр періодичного сигналу

Сукупність амплітуд ряду Фур'є – амплітудний спектр, сукупність фаз – фазовий спектр. Це не можна плутати з АЧХ і ФЧХ, які описують ланки (системи), а не сигнал.

При цьому якщо сигнал дійсний, то його спектри симетричні.

$$A_{-k} = A_k;$$

$$\varphi_{-k} = \varphi_k$$

Розглянемо спектр періодичного сигналу:

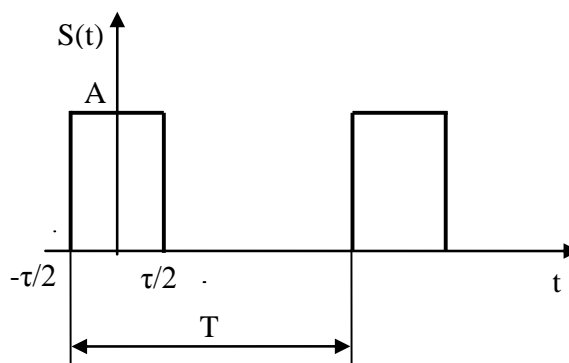


Рисунок 2.1 – Періодичний сигнал прямокутної форми

Оскільки сигнал парний, то

$$f_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cos(2\pi k t) dt = \frac{2A}{T} \frac{\sin(2\pi k \frac{\tau}{2})}{2\pi k} = \frac{2A}{T} \frac{\sin(\pi k \tau)}{\pi k}$$

Визначимо шпаруватість як відношення періоду сигналу до його тривалості:

$$q = \frac{T}{\tau}$$

Тоді:

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin \frac{\pi k \tau}{T} = \frac{2A}{q} \frac{\sin \frac{\pi k}{q}}{\frac{\pi k}{q}}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{2A}{T} = \frac{2A}{q}$$

В результаті отримаємо розкладання сигналу в ряд Фур'є:

$$f(t) = \frac{2A}{T} \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{q}}{1} \cos \frac{\pi t}{q} + \frac{\sin \frac{2\pi}{q}}{2} \cos \frac{2\pi t}{q} + \dots \right) \right]$$

Амплітудний спектр прямокутного сигналу показаний на рисунку 2.2. Як видно, амплітуда гармонійних складових залежить від номера гармоніки k як $\frac{\sin x}{x}$.

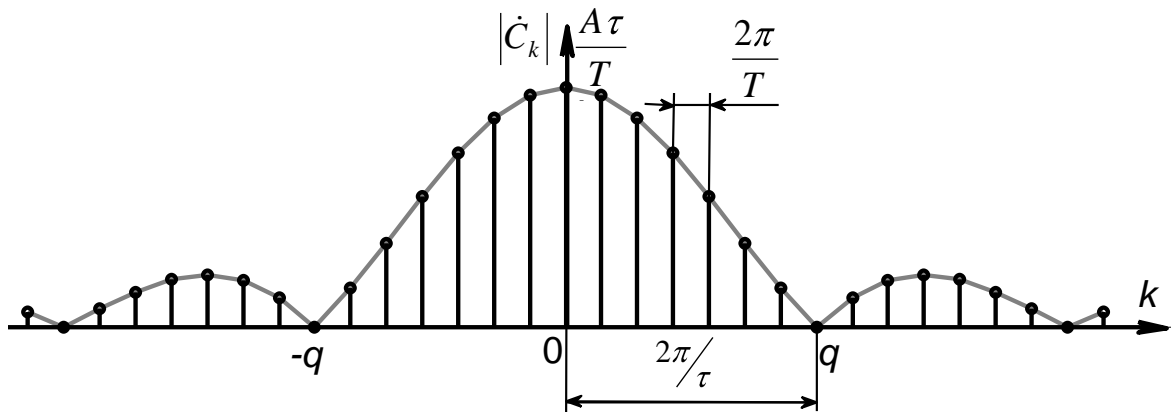


Рисунок 2.2 – Амплітудний спектр періодичного сигналу прямокутної форми

Горизонтальна вісь може нумеруватися в частотах і номерах гармонік.

Кількість гармонік в одній пелюстці дорівнює шпаруватості. Тому в спектрі послідовності прямокутних імпульсів відсутні гармоніки з номерами, які дорівнюють шпаруватості $k=q, 2q, 3q, \dots$. Відстань між

сусідніми гармоніками дорівнює частоті імпульсів $\frac{2\pi}{T}$, а ширина пелюсток – $\frac{2\pi}{\tau}$. Тобто, чим коротший імпульс, тем ширший його спектр.

Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є використовується для аналізу неперіодичного сигналів.

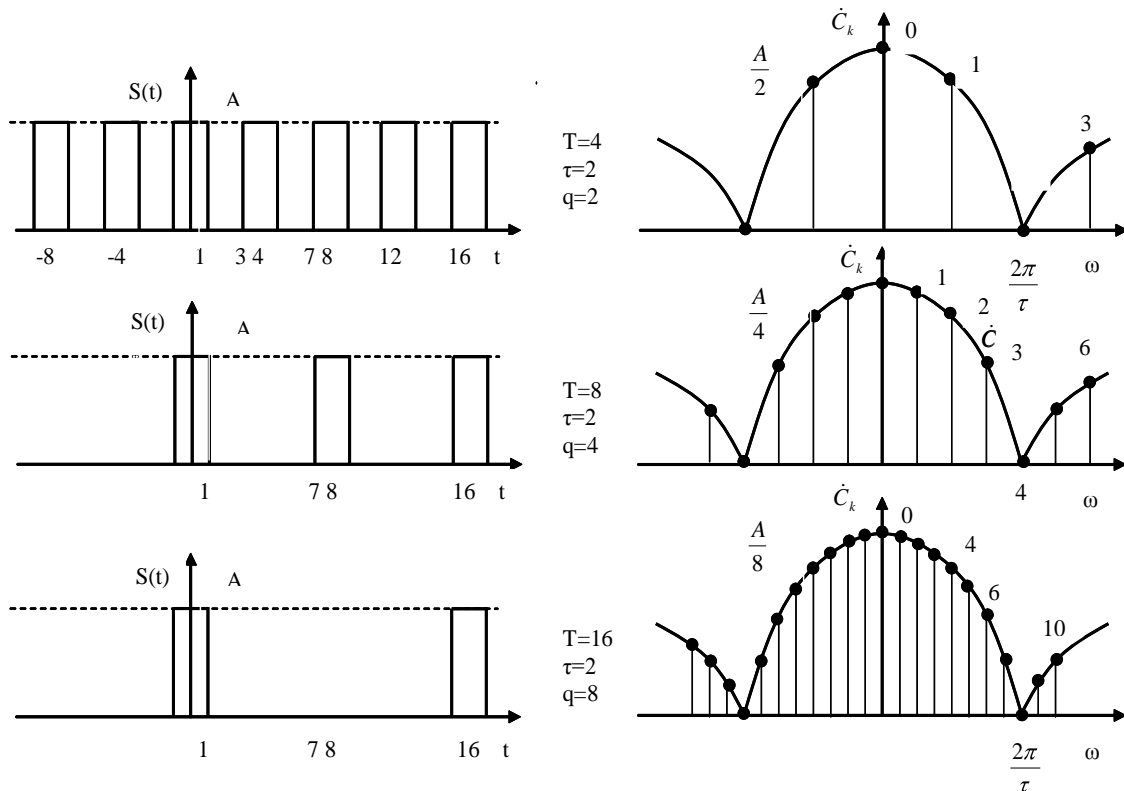


Рисунок 2.3 – Амплітудний спектр періодичного сигналу прямокутної форми з різною шпаруватістю

При збільшенні періоду форма обвідної не змінюється, а гармоніки становляться ближче одна до одної, тобто збільшується щільність спектра (рисунок 2.3). Якщо $T \rightarrow \infty$, то спектр становиться неперервним, тобто частота перестає змінюватись дискретно, а становиться неперервним параметром. Замість коефіцієнтів ряду C_k з'являється функція $S(\omega)$, яка називається спектральною функцією або спектральною густиною.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Це пряме перетворення Фур'є.

Ряд Фур'є отримує форму інтеграла:

$$S(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

Це обернене перетворення Фур'є.

Модуль спектральної густини – амплітудний спектр, фаза – фазовий спектр.

Приклад.

Розрахуємо амплітудний та фазовий спектри прямокутного імпульсу (рисунок 2.4).

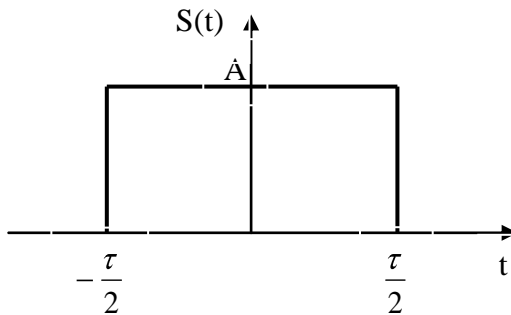


Рисунок 2.4 – Прямокутний імпульс

$$S(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left(e^{-j\omega \tau/2} - e^{j\omega \tau/2} \right) = \frac{A}{\omega} \sin \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \\ &= \frac{A}{\omega} \left(\cos \frac{\omega \tau}{2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + \sin \frac{\omega \tau}{2} \cos \frac{\omega \tau}{2} \right) = \frac{A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} \\ &= \frac{A}{\omega} \frac{\omega \tau}{2} \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} = \frac{A \tau}{2} \text{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \end{aligned}$$

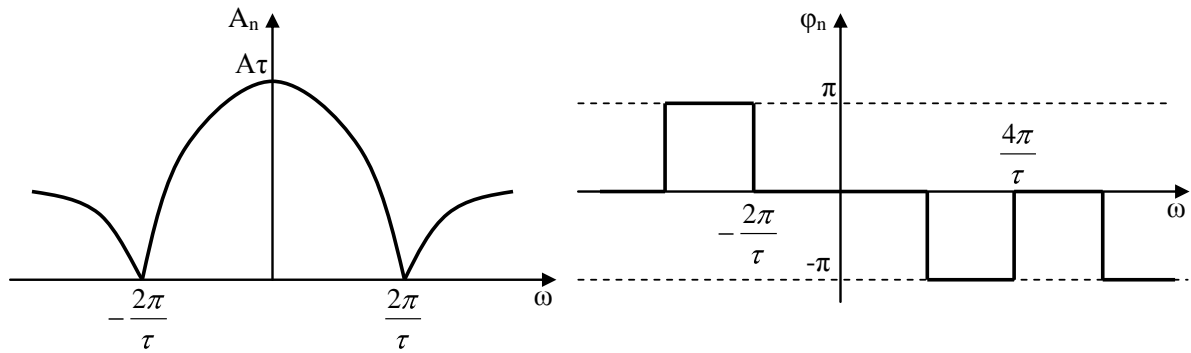


Рисунок 2.5 – Амплітудний спектр та фаза прямокутного імпульсу

Оскільки спектральна функція дійсна, то фазовий спектр приймає лише два значення (0 і π) в залежності від знаку $\frac{\sin x}{x}$. При цьому неможливо відрізнити фазу π від $-\pi$. Різні знаки використовують для того, щоб представити функцію непарною.








Хід роботи

1. Для відео та радіоімпульсів побудувати амплітудні та фазові спектри сигналів використовуючи ряд Фур'є. Шпаруватість сигналів дорівнює 8.
2. Для відео та радіоімпульсів розрахувати перетворення Фур'є.
3. Побудувати відео та радіоімпульс використовуючи їх спектр. Для побудови використовувати коефіцієнти ряду Фур'є, отримані при виконанні пункту 1.
4. Побудувати відео та радіоімпульс використовуючи половину спектральних складових.
5. Взяти $\frac{1}{4}$ періоду відео та радіоімпульсів та побудувати їх спектри.
6. Виконати теж саме завдання, що і у пункті 5, але використати віконну функцію відповідно до номеру варіанту (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1 – Віконні функції

Варіант	Вікно	Формула віконної функції
1	2	3
1.	Трикутне	$g(t) = 1 - \frac{ t }{T/2}; \quad t \leq T/2$
2.	Бартлета	$g(t) = 1 - \frac{ t }{T/2}; \quad t \leq T/2$

Продовження таблиці 2.1

1	2	3
3.	Ханна	
4.	Хемінга	
5.	Блекмана	
6.	Блекмана-Херріса	$g(t) = 0,3587 - 0,4883 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,1413 \cos \frac{4\pi t}{T} - 0,0117 \cos \frac{6\pi t}{T}, \quad t \leq \frac{T}{2}$
7.	Гауса	
8.	Трикутне	$g(t) = 1 - \frac{ t }{T/2}; \quad t \leq T/2$
9.	Бартлета	$g(t) = 1 - \frac{ t }{T/2}; \quad t \leq T/2$
10.	Ханна	
11.	Хемінга	
12.	Блекмана	
13.	Блекмана-Херріса	$g(t) = 0,3587 - 0,4883 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,1413 \cos \frac{4\pi t}{T} - 0,0117 \cos \frac{6\pi t}{T}, \quad t \leq \frac{T}{2}$

Контрольні питання

1. Які сигнали можна розкласти в ряд Фур'є?
2. Які форми запису ряду Фур'є вам відомі? Наведіть зв'язок між різними формами запису ряду Фур'є.
3. Дайте визначення поняттям «амплітудний спектр» та «фазовий спектр». Намалуйте спектр прямокутного періодичного сигналу. Як зміниться малюнок при збільшенні (зменшенні) шпаруватості?
4. Запишіть формули прямого та оберненого перетворення Фур'є. В яких випадках слід використовувати перетворення Фур'є?
5. Які властивості перетворення Фур'є вам відомі?

3 Лабораторна робота № 3 Модуляція сигналів

Мета: навчитися отримувати модульовані сигнали та розраховувати їх спектри.

Теоретичні відомості

Модуляція – це процедура переносу спектра низькочастотного сигналу у високочастотну область.

Для цього формується високочастотний сигнал, що має назву – несуче коливання. Широкого застосування в якості несучого набув гармонійний сигнал:

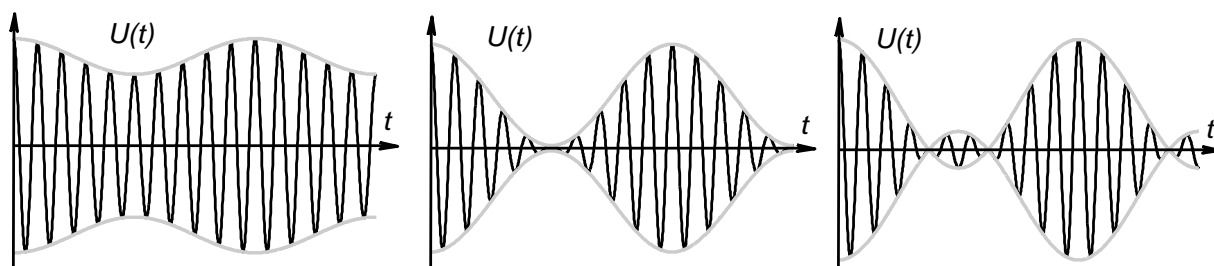
$$U(t) = U \cos(\omega t + \varphi),$$

В цьому сигналі є можливість змінювати три параметри: амплітуду (U), частоту (ω) та повну фазу (φ).

Якщо змінюється амплітуда, то така модуляція має назву амплітудної модуляції:

$$U(t) = U(t) \cos(\omega t + \varphi),$$

де $U(t)$ – фізична обвідна,
 $\cos(\omega t + \varphi)$ – гармонійне заповнення



а) неглибока модуляція б) глибока модуляція в) перемодуляція

Рисунок 3.1 – АМ – сигнали з різною глибиною модуляції

Обвідна $U(t)$, корисний сигнал $s(t)$ та амплітуда несучого коливання U_M пов'язані формулою:

$$U(t) = U_M [1 + M s(t)] \cos(\omega t + \varphi)$$

де M – коефіцієнт амплітудної модуляції.

Якщо $|M S_{\max}(t)| \ll 1$, то така модуляція називається неглибокою (рисунок 3.1, а).

Якщо $|M S_{\max}(t)| \approx 1$, т.ч. $M S_{\max}(t) \approx 1$ або $M S_{\min}(t) \approx -1$, це глибока модуляція (рисунок 3.1, б)

Якщо $|M S_{\max}(t)| > 1$, то має місце перемодуляція (рисунок 3.1, в), тобто форма обвідної більше не копіює форму корисного сигналу.

Однотональна амплітудна модуляція

У випадку, коли корисний сигнал це гармонійне коливання з частотою Ω , маємо *однотональну амплітудну модуляцію*.

$$U_{\text{ам}}(t) = U_M \left[1 + M \cos(\Omega t + \Phi_o) \right] \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$U_{\text{ам}}(t) = U_M \cos(\omega_o t + \varphi_o) + U_M M \cos(\Omega t + \Phi_o) \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

Враховуючи

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \left[\cos(x + y) + \cos(x - y) \right]$$

Отримаємо:

$$U_{\text{ам}}(t) = U_M \cos(\omega_o t + \varphi_o) + \frac{U_M M}{2} \left[\cos((\omega_o + \Omega)t + \varphi_o + \Phi_o) + \cos((\omega_o - \Omega)t + \varphi_o - \Phi_o) \right]$$

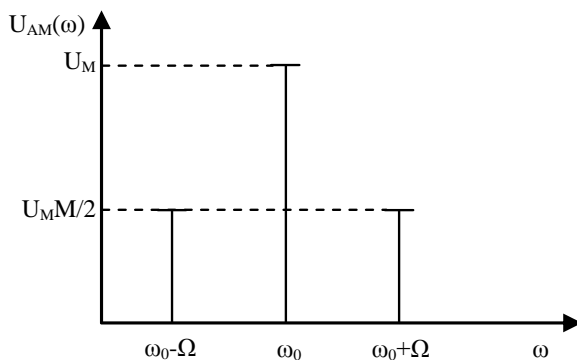


Рисунок 3.2 – Спектр однотоного АМ сигналу

де ω_o – несуча частота,
 $\omega_o + \Omega$ – верхня бокова частота,
 $\omega_o - \Omega$ – нижня бокова частота.

Ця формула ілюструє спектральний склад однотоного АМ сигналу. Верхнє і нижнє бокові коливання мають однакову амплітуду та розміщені симетрично відносно несучого коливання (рисунок 3.2).

Спектр довільного АМ сигналу

Якщо розглянути більш складний сигнал, наприклад, сигнал, що складається з тригонометричних функцій:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

То АМ сигнал буде записаний таким чином:

$$U_{\text{ам}}(t) = \left[1 + \sum_{i=1}^N M_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \right] \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

Введемо поняття парціальних (часткових) коефіцієнтів модуляції:

$$M_i = M \cdot \alpha_i$$

Тоді

$$U_{\text{ам}}(t) = \left[1 + \sum_{i=1}^N M_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \right] \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

На рисунку 3.3 наведено спектр складного АМ сигналу.

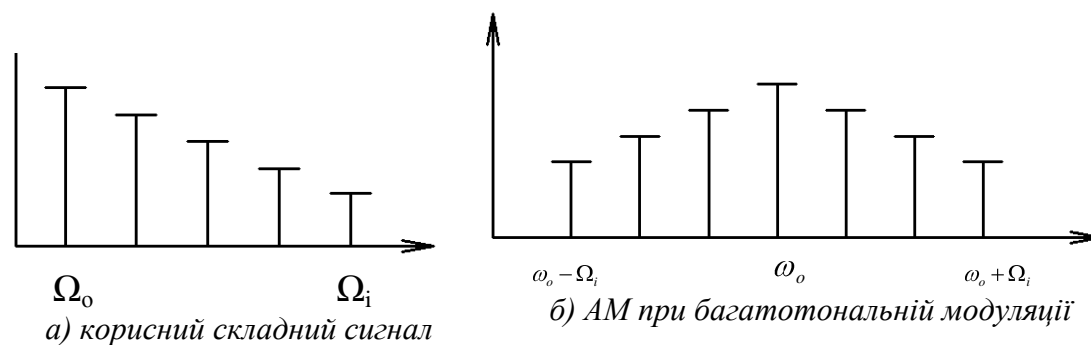


Рисунок 3.3 – Спектр складного АМ сигналу

Спектр складного АМ сигналу містить групи верхніх та нижніх бокових коливань. Спектр верхніх бокових коливань це масштабна копія спектра корисного сигналу, що зсунена в область високих частот. Спектр нижніх бокових коливань також відображає спектральну діаграму сигналу $S(t)$, але розташований дзеркально відносно несучої частоти ω_0 .

Як видно, ширина спектра АМ сигналу дорівнює подвоєному значенню найвищої частоти в спектрі корисного НЧ сигналу.

Потужності несучого та бокових коливань пов'язані наступною формулою:

$$\frac{P_{BE} + P_{HE}}{P_{HEa}} = \frac{M^2}{2}$$

Таким чином, навіть у випадку 100% модуляції ($M=1$) доля потужності бокових коливань складає 50%.

Хід роботи

1. Побудувати однтотонально-модульований АМ сигнал. В якості несучого використовується сигнал частотою 100 кГц амплітудою 10В. Параметри корисного сигналу наведені в таблиці 3.1.
2. Побудувати амплітудний спектр АМ сигналу, отриманого в пункті 1.
3. Розрахувати повну енергію АМ сигналу та енергію бокової полоси.
4. Побудувати двотонально-модульований АМ сигнал. Параметри несучої – ті ж самі. Параметри корисного сигналу наведені в таблиці 3.1.
5. Побудувати спектр АМ сигналу та визначити його ширину.

Таблиця 3.1 – Параметри корисних сигналів

№	Завдання 1		Завдання 2			
	U, В	f, Гц	U ₁ , В	f ₁ , Гц	U ₂ , В	f ₂ , Гц
1.	3	100	3	100	0,5	89
2.	4	120	4	120	0,4	88
3.	5	140	5	140	0,3	87
4.	6	160	6	160	0,8	50
5.	7	155	7	155	1	100
6.	8	187	8	187	3	99
7.	9	136	9	136	7	62
8.	2	159	2	159	0,2	70
9.	3	145	3	145	0,9	75
10.	4	136	4	136	2	46
11.	5	174	5	174	3	98
12.	6	200	6	200	1,6	88
13.	7	199	7	199	4	50

Контрольні питання

1. Що таке модуляція сигналів? Які види модуляції вам відомі?
2. Що таке коефіцієнт амплітудної модуляції? Які умови призводять до перемодуляції?
3. Який вигляд має спектр однотональної АМ?
4. Наведіть спектр складного АМ сигналу. Як спектр складного АМ сигналу пов'язаний зі спектром корисного сигналу?
5. Чому дорівнює ширина спектру АМ сигналу? Який максимальний ККД можна отримати для АМ сигналу та при яких умовах?
6. Які різновиди АМ вам відомі? В чому полягають їх особливості?

4 Лабораторна робота № 4

Випадкові сигнали.

Мета: навчитися будувати випадкові сигнали та отримувати їх часові та спектральні характеристики

Теоретичні відомості

Випадкова величина – це така величина, яка набуває того чи іншого значення, передбачити яке заздалегідь неможливо.

Функція розподілу випадкової величини ξ є ймовірністю того, що випадкова величина ξ набуває значення менше, ніж довільне дійсне число x :

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}.$$

Функція розподілу має такі властивості:

- ця функція невід'ємна і $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$;
- ця функція неспадна, тобто $F_{\xi}(x_1) < F_{\xi}(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$;
- $F_{\xi}(-\infty) = 0$;
- $F_{\xi}(\infty) = 1$.

Густина ймовірності $f_{\xi}(x)$ випадкової величини ξ – це функція, що задовольняє таким вимогам:

- є невід'ємною, тобто $f_{\xi}(x) > 0$;
- *густина ймовірності* та *функція розподілу* однозначно зв'язані між собою

$$f_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}, \quad F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) d\lambda;$$

- для густини ймовірності випадкової величини повинна виконуватись умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1;$$

- $P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_{\xi}(x) dx.$

На рисунку 4.1, а наведено функцію розподілу та густину ймовірності для рівномірного закону, де

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

На рисунку 4.1, б наведено функцію розподілу та густину ймовірності для нормального закону, де

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \frac{(\lambda - m_{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2}} d\lambda$$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - m_{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2}}$$

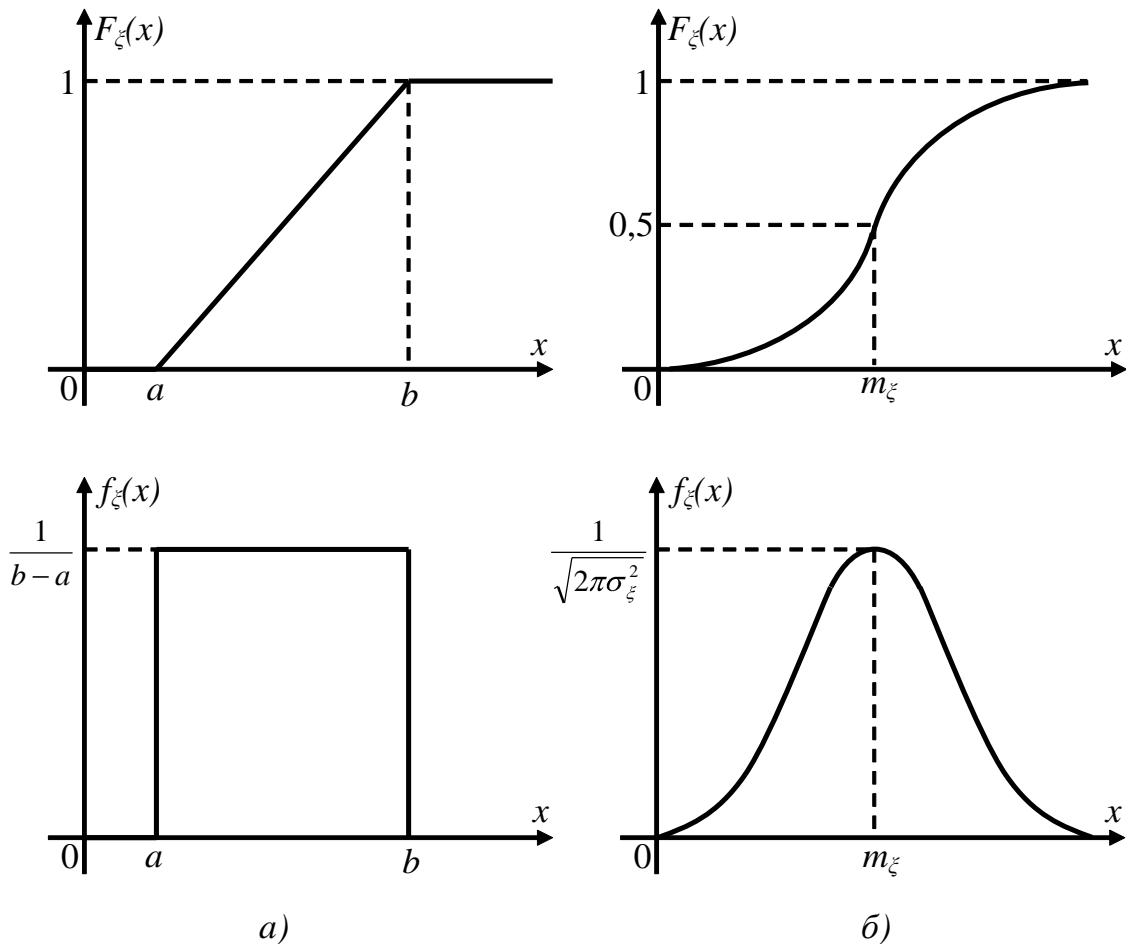


Рисунок 4.1 – Графіки функцій розподілу та густини ймовірності: а) рівномірний розподіл; б) гауссов (нормальний) розподіл

Числові характеристики випадкових величин

При розв'язанні багатьох практичних задач немає необхідності характеризувати випадкову величину за допомогою розглянутих вище функцій і достатньо буває вказати лише окремі числові параметри, що визначають найважливіші особливості розподілу випадкової величини. Такі характеристики, які дозволяють у стислій формі відобразити найсуттєвіші особливості розподілу і називають *числовими*

характеристиками випадкової величини. До числових характеристик випадкової величини відносяться *математичне очікування* та *дисперсія*.

Математичним очікуванням випадкової величини ξ називається числова характеристика m_ξ , що обчислюється за формулою

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x) dx.$$

Математичне очікування має такі властивості:

- математичне очікування не випадкової величини дорівнює цій величині;
- математичне очікування випадкової величини ξ , що має симетричну відносно значення $x=a$ густину ймовірності $f_\xi(x)$, дорівнює цій величині, тобто $m_\xi = a$.

Дисперсією D_ξ називається числова характеристика випадкової величини ξ , така що

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 \cdot f_\xi(x) dx.$$

Таким чином, *дисперсія* є мірою відхилення випадкової величини від її математичного очікування. Чим менша дисперсія тим менше ймовірність великих відхилень ξ від m_ξ .

Дисперсії притаманні наступні властивості:

- дисперсія величина невід'ємна, тобто $D_\xi \geq 0$;
- $D_\xi = 0$ тоді і лише тоді, коли $\xi = c$ і c – не випадкова величина;
- не випадкову величину можна виносити за знак дисперсії, підносячи її до квадрата, тобто $D_{c\xi} = c^2 D_\xi$.

На практиці інколи зручніше користуватись числовою характеристикою, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Для цього з дисперсії добувають квадратний корінь. Одержану числову характеристику називають *середнім квадратичним* або *стандартним відхиленням* випадкової величини

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}.$$

Випадкові сигнали

Випадковим процесом (сигналом) $\xi(t)$, називається процес значення якого у деякий фіксований момент часу $t = t_1$ є випадковою величиною $\xi(t_1)$.

Випадкова величина $\xi(t_1)$ називається *перерізом випадкового процесу* в момент часу $t = t_1$.

Реалізація випадкового процесу є не випадковою функцією $z(t)$, в якій відображено випадковий процес $\xi(t)$ в результаті досліду.

Якщо провести декілька дослідів, в результаті кожного з яких записати якусь реалізацію $z_i(t)$ випадкового процесу, де i – номер досліду, то одержимо сімейство – ансамбль реалізацій. Ансамбль реалізацій є таким експериментальним результатом, на базі якого можна одержати характеристики випадкового процесу. Ансамбль реалізацій випадкового процесу аналогічний до сукупності спостережуваних значень випадкової величини ξ . Відмінність полягає в тому, що в даному разі спостерігаються не числові значення, а функції.

Для значень випадкового процесу $\xi(t)$ у будь-які моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n з області визначення процесу n -вимірна функція розподілу ймовірностей визначається таким аналітичним виразом:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n).$$

Функція розподілу ймовірностей залежить від t_1, t_2, \dots, t_n як від параметрів та має всі властивості n -вимірної функції розподілу.

Похідна від функції розподілу ймовірностей визначає n -вимірну густину ймовірності:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Також справедливою є формула зворотного переходу:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n.$$

Вичерпним описом випадкового процесу є його функція розподілу або густина ймовірності максимального порядку (вимірності), якщо вони існують.

Невипадкова функція двох аргументів t_1 та t_2

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

називається *кореляційною (автокореляційною) функцією* випадкового процесу $\xi(t)$.

Якщо $t_1 = t$ і $t_2 = t + \tau$,

$$R_\xi(t, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t, t + \tau) dx_1 dx_2.$$

Властивості кореляційної функції випадкового процесу:

- Значення кореляційної функції випадкового процесу при $t_1 = t_2 = t$ дорівнює потужності процесу у перерізі t , при цьому $|R_\xi(t, t + \tau)| \leq R_\xi(t, t)$;
- $R_\xi(t, t + \tau) = R_\xi(t, t - \tau)$;
- Кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2, t_1)$.

Невипадкова функція двох аргументів t_1 та t_2

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1 - m_{\xi}(t_1)] \cdot [f_2 - m_{\xi}(t_2)] f_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

яка при кожній парі значень аргументів t_1 та t_2 дорівнює коваріації відповідних перерізів випадкового процесу $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$, називається *коваріаційною (автоковаріаційною) функцією* випадкового процесу $\xi(t)$.

Основні властивості автоковаріаційної функції випадкового процесу:

- при рівності аргументів $t_1 = t_2$ коваріаційна функція дорівнює дисперсії;
- коваріаційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто $K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_2, t_1)$.

Кореляційна і коваріаційна функції тісно пов'язані одна з одною:

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2).$$

Випадковий процес зі скінченною дисперсією називається *стаціонарним*, якщо його математичне очікування та кореляційна функція інваріантні відносно зсуву у часі. Це значить, що математичне очікування такого процесу не залежить від часу, а кореляційна функція залежить лише від різниці аргументів $t_2 - t_1$, тобто

$$m_{\xi} = \text{const}, R_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_2 - t_1) = R_{\xi}(\tau).$$

Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ називається *ергодичним процесом*, якщо всі його ймовірнісні характеристики можна знайти за однією його реалізацією. Інакше кажучи, стаціонарний процес $\xi(t)$ має ергодичну властивість, якщо результати усереднення однієї реалізації за часом збігається з відповідними результатами усереднення за ансамблем реалізацій. Математично це можна записати так:

$$\hat{m}_{\xi} = \overline{\xi(t)} = \langle \xi(t) \rangle = m_{\xi},$$

де $\hat{m}_{\xi} = \overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$ – усереднення однієї реалізації за часом;

$m_{\xi} = \langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ – статистичне усереднення випадкового процесу за ансамблем реалізацій;

$$\hat{D}_{\xi} = \overline{[\xi(t) - m_{\xi}]^2} = \langle [\xi(t) - m_{\xi}]^2 \rangle = D_{\xi},$$

де $\hat{D}_{\xi} = \overline{[\xi(t) - m_{\xi}]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m_{\xi}]^2 dt$;

$$\hat{K}_{\xi} = \overline{[\xi(t) - m_{\xi}] \cdot [\xi(t - \tau) - m_{\xi}]} = \langle [\xi(t) - m_{\xi}] \cdot [\xi(t - \tau) - m_{\xi}] \rangle,$$

де $\hat{K}_{\xi} = \overline{[\xi(t) - m_{\xi}] \cdot [\xi(t - \tau) - m_{\xi}]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m_{\xi}] \cdot [\xi(t - \tau) - m_{\xi}] dt$;

$$\hat{R}_{\xi} = \overline{\xi(t) \xi(t - \tau)} = \langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle,$$

$$\text{де } \hat{R}_\xi = \overline{\xi(\xi(-\tau))} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(\xi(-\tau)) dt.$$

Хід роботи

1. Skorистavshis'ya danimi tablicy 4.1 zadati ergodichnyy vpadkovyy signal. Chas sposterezhen'ya signalu 1 s, kilykist' tochok, sho utvoruyut signal dorivnyuє 1000.

2. Pobuduvaty otrimanyy signal, gistogramu rozpodilyu znachenyh amplitudy signalu sumishenu z grafikom funktsiyi hustiny ymovirnosti. Poyasniti otrimani rezultaty.

3. Zbilyshiti kilykist' tochok, sho utvoruyut vpadkovyy signal do 10^5 , pobuduvaty gistogramu rozpodilyu znachenyh amplitudy signalu sumishenu z grafikom funktsiyi hustiny ymovirnosti. Porivnyati otrimani rezultaty z rezultatyami vykonannya p. 2. Zrobiti visnovky.

4. Utvoriti signaly, sho є sumoyu deternimovanoj skladovoj (video ta radio impul'sy z p.1 laboratornoy roboty №1) ta vpadkovoj skladovoj (signal z p. 1 tsiei roboty). Porivnyati spektralnu hustynu serednoy potuzhnosti video, radio impul'siv zi spektralnoju hustynoyu serednoy potuzhnosti otrimanyh signaliv.

Таблиця 4.1 – Параметри випадкових сигналів

Варіант	Вид функції розподілу	Формула густини ймовірності	Математичне очікування	Дисперсія
1	2	3	4	5
1.	Гаусів (нормальний)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot b} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{b^2}}}{2}$	0	0,3
2.	Рівномірний	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$	0,1	0,4
3.	Експонентний	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\frac{x}{a}}, & x > 0 \end{cases}$	0,4	0,16
4.	Лапласа	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{ -x+a }{b}}}{b}$	0,2	0,5

Продовження таблиці 4.1

1	2	3	4	5
5.	Логістичний	$f(x) = \frac{e^{\frac{x-a}{b}}}{b \left(1 + e^{\frac{x-a}{b}} \right)^2}$	-0,1	0,3
6.	Максвела	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2}}}{a^3}, & x > 0 \end{cases}$	0,75	0,1
7.	Релея	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2}}}{a^2}, & x > 0 \end{cases}$	0,6	0,1
8.	Трикутне	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & a \leq x \leq b \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)^2}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$	0	0,54
9.	Гаусів (нормальний)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot b} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{b^2}}}{2}$	-0,2	0,6
10.	Рівномірний	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$	0	0,25
11.	Експонентний	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\frac{x}{a}}, & x > 0 \end{cases}$	0,6	0,36
12.	Лапласа	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{ -x+a }{b}}}{b}$	-0,3	0,4
13.	Логістичний	$f(x) = \frac{e^{\frac{x-a}{b}}}{b \left(1 + e^{\frac{x-a}{b}} \right)^2}$	0	0,7

Контрольні питання

1. Дайте визначення наступним поняттям: *функція розподілу, густина ймовірності, математичне очікування, дисперсія.*
2. Які функції розподілу вам відомі? Опишіть їх властивості.
3. Що спільного та в чому відмінність *стаціонарних* та *ергодичних* випадкових процесів?
4. Що таке *кореляційна* функція випадкового процесу? Які її властивості вам відомі?
5. Як розрахувати *спектральну густину середньої потужності* випадкового сигналу? Як *спектральна густина середньої потужності* пов'язана з *кореляційною* функцією випадкового сигналу?

Рекомендована література

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач – М.: Высш. шк., 1988. – 160 с.
3. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів: В 4 т. - Харків: "Компанія СМІТ", 2003.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1977. – 608 с.
5. Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство. – М.: Издательский дом “Додэка XXI”, 2002. – 176 с.
6. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2 ч./Пер. с англ.- М.: Мир, 1988.

**Додаток А – Приклад титульного листа звіту про
виконання циклу лабораторних робіт**

Міністерство освіти і науки України
Чернігівський державний технологічний університет

Кафедра промислової електроніки

Звіт
про виконання циклу лабораторних робіт
з дисципліни
”МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ”

Виконав: студент групи (*шифр групи*)
(*П.І.Б. студента*)

Перевірив: (*П.І.Б. викладача*)

Чернігів (*рік*)