

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН**

**РОЗРАХУНОК ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ  
ПЛАНЕТАРНИХ РЕДУКТОРІВ**

**Методичні вказівки**

до виконання курсових проектів та курсових робіт  
з «Теорії механізмів і машин»  
для студентів всіх форм навчання за напрямками підготовки:

**6.050502 – Інженерна механіка**

**6.050503 – Машинобудування**

**6.050504 – Зварювання**

**6.070106 – Автомобільний транспорт**

Затверджено  
на засіданні кафедри  
теоретичної і прикладної механіки  
Протокол № 08 від 01.06.2013

Теорія механізмів і машин. Розрахунок зубчастих механізмів планетарних редукторів. Методичні вказівки до виконання курсових проектів та курсових робіт з «Теорії механізмів і машин» для студентів всіх форм навчання за напрямками підготовки: 6.050502 – Інженерна механіка, 6.050503 – Машинобудування, 6.050504 – Зварювання, 6.070106 – Автомобільний транспорт./ Укл.: Кайдаш М.Д. – Чернігів: ЧНТУ, 2013. – 42 с.

Укладач: Кайдаш Михайло Дмитрович, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки

Відповідальний за випуск: Дубенець Віталій Георгійович, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, доктор технічних наук, професор

Рецензент: Грицюк Віталій Юхимович, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки, кандидат технічних наук

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>4</b>
<b>1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ .....</b>	<b>5</b>
<b>2 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ВІДНОШЕНЬ У ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМАХ. МЕТОД ІНВЕРСІЇ.....</b>	<b>8</b>
<b>3 КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМІВ .....</b>	<b>12</b>
<b>4 ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЕЛ ЗУБЦІВ КОЛІС ПЛАНЕТАР - НОЇ ПЕРЕДАЧІ .....</b>	<b>15</b>
<b>ПРИКЛАД 4.1 .....</b>	<b>17</b>
<b>ПРИКЛАД 4.2 .....</b>	<b>24</b>
<b>ПРИКЛАД 4.3 .....</b>	<b>29</b>
<b>ПРИКЛАД 4.4 .....</b>	<b>35</b>
<b>5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....</b>	<b>42</b>
<b>6 РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....</b>	<b>42</b>

## ВСТУП

Ці методичні вказівки до виконання курсового проекту (роботи) складено відповідно до навчальних програм курсу «Теорія механізмів і машин» за напрямками підготовки: 6.050502 – Інженерна механіка, 6.050503 – Машинобудування, 6.050504 – Зварювання, 6.070106 – Автомобільний транспорт.

При вивченні курсу "Теорія механізмів і машин" (ТММ) студенти механічних спеціальностей оволодівають основними знаннями в галузі механіки машин. Формування професійного рівня фахівця нероздільно пов'язано із його вмінням самостійно розв'язувати практичні завдання. Навички самостійної роботи студента набувають розвитку в процесі виконання курсового проекту. Одним з розділів курсового проекту є „Синтез привода”. Ця частина безпосередньо пов'язана з проектуванням зубчастих механізмів та визначенням їх основних характеристик. Зокрема, в проекті передбачається синтез передаточного механізму у вигляді планетарного редуктора та відкритої зубчастої передачі.

Основним параметром, який покладено в основу розрахунку, є передаточне відношення привода. Кінцевою метою розрахунку є визначення чисел зубців коліс редуктора, виходячи з умов співвісності, складання та сусідства.

Виконання розрахунку з дотриманням вищезазначених умов для кожної кінематичної схеми редуктора має специфічні особливості і, як наслідок, викликає певні практичні труднощі.

Метою методичних вказівок є допомога студентам механіко-технологічного факультету денної та заочної форм навчання при виконанні ними курсового проекту (роботи) з ТММ. В методичному виданні викладено основні теоретичні положення, надано практичні рекомендації та наведено приклади щодо безпосереднього виконання синтезу планетарного механізму відповідно до завданої кінематичної схеми.

## 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

**Планетарними** називають багатоланкові зубчасті механізми, у яких геометрична вісь хоча б одного з коліс є рухомою.

Планетарні механізми (передачі) знаходять широке застосування в різних робочих та транспортних машинах. Їх використовують як перетворювачі руху - редуктори, або мультиплікатори; в коробках швидкостей, підсумовуючих механізмах (диференціалах), механізмах обкатки та ін. При відповідному виборі схеми та чисел зубців коліс такі механізми дають можливість одержувати великі передаточні відношення (до 10000), що складно здійснити у звичайних зубчастих передачах з нерухомими осями.

Деякі типові схеми планетарних механізмів показані на рисунку 1.1.

Основними ланками планетарної зубчастої передачі (таблиця 1.1) є :

– **сателіти** – зубчасті колеса, осі яких рухаються відносно стояка.

Найчастіше планетарні механізми містять декілька сателітів, котрі жорстко з'єднані між собою, утворюючи **блок сателітів**.

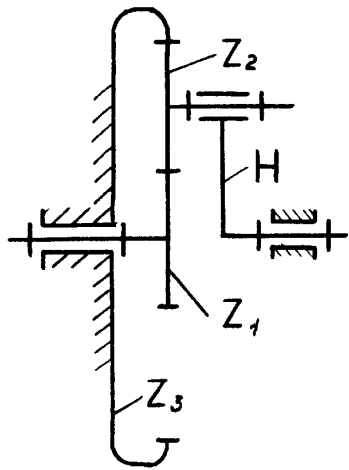
З метою спрощення графічного зображення на кінематичних схемах показують, як правило, один із сателітів, оскільки інші з них не накладають додаткових в'язей на відносний рух ланок механізму в цілому;

– **води́ло** – ланка, в якій розташовані осі обертання сателітів;

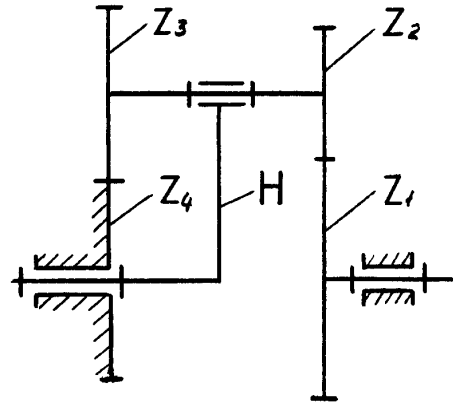
– **центрально́ні колеса** – зубчасті колеса з нерухомими відносно стояка осями. Центральні колеса завжди є сполученими із сателітами. Вони можуть бути як рухомими, так і нерухомими. Нерухомі центральні колеса звуться **опорними**.

Таблиця 1.1 – Основні ланки планетарної зубчастої передачі

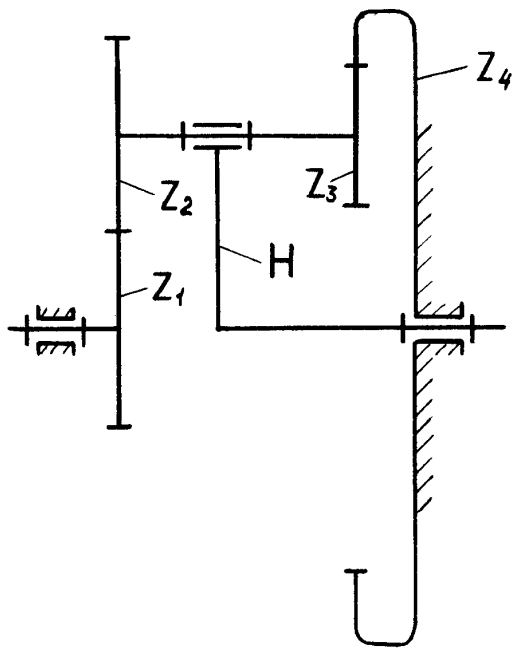
№ схеми (рисунок 1.1)	Центральні колеса	Сателіти	Опорні колеса	Води́ло
а	1,3	2	3	Н
б,в,г	1,4	2,3	4	Н



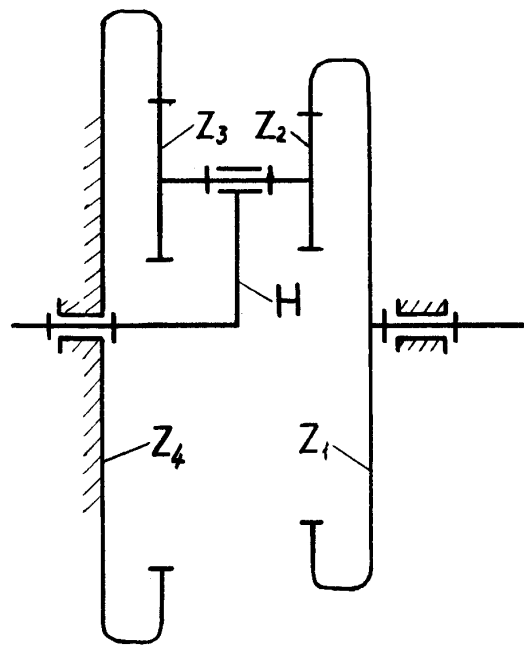
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.1 – Схема планетарних механізмів: а, в – з різно-типним зачепленням; б, г – з однотипним зачепленням

Планетарні механізми можуть мати різний **ступінь рухливості  $W$** . Якщо  $W \geq 2$ , то такий планетарний механізм називається **диференціальним**. В диференціальних механізмах всі центральні колеса є рухомими, тобто опорні колеса у них - відсутні. Так, планетарні механізми, подані на рисунку 1.1, можуть бути перетворені у диференціальні, якщо в них звільнити від закріплення опорні колеса 3 (рисунок 1.1,а), або 4 (рисунок 1.1, б, в, г).

Окрему групу планетарних передач складають **замкнені планетарні механізми**. Такі механізми можуть бути одержані з диференціальних, якщо в останні додати замикаючий ланцюг у вигляді двох пар зубчастих коліс, наприклад, 5 і 6, 7 і 8 (рисунок 1.2).

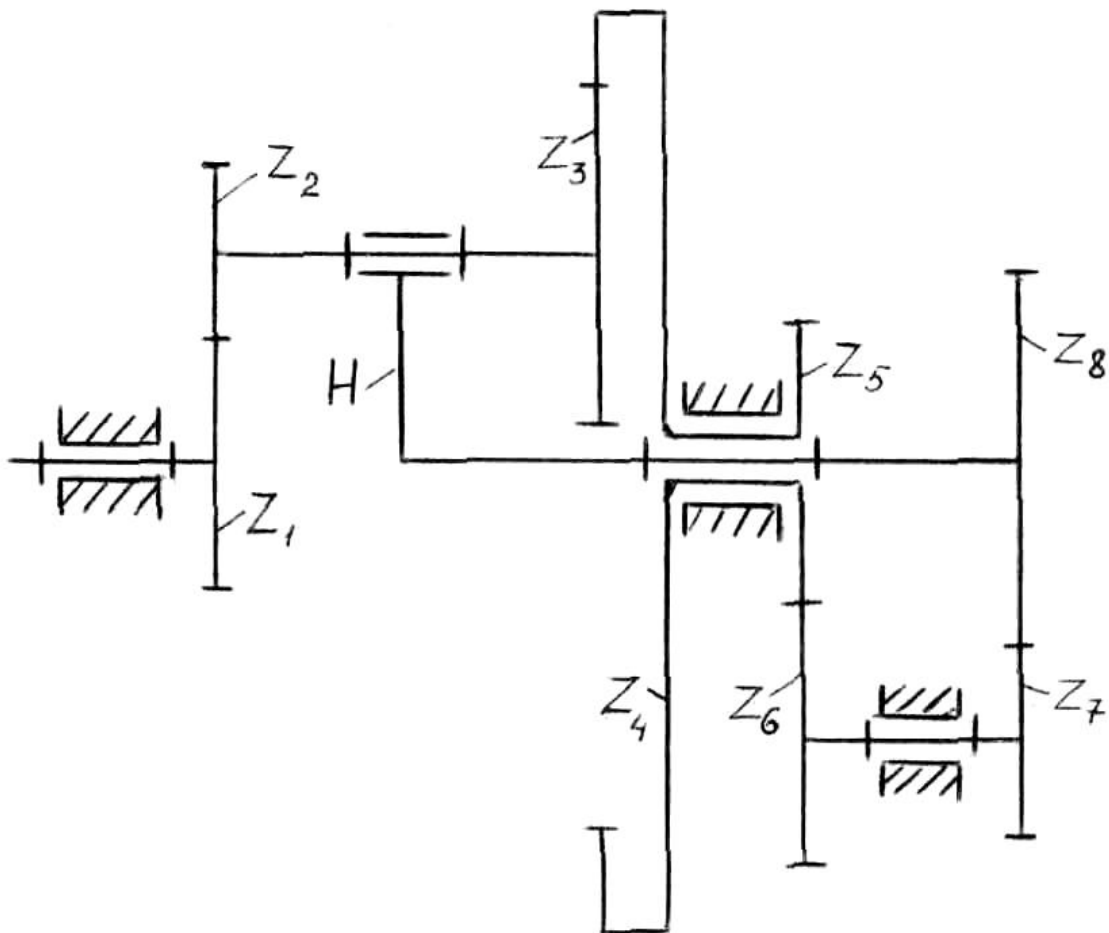


Рисунок 1.2 – Кінематична схема замкненого планетарного механізму

Для визначення ступеня рухливості планетарних механізмів придатна структурна формула П.Л. Чебишева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (1.1)$$

де  $n$  – число рухомих ланок;

$p_5, p_4$  – число кінематичних пар п'ятого та четвертого класів відповідно.

Для механізмів, зображених на рисунку 1.1,

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Для замкненого планетарного механізму (рисунок 1.2)

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1.$$

## 2 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ВІДНОШЕНЬ У ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМАХ. МЕТОД ІНВЕРСІЇ

Оскільки у планетарних механізмах є колеса з рухомими осями обертання, то для визначення передаточних відношень тут застосовують **метод оберненого руху** (інверсії). Сутність метода полягає в наступному: якщо рухомій системі, що складається з декількох тіл, надати додаткового для всіх тіл руху, то *відносний рух системи тіл* залишиться незмінним.

Розглянемо дворядковий диференціальний механізм (рисунок 2.1), складений з рухомих ланок: зубчастого колеса I, блоку сателітів 2 і 3, колеса 4 та водила H.

Нехай  $\omega_1, \omega_{2,3}, \omega_4$  і  $\omega_H$  – відповідні швидкості обертання ланок під час їх дійсного руху. Надамо всьому механізму, тобто всім його ланкам, кутову швидкість  $-\omega_H$ . Відносний рух ланок при цьому не зміниться. Позначимо їх швидкості під час оберненого руху як  $\omega'_1, \omega'_{2,3}, \omega'_4, \omega'_H$ .

Таким чином, кутова швидкість водила H в оберненому механізмі  $\omega'_H$  дорівнює нулю:



$$\omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0.$$

Це дозволяє розглядати "обернений" механізм, як звичайний зубчастий механізм з нерухомими осями (таблиця 2.1).

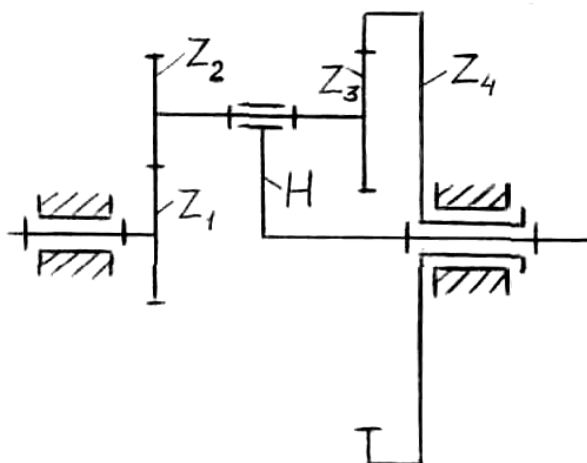


Рисунок 2.1 – Кінематична схема диференціального механізму

Таблиця 2.1 – Швидкість ланок механізму для дійсного і оберненого руху

Індекс ланки	Швидкість ланки для дійсного руху	Швидкість ланки для оберненого руху
1	$\omega_1$	$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H$
2, 3	$\omega_{2,3}$	$\omega'_{2,3} = \omega_{2,3} - \omega_H$
4	$\omega_4$	$\omega'_4 = \omega_4 - \omega_H$
H	$\omega_H$	$\omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0$

Визначимо передаточне відношення для "оберненого" механізму  $i_{14}^{(H)}$ , якщо рух передається від першого колеса до четвертого

$$i_{14}^{(H)} = \frac{\omega'_1}{\omega'_4} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} \quad (2.1)$$

Індекс (H) позначає, що водило є нерухоме.

Залежність (2.1) відома, як **формула Вілліса**, що застосовується у дослідженні та проектуванні диференціальних механізмів.

З іншого боку, передаточне відношення  $i_{14}^{(H)}$  можна визначити і, як

для звичайної зубчастої передачі з нерухомими осями:

$$i_{14}^{(H)} = i_{12} \cdot i_{34} = \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \left( \frac{z_4}{z_3} \right), \quad (2.2)$$

де  $z_1, z_2, z_3, z_4$  - числа зубців коліс.

В окремому випадку, якщо одно з центральних коліс механізму є нерухомих, наприклад, колесо 4, тоді  $\omega_4 = 0$  (рисунок 1.1, в) і формула Віллеса набуває вигляду:

$$i_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}^{(4)},$$

або

$$i_{1H}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(H)}, \quad (2.3)$$

де  $i_{1H}^{(4)}$  - передаточне відношення від першого колеса до водила Н при  $\omega_4 = 0$ .

Підставляючи до формули (2.3) співвідношення (2.2), дістанемо

$$i_{14}^{(H)} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (2.4)$$

Для інших схем планетарних механізмів, наведених на рисунку 1.1, формулу Віллеса можна аналогічно привести до вигляду

– для схеми а:

$$i_{14}^{(H)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}, \quad (2.5)$$

– для схем б, г:

$$i_{14}^{(H)} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (2.6)$$

Якщо вхідною ланкою планетарної передачі є водило Н, а вихідною – колесо 1 (рисунок 1.1), то передаточне відношення від водила Н до коле-

са 1 визначиться так:

– для схеми а:

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}}, \quad (2.7)$$

– для схем б, в, г:

$$i_{H1}^{(4)} = \frac{1}{i_{1H}^{(4)}}. \quad (2.8)$$

**Приклад 2.1** Визначити передаточне відношення для редуктора (рисунок 1.1,б) при

$$z_1 = 100, z_2 = 99, z_3 = 100, z_4 = 101.$$

За формулою (2.6) дістанемо:

$$i_{1H}^{(4)} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = \frac{1}{10000}.$$

Отриманий результат означає, що при повороті колеса 1 на один оберт водило зробить 10000 обертів.

Однак, слід мати на увазі, що механізм з наведеними числами зубців при ведучому колесі 1 практично не може функціонувати з причини самогальмування. Якщо ж ведучою ланкою вважати водило, то передача від нього руху на перше колесо можлива, але з низьким коефіцієнтом корисної дії (близько 1%). Тому, незважаючи на можливість отримання дуже великих або малих передаточних відношень, планетарні механізми, зображені на схемах б і г (рисунок 1.1), використовують тільки в малопотужних приводах, як редуктори. До того ж перевага надається передачам саме за схемою г (рисунок 1.1), як більш компактним та маючим декілька більший ККД (близько 5%).

В передачах з зачепленням **різного типу**, де одна пара коліс контактує зовнішнім, а друга – внутрішнім способом (рисунок 1.1, а, в), не можна одержати дуже великі, або малі передаточні відношення. Це пояснюється тим, що їх числові значення відрізняються від передаточних відношень "обернених" механізмів тільки на одиницю (формули 2.4 та 2.5).

Оскільки значення  $i_{1H}^{(3)}$  і  $i_{1H}^{(4)}$  тут є додатні, то напрямки руху вхідного та вихідного валів завжди співпадають.

Планетарні механізми з різнотипним зачепленням зубчастих коліс знаходять широке застосування в силових передачах як багатосателітні редуктори середньої та великої потужності. Коефіцієнт корисної дії (ККД) таких передач наближається до 96...98%.

### 3 КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМІВ

При визначенні ККД планетарних механізмів на практиці користуються переважно наближеними методами. При цьому тертя враховується тільки у зубчастих зачепленнях, а втратами потужності в інших кінематичних парах, наприклад, у підшипниках – нехтують.

Отримані за таких умов, формули для коефіцієнту корисної дії планетарних механізмів  $\eta$  наведено у таблиці 3.1:

Таблиця 3.1 – Коефіцієнт корисної дії планетарних механізмів

$i_{1H}^{(4)}$	$i_{1H}^{(4)} < 0, i_{1H}^{(4)} > 1$	$0 < i_{1H}^{(4)} < 1$
Ведуче колесо 1	$\eta = \frac{1}{i_{1H}^{(4)}} \left[ -\eta^{(H)} \left( -i_{1H}^{(4)} \right) \right]$	$\eta = \frac{1}{i_{1H}^{(4)}} \left[ 1 - \frac{1}{\eta^{(H)}} \left( -i_{1H}^{(4)} \right) \right]$
Ведуче водило H	$\eta = \frac{i_{1H}^{(4)}}{1 - \frac{1}{\eta^{(H)}} \left( -i_{1H}^{(4)} \right)}$	$\eta = \frac{i_{1H}^{(4)}}{1 - \eta^{(H)} \left( -i_{1H}^{(4)} \right)}$

Параметр  $\eta^{(H)}$  означає ККД “оберненого” механізму, для якого:

$$\eta^{(H)} = \eta_1 \cdot \eta_2, \quad (3.1)$$

де  $\eta_1, \eta_2$  - ККД першої та другої пари зубчастих коліс.

Для 7-8 ступенів точності виготовлення зубчастих коліс та підшип-

ників кочення покладають такі значення ККД однієї пари зубчастих коліс:

– для зовнішнього зачеплення

$$\eta = 0,96 \dots 0,98 ;$$

– для внутрішнього зачеплення

$$\eta = 0,97 \dots 0,99 .$$

Як приклад, на рисунку 3.1 показано графічне зображення залежностей, наведених у таблиці 3.1. Для визначеності тут прийнята схема механізму (рисунок 1.1,б), для якої

$$\eta^{(H)} = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,97 \cdot 0,97 = 0,94.$$

З рисунка 3.1 видно, що при  $i_{1H}^{(4)} = \frac{1}{10000}$  (приклад 2.1) передача руху від колеса 1 до водила Н неможлива, тому що наведене значення  $i_{1H}^{(4)}$  потрапляє до області самогальмування, де  $\eta = 0$  :

$$-0,064 \leq i_{1H}^{(4)} \leq -0,060 .$$

Якщо ведучим є водило, тоді самогальмування не буде (рисунок 3.1, б).

Однак, при  $i_{1H}^{(4)} = \frac{1}{10000}$  обчислене значення ККД є дуже незначним, а саме:

$$\eta = \frac{i_{1H}^{(4)}}{1 - \eta^{(H)} (-i_{1H}^{(4)})} = \frac{\frac{1}{10000}}{1 - 0,94(1 - \frac{1}{10000})} = 0,0017 .$$

Зауважимо, що ККД планетарних передач перебільшує ККД аналогічних механізмів з нерухомими осями для передаточних відношень:

– для графіка, показаного на рисунку 3.1, а:

$$\text{при } i_{1H}^{(4)} > \frac{1}{1 + \eta^{(H)}} ;$$

– для графіка, показаного на рисунку 3.1, б:

$$\text{при } i_{1H}^{(4)} > \frac{\eta^{(H)}}{1 + \eta^{(H)}} .$$

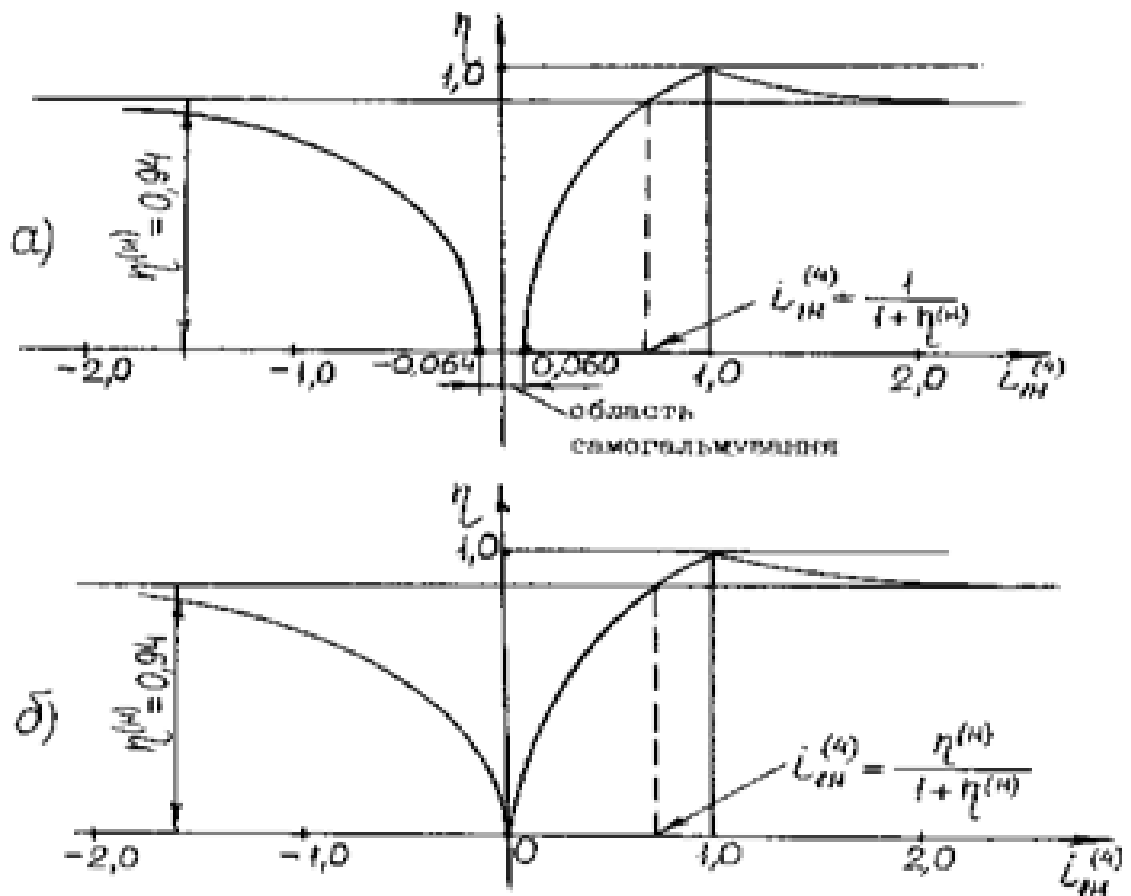


Рисунок 3.1 – Графіки змінювання ККД планетарної передачі  $\eta$  в залежності від передаточного відношення  $i_{1H}^{(4)}$  :

- а – для механізму з ведучим колесом 1;
- б – для механізму з ведучим водилом Н

## 4 ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЕЛ ЗУБЦІВ КОЛІС ПЛАНЕТАРНОЇ ПЕРЕДАЧІ

Найчастіше при розрахунку зубчастого планетарного механізму за основу беруть його передаточне відношення, що визначається із завданих частот обертання головного вала машини та електродвигуна. Визначення чисел зубців коліс планетарного механізму  $z_1, z_2, \dots$  є комплексною задачею, при розв'язанні якої слід має бути виконано декілька умов:

1) числа зубців  $z_1, z_2, \dots$  повинні бути цілими, на котрі накладаються такі обмеження:

- для коліс з зовнішніми зубцями  $z \geq 17$ ;
- для коліс з внутрішніми зубцями  $z \geq 85$  (а для коліс, що мають з ними зачеплення  $z \geq 20$ ).

Наведені вище обмеження виходять з умови відсутності підрізування та заклинювання зубців нульових коліс (в планетарних механізмах використовують, як правило, нульові колеса).

2) у центральних коліс та водила Н має бути загальна геометрична вісь обертання (**умова співвісності**).

Так, для механізмів, показаних на рисунку 1.1, умову співвісності можна записати у вигляді:

- для схеми а)

$$r_H = r_1 + r_2 = r_3 - r_2;$$

- для схеми б)

$$r_H = r_1 + r_2 = r_3 + r_4;$$

- для схеми в)

$$r_H = r_1 + r_2 = r_4 - r_3;$$

– для схеми г)

$$r_H = r_1 - r_2 = r_4 - r_3, \quad (4.1)$$

де  $r_H, r_1, r_2, r_3, r_4$  – радіуси водила та ділительних кіл зубчастих коліс відповідно.

Зважаючи на те, що радіуси ділительних кіл є пропорційними до чисел зубців коліс, співвідношення (4.1) можна також записати через кількість зубців  $z_1, z_2, z_3, z_4$ .

3) при розміщенні декількох сателітів у одній площині між колами їх вершин має бути забезпечено гарантований зазор (**умова сусідства**). Для механізмів, зображених на рисунку 1.1, умова сусідства має вигляд

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_c + 2}{z \pm z_c}, \quad (4.2)$$

де  $k$  – кількість сателітів;  $z_c$  – число зубців сателіта;  $z$  – число зубців центрального колеса, яке входить в зачеплення з сателітом. В формулі (4.2) знак “+” слід враховувати для зовнішнього зачеплення, знак “-” – для внутрішнього.

4) розміщення сателітів в зачепленні їх з центральним колесом має бути симетричним (**умова складання**)

$$\frac{z_1 i_{1H} \left( + k \Pi \right)}{k} = \Pi, \quad (4.3)$$

де  $\Pi = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\Pi$  – будь-яке додатне ціле число, або нуль;

$\Pi = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,  $\Pi$  – будь-яке додатне ціле число;

$i_{1H} = i_{1H}^{\left( \ominus \right)}$  – для схеми а (рисунок 1.1);

$i_{1H} = i_{1H}^{\left( \omin� \right)}$  – для всіх інших схем, показаних на рисунку 1.1.



5) визначені числа зубців коліс планетарного механізму повинні забезпечувати потрібне передаточне відношення з відхиленням в межах  $\pm 5\%$ .

На першому етапі розрахунку числа зубців визначають виходячи із завданого передаточного відношення та умови співвісності. Надалі виконується перевірка – на відповідність умовам складання та сусідства.

Розглянемо приклади розрахунку для найбільш характерних кінематичних схем планетарних механізмів, які пропонуються до виконання в курсових проектах (роботах).

#### **Приклад 4.1**

Визначити числа зубців для коліс планетарного редуктора (рисунок 4.1, а) виходячи з даних:

- частота обертання ротора двигуна:  $n_{\text{дв.}} = 1460 \text{ об/хв}$ ;
- частота обертання колеса  $z_B$ :  $n_B = 67 \text{ об/хв}$ ;
- модуль зубчастих коліс редуктора:  $m_I = 5 \text{ мм}$ ;
- модуль коліс  $z_A, z_B$ :  $m_{II} = 8 \text{ мм}$ ;
- числа зубців коліс:  $z_A = 15, z_B = 35$ .

Побудувати картину лінійних та діаграму кутових швидкостей.

Загальне передаточне відношення привода:

$$i = \frac{n_{\text{дв.}}}{n_B} = \frac{1460}{67}.$$

Потрібне передаточне відношення редуктора:

$$i_{1HT}^{\langle \rangle} = \frac{i}{i_{AB}} = \frac{i}{z_B/z_A} = \frac{1460}{67} \cdot \frac{15}{35} = 9,34. \quad (4.4)$$

З іншого боку, за формулою Вілліса:

$$i_{1H}^{\langle \rangle} = 1 - i_{13}^{\langle H \rangle} = 1 - \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \frac{z_3}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (4.5)$$

Порівнюючи (4.4) до (4.5), знайдемо:

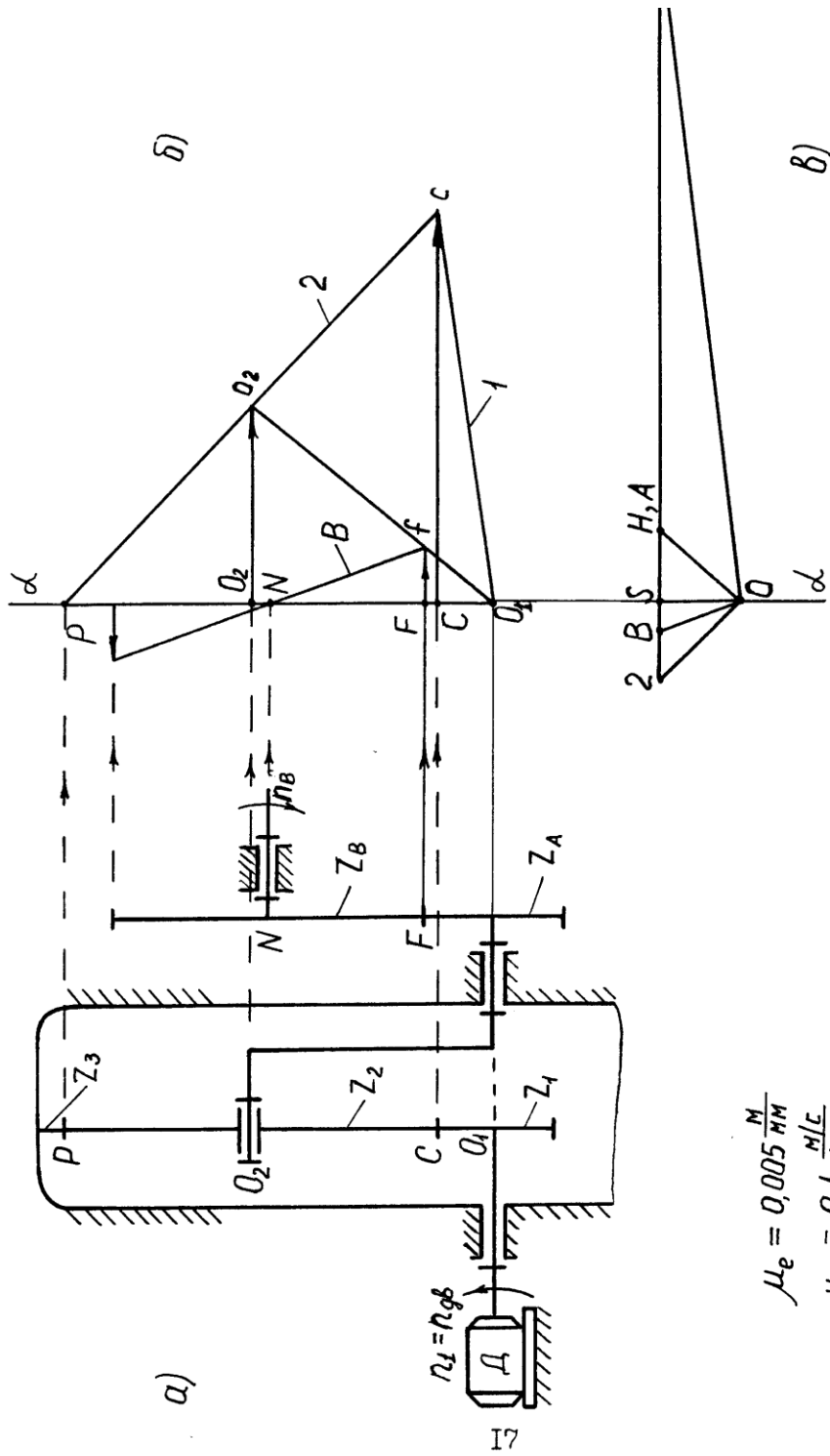


Рисунок 4.1 – Схема планетарного механiзму (до прикладу 4.1): а – кiнематична схема; б – план лiнiйних швидкостей; в – лiаграма кутових швидкостей

$$1 + \frac{z_3}{z_1} = \frac{1460}{67} \cdot \frac{3}{7},$$

звідки

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{3911}{469}, \text{ або } z_3 = \frac{3911}{469} \cdot z_1.$$

Значення  $z_1$  вибираємо довільно з ряду  $z_1 = 17, 18, 19, \dots$ , наприклад,  $z_1 = 18$ , тоді:

$$z_3 = \frac{3911}{469} \cdot 18 = 150,1.$$

Отримане значення округлюємо до цілого числа  $z_3 = 150$ , ( $z_3 > 85$ ).

Таким чином, фактичне передаточне відношення:

$$i_{1H} = 1 + \frac{150}{18} = \frac{84}{9} = 9,33.$$

Визначаємо похибку:

$$\frac{9,34 - 9,33}{9,34} \cdot 100\% = 0,11\% < 5\%.$$

Запишемо умову співвідності:

$$r_1 + r_2 = r_3 - r_2, \text{ або}$$

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2, \text{ звідки}$$

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{150 - 18}{2} = 66 \quad (66 > 20)$$

Визначив  $z_1 = 18, z_2 = 66, z_3 = 150$ , перевіримо виконання умови складання (4.3) з числом сателітів  $k = 3$ :

$$\frac{18 \cdot \frac{84}{9} + 3 \cdot \pi}{3} = \pi.$$

Очевидно, що ліва частина даного виразу завжди є цілим числом при будь-яких  $\pi = 0, 1, 2, 3, \dots$ , що свідчить про виконання умови складання для вибраного числа сателітів.

**Примітка.** Якщо взяти інше значення  $k$ , наприклад,  $k = 5$ , то умова складання буде нездійсненою:

$$\frac{18 \cdot \frac{84}{9} \left( + 5 \cdot \pi \right)}{5} \neq \text{Ц},$$

тобто ліва частина цього виразу ні при яких значеннях  $\Pi = 0,1,2,3,\dots$  не набуває цілого значення.

Перевіримо виконання умови сусідства (4.2):

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}, \text{ де } \sin \frac{\pi}{3} = 0,866;$$

$$\frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2} = \frac{66 + 2}{66 + 18} = 0,810, \text{ тоді } 0,866 > 0,810,$$

отже умова сусідства також виконується.

Якщо умова сусідства не виконується, число сателітів слід зменшити.

Зобразимо кінематичну схему передачі (рисунок 4.1,а), попередньо визначив діаметри ділільних кіл коліс:

$$d_1 = m_I z_1 = 5 \cdot 18 = 90,00 \text{ мм},$$

$$d_2 = m_I z_2 = 5 \cdot 66 = 330,00 \text{ мм},$$

$$d_3 = m_I z_3 = 5 \cdot 150 = 750,00 \text{ мм},$$

$$d_A = m_{II} z_A = 8 \cdot 15 = 120,00 \text{ мм},$$

$$d_B = m_{II} z_B = 8 \cdot 35 = 280,00 \text{ мм}.$$

Масштаб схеми виберемо довільно, наприклад, М 1:5, тобто  $\mu_l = 0,005 \text{ м/мм}$ . Колова швидкість точки контакту коліс 1 і 2:

$$V_{1,2} = \frac{\pi n_{\text{об.}}}{30} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{\pi \cdot 1460}{30} \cdot \frac{90,0 \cdot 10^{-3}}{2} = 6,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для побудови картини лінійних швидкостей механізму проведемо

лінію  $\alpha - \alpha$ , перпендикулярно до осей зубчастих коліс та перенесемо до неї точки  $O_1, O_2, C, P, N, F$ . Вибрав масштаб швидкості

$\mu_V = 0,1 \frac{м/с}{мм}$ , відкладемо відрізок  $Cc$ , що відповідає швидкості  $V_{1,2}$ .

Точку  $C$  з'єднаємо з точками  $O_1$  і  $P$ . Прямі 1 і 2 – плани лінійних швидкостей точок коліс  $z_1$  та  $z_2$  (або “ $V$ -лінії” коліс  $z_1$  та  $z_2$ ). Оскільки т.  $O_2$  водночас належить і колесу  $z_2$  і водилу  $H$ , швидкість цієї точки визначається відрізком  $O_2o_2$ . З'єднав т.  $O_2$  з т.  $O_1$ , отримаємо “ $V$ -лінію” для водила  $H$  і колеса  $z_A$ . Через т.  $F$  до перетину з прямою  $O_1o_2$  проведемо відрізок  $Ff$ , котрий, згідно з вибраним масштабом  $\mu_V$ , дорівнює коловій швидкості точки контакту коліс  $z_A$  та  $z_B$ . Далі, визначається “ $V$ -лінія” колеса  $z_B$ , що проходить через точки  $f$  і  $N$ .

Отримана у такий спосіб, картина лінійних швидкостей зображена на рисунку 4.1,б. Діаграма кутових швидкостей (рисунок 4.1,в) будується наступним чином. Вибрав полюсну відстань  $OS = 15мм$  (рекомендується  $OS = 15...40мм$ ), з точки  $O$  проводимо прямі, паралельні відріzkам  $O_1c, O_1o_2, Pc, fN$ . В результаті на горизонталі дістанемо точки 1, 2, Н (А), В. Виміряв відстань у мм від т.  $S$  до кожної із зазначених точок, знайдемо кутові швидкості ланок:

$$\omega_1 = S1 \cdot \mu_\omega = 115 \cdot 1,33 = 153 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_2 = S2 \cdot \mu_\omega = 14 \cdot 1,33 = 18,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_H \left( \overset{\curvearrowright}{\ominus} \underset{\curvearrowleft}{\ominus} \right) = SH \cdot \mu_\omega = 12 \cdot 1,33 = 16,0 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_B = SB \cdot \mu_\omega = 5 \cdot 1,33 = 6,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

де  $\mu_\omega$  – масштаб кутової швидкості:

$$\mu_\omega = \frac{\mu_V}{\mu_l \cdot OS} = \frac{0,1}{0,005 \cdot 15} = 1,33 \frac{\text{рад/с}}{\text{мм}}.$$

Щодо дворядкових передач (рисунок 4.2, 4.3, 4.4), то розрахунок чисел зубців коліс тут здійснюється переважно шляхом розкладання величини завданого передаточного відношення на співмножники, пропорційні відповідним числам зубців. Такий підхід пояснюється у наведених нижче прикладах.

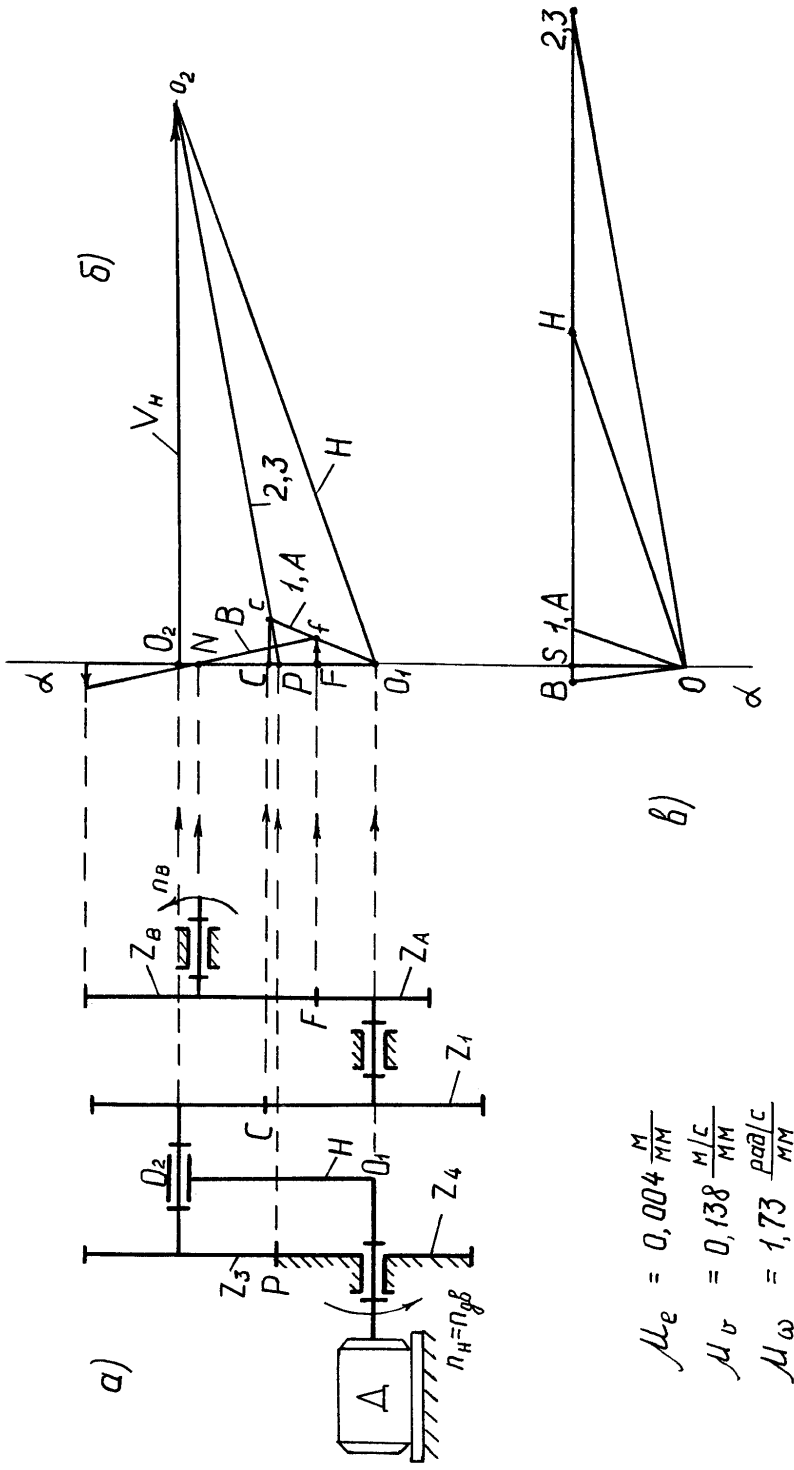


Рисунок 4.2 – Схема планетарного механізму (до прикладу 4.2): а – кінематична схема; б – план лінійних швидкостей; в – діаграма кутових швидкостей

## Приклад 4.2

Визначити числа зубців коліс планетарного редуктора (рисунок 4.2,а), виходячи з даних:

– частота обертання ротора двигуна:

$$n_{\text{об}} = n_H = 960 \text{ об/хв};$$

– частота обертання колеса  $z_B$ :  $n_B = 44 \text{ об/хв}$ ;

– модуль зубчастих коліс редуктора:  $m_I = 4 \text{ мм}$ ;

– модуль коліс  $z_A, z_B$ :  $m_{II} = 6 \text{ мм}$ ;

– числа зубців коліс:  $z_A = 12, z_B = 29$ .

Побудувати картину лінійних та діаграму кутових швидкостей.

Загальне передаточне відношення привода:

$$i = \frac{n_{\text{об.}}}{n_B} = \frac{960}{44} = \frac{240}{11}.$$

Потрібне передаточне відношення редуктора:

$$i_{H1T}^{\odot} = \frac{i}{i_{AB}} = \frac{i_{\text{об}}}{z_B/z_A} = \frac{240}{11} \cdot \frac{12}{29} = 9,03. \quad (4.6)$$

З іншого боку, за формулою Вілліса:

$$i_{H1}^{\odot} = \frac{1}{i_{1H}^{\odot}} = \frac{1}{1 - i_{14}^{\odot}} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}}. \quad (4.7)$$

Порівнюючи (4,6) до (4.7), знайдемо:

$$\frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} = \frac{240}{11} \cdot \frac{12}{29},$$

звідки



$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 1 - \frac{11}{240} \cdot \frac{29}{12} = \frac{2561}{2880} \approx \frac{2560}{2880} = \frac{8}{9}.$$

Фактичне передаточне відношення:

$$i_{H1} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 9,00.$$

Визначаємо похибку:

$$\frac{|9,03 - 9,00|}{9,03} \cdot 100\% = 0,33\% < 5\%.$$

Введемо до розгляду співмножники, що пропорційні числам зубців відповідних коліс.

$$z_1 \sim \gamma C_1, z_2 \sim \gamma C_2, z_3 \sim \gamma C_3, z_4 \sim \gamma C_4,$$

де  $\gamma$  - коефіцієнт (ціле число,  $\gamma \neq 0$ ).

Тоді відношення чисел зубців можна подати у вигляд декількох варіантів:

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{C_2 C_4}{C_1 C_3} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1} = \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{9} = \dots$$

З наведених варіантів слід взяти той, для якого:

$$\frac{C_2}{C_1} \approx 1, \frac{C_4}{C_3} \approx 1.$$

При виконанні таких умов передача буде найбільш компактною.

Для даного прикладу можна прийняти:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{8}{9}, \frac{C_4}{C_3} = \frac{1}{1}, \text{ або } C_1 = 9, C_2 = 8, C_3 = 1, C_4 = 1.$$

З урахуванням залежностей (15.18), наведених у [1], визначимо:

$$\begin{aligned}
z_1 &= C_1 \mathbf{C}_4 + C_3 \overline{\gamma} = 9 \mathbf{C} + 1 \overline{\gamma} = 18\gamma, \\
z_2 &= C_2 \mathbf{C}_4 + C_3 \overline{\gamma} = 8 \mathbf{C} + 1 \overline{\gamma} = 16\gamma, \\
z_3 &= C_3 \mathbf{C}_1 + C_2 \overline{\gamma} = 1 \mathbf{C} + 8 \overline{\gamma} = 17\gamma, \\
z_4 &= C_4 \mathbf{C}_1 + C_2 \overline{\gamma} = 1 \mathbf{C} + 8 \overline{\gamma} = 17\gamma.
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

Найменше допустиме значення коефіцієнту  $\gamma$  у співвідношеннях (4.8):  $\gamma = 2$  (якщо  $\gamma = 1$ , то  $z_2 = 16$ , що заперечує вимозі  $z_2 \geq 17$ ).

При  $\gamma = 2$ , маємо:

$$z_1 = 36, z_2 = 32, z_3 = 34, z_4 = 34.$$

Перевіримо виконання умови складання (4.3), попередньо визначив:

$$i_{1H}^{\mathbf{C}} = \frac{1}{i_{H1}^{\mathbf{C}}} = \frac{1}{9}.$$

Число сателітів приймемо  $k = 3$ , тоді:

$$\frac{36 \cdot \frac{1}{9} \mathbf{C} + 3\overline{\gamma}}{3} = \frac{4}{3} \mathbf{C} + 3\overline{\gamma} \neq \mathbf{C}.$$

Очевидно, що даний вираз не може набувати цілих значень при будь-яких  $\Pi = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отже, умова складання при  $k = 3$  не виконується.

Візьмемо інше число сателітів  $k = 4$ :

$$\frac{36 \cdot \frac{1}{9} \mathbf{C} + 4\overline{\gamma}}{4} = 1 \mathbf{C} + 4\overline{\gamma} = \mathbf{C},$$

тут умова складання виконується.

Перевіримо виконання умови сусідства (4.2).

Для коліс  $z_1$  і  $z_2$ :

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}, \text{ де } \sin \frac{\pi}{4} = 0,707;$$

$\frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2} = \frac{32 + 2}{36 + 32} = 0,500$ ; тоді  $0,707 > 0,500$  - умова сусідства виконується.

Для коліс  $z_3$  і  $z_4$

$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_3 + 2}{z_3 + z_4}$ ,  $0,707 > 0,529$  - умова сусідства також виконується.

Якщо умова сусідства не виконується, число сателітів слід зменшити.

Зобразимо кінематичну схему передачі (рисунок 4.2,а), попередньо визначив діаметри ділільних кіл коліс:

$$d_1 = m_I z_1 = 4 \cdot 36 = 144,00 \text{ мм},$$

$$d_2 = m_I z_2 = 4 \cdot 32 = 128,00 \text{ мм},$$

$$d_3 = m_I z_3 = 4 \cdot 34 = 136,00 \text{ мм},$$

$$d_4 = m_I z_4 = 4 \cdot 34 = 136,00 \text{ мм},$$

$$d_A = m_{II} z_A = 6 \cdot 12 = 72,00 \text{ мм},$$

$$d_B = m_{II} z_B = 6 \cdot 29 = 174,00 \text{ мм}.$$

Масштаб схеми механізму виберемо довільно, наприклад, М1:4, тоб-

$$\text{то } \mu_l = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Швидкість точок осі блоку коліс  $z_2$  і  $z_3$ :

$$V_H = \frac{\pi n_{\text{дв.}}}{30} \cdot \left( \frac{d_3 + d_4}{2} \right) = \frac{\pi \cdot 960}{30} \cdot \left( \frac{136 + 136}{2} \right) \cdot 10^{-3} = 13,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для побудови картини лінійних швидкостей механізму проведемо лінію  $\alpha - \alpha$ , перпендикулярно до осей зубчастих коліс та перенесемо до неї точки  $O_1, O_2, C, P, N, F$ . Вибрав масштаб швидкості

$\mu_V = 0,138 \frac{м/с}{мм}$ , відкладемо відрізок  $O_2o_2$ , що відповідає швидкості  $V_H$ . Точку  $O_2$  з'єднаємо з т.  $O_1$ . Знайдена пряма  $O_1o_2$  – план лінійних швидкостей точок водила Н ( або “ $V$  - лінія” водила Н). З'єднав т.  $O_2$  з т.  $P$  одержимо “ $V$  - лінію” для блоку коліс  $z_2, z_3$ . Через т.  $C$  до перетину з прямою  $O_1c$  проведемо відрізок  $Cc$ , котрий згідно з вибраним масштабом  $\mu_V$ , дорівнює коловій швидкості точки контакту коліс  $z_1$  та  $z_2$ . Тоді пряма  $O_1c$  є “ $V$  - лінія” коліс  $z_1$  та  $z_2$ . Колова швидкість точки контакту коліс  $z_A$  та  $z_B$  визначається відрізком  $Ff$ . З'єднав точки  $f$  і  $N$ , одержимо “ $V$  - лінію” колеса  $z_B$ .

Отримана у такий спосіб, картина лінійних швидкостей зображена на рисунку 4.2,б.

Діаграма кутових швидкостей (рисунок 4.2,в) будується наступним чином. Вибрав полюсну відстань  $OS = 20мм$  (рекомендується  $OS = 15...40мм$ ), з точки  $O$  проводимо прямі, паралельні відріzkам  $O_1c, O_1o_2, Po_2, fN$ . В результаті на горизонталі дістанемо точки 1(А), 2(З), Н, В. Виміряв відстань у мм від т.  $S$  до кожної із зазначених точок, знайдемо кутові швидкості ланок:

$$\omega_1 \varphi_A \curvearrowright = S1 \cdot \mu_\omega = 6,4 \cdot 1,73 = 11,2 \frac{рад}{с};$$

$$\omega_2 \varphi_3 \curvearrowright = S2 \cdot \mu_\omega = 115 \cdot 1,73 = 199,0 \frac{рад}{с};$$

$$\omega_H = SH \cdot \mu_\omega = 58 \cdot 1,73 = 100,5 \frac{рад}{с};$$

$$\omega_B = SB \cdot \mu_\omega = 3,0 \cdot 1,73 = 5,19 \frac{рад}{с},$$

де  $\mu_\omega$  – масштаб кутової швидкості:

$$\mu_\omega = \frac{\mu_V}{\mu_l \cdot OS} = \frac{0,138}{0,004 \cdot 20} = 1,73 \frac{\text{рад/с}}{\text{мм}} .$$

### Приклад 4.3

Визначити числа зубців коліс планетарного редуктора (рисунок 4.3,а), виходячи з даних:

– частота обертання ротора двигуна:

$$n_{\text{об}} = n_1 = 1350 \text{ об/хв} ;$$

– частота обертання колеса  $z_B$ :  $n_B = 64 \text{ об/хв}$  ;

– модуль зубчастих коліс редуктора:  $m_I = 5 \text{ мм}$  ;

– модуль коліс  $z_A, z_B$ :  $m_{II} = 6 \text{ мм}$  ;

– числа зубців коліс:  $z_A = 18, z_B = 37$  .

Побудувати картину лінійних та діаграму кутових швидкостей.

$$i = \frac{n_{\text{об.}}}{n_B} = \frac{1350}{64} = \frac{675}{32} .$$

Потрібне передаточне відношення редуктора:

$$i_{1H}^{\text{C}} = \frac{i}{i_{AB}} = \frac{i}{z_B/z_A} = \frac{675}{32} \cdot \frac{18}{37} = \frac{675 \cdot 9}{16 \cdot 37} = 10,26 . \quad (4.9)$$

З іншого боку, за формулою Вілліса:

$$i_{1H}^{\text{C}} = 1 - i_{14}^{\text{C}} = 1 - \left( - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \right) = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} . \quad (4.10)$$

Порівнюючи (4,9) до (4.10), знайдемо:

$$1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{675}{16} \cdot \frac{9}{37} ,$$

звідки

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{5483}{592} .$$

Введемо до розгляду співмножники, що пропорційні числам зубців

відповідних коліс.

$$z_1 \sim \gamma C_1, z_2 \sim \gamma C_2, z_3 \sim \gamma C_3, z_4 \sim \gamma C_4,$$

де  $\gamma$  - коефіцієнт (деяке ціле число,  $\gamma \neq 0$ ).

Тоді відношення чисел зубців можна подати у вигляді:

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{C_2 C_4}{C_1 C_3} = \frac{5483}{592}.$$

Виходячи з вимоги компактності передачі для заданої схеми при

$$\sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} > 2 \text{ доцільно приймати } \frac{C_2}{C_1} = \frac{C_4}{C_3} = \sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}}.$$

Якщо  $\sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} \leq 2$ , то спочатку слід вибрати  $\frac{C_4}{C_3} > 2$ , після чого визначити:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \cdot \frac{C_4}{C_3}.$$

В даному прикладі:

$$\sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} = \sqrt{\frac{5483}{592}} = 3,04 > 2.$$

Отже, можна прийняти:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_4}{C_3} = 3,04 \approx 3,00.$$

Тоді:

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{C_2 C_4}{C_1 C_3} = 3,00 \cdot 3,00 = 9,00.$$

Фактичне передаточне відношення:

$$i_{1H} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 1 + 9,00 = 10,00.$$

Визначимо похибку:

$$\frac{10,26 - 10,00}{10,00} 100\% = 2,6\% < 5\%.$$

Відповідно до прийнятих відношень  $\frac{C_2}{C_1}$  та  $\frac{C_4}{C_3}$  виберемо множини:

ки:

$$C_1 = 1, C_2 = 3, C_3 = 1, C_4 = 3.$$

З урахуванням залежностей (15.20), наведених у (1), знаходимо:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 C_4 - C_3 \gamma = 1 \cdot 3 - 1 \cdot \gamma = 2\gamma, \\ z_2 &= C_2 C_4 - C_3 \gamma = 3 \cdot 3 - 1 \cdot \gamma = 6\gamma, \\ z_3 &= C_3 C_1 + C_2 \gamma = 1 \cdot 1 + 3 \gamma = 4\gamma, \\ z_4 &= C_4 C_1 + C_2 \gamma = 3 \cdot 1 + 3 \gamma = 12\gamma. \end{aligned}$$

Найменше допустиме значення коефіцієнту  $\gamma$  у співвідношеннях (4.11):  $\gamma = 9$  (виходячі з вимог  $z_{1,2} \geq 17$ ,  $z_3 \geq 20$ ,  $z_4 \geq 85$ ).

При  $\gamma = 9$ , маємо:

$$z_1 = 18, z_2 = 54, z_3 = 36, z_4 = 108.$$

Перевіримо виконання умови складання (4.3) з числом сателітів  $k = 3$ :

$$\frac{18 \cdot 10 \cdot (1 + 3\pi)}{3} = \pi.$$

Очевидно, що ліва частина цього виразу завжди є цілим числом при будь-яких  $\pi = 0, 1, 2, 3, \dots$ , що свідчить про виконання умови складання для вибраного числа сателітів.

Перевіримо виконання умови сусідства (4.2).

Для коліс  $z_1$  і  $z_2$ :

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}, \text{ де } \sin \frac{\pi}{k} = \sin \frac{\pi}{3} = 0,866;$$

$\frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2} = \frac{54 + 2}{18 + 54} = 0,778$ , тоді  $0,866 > 0,778$  – умова сусідства вико-

нується.

Для коліс  $z_3$  і  $z_4$  :

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_3 + 2}{z_4 - z_3}, \quad \sin \frac{\pi}{k} = 0,866;$$

$$\frac{z_3 + 2}{z_4 - z_3} = \frac{36 + 2}{108 - 36} = 0,528, \quad \text{тоді } 0,866 > 0,528 \text{ - умова сусідства також}$$

виконується.

Якщо умова сусідства не виконується, число сателітів слід зменшити.

Зобразимо кінематичну схему передачі (рисунок 4.3,а), для чого попередньо визначимо діаметри ділільних кіл коліс:

$$d_1 = m_I z_1 = 5 \cdot 18 = 90,00 \text{ мм},$$

$$d_2 = m_I z_2 = 5 \cdot 54 = 270,00 \text{ мм},$$

$$d_3 = m_I z_3 = 5 \cdot 36 = 180,00 \text{ мм},$$

$$d_4 = m_I z_4 = 5 \cdot 108 = 540,00 \text{ мм},$$

$$d_A = m_{II} z_A = 6 \cdot 18 = 108,00 \text{ мм},$$

$$d_B = m_{II} z_B = 6 \cdot 37 = 222,00 \text{ мм}.$$

Масштаб схеми виберемо довільно, наприклад,  $M 1:5$ , або

$\mu_l = 0,005 \text{ м/мм}$ . Колова швидкість точки контакту коліс 1 і 2:

$$V_{1,2} = \frac{\pi n_{\text{дв.}}}{30} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{\pi \cdot 1350}{30} \cdot \frac{90}{2} \cdot 10^{-3} = 6,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для побудови картини лінійних швидкостей механізму проведемо лінію  $\alpha - \alpha$ , перпендикулярно до осей зубчастих коліс та перенесемо до неї точки  $O_1, O_2, O_3, C, P, F$ . Вибрав масштаб швидкості



$\mu_V = 0,1 \frac{м/с}{мм}$ , відкладемо відрізок  $Cc$ , що відповідає швидкості  $V_{1,2}$ .

Точку  $C$  з'єднаємо з точками  $O_1$  і  $P$ . Знайдені прямі  $O_1c$  і  $cP$  – плани лінійних швидкостей колеса  $z_1$  та блоку коліс 2,3 (або “V - лінії” колеса 1 та блоку 2,3). Визначивши на лінії  $cP$  т.  $O_2$  та з'єднав її з т.  $O_1$ , отримаємо “V - лінію” для водила Н і колеса  $z_A$ . Через т.  $F$  до перетину з прямою  $O_1O_2$  проведемо відрізок  $Ff$ , котрий, згідно з вибраним масштабом  $\mu_V$ , дорівнює коловій швидкості точки контакту коліс  $z_A$  та  $z_B$ . Далі визначається “V - лінія” колеса  $z_B$ , що проходить через точки  $f$  і  $O_3$ .

Для побудови діаграми кутових швидкостей (рисунок 4.3,в) візьмемо полюсну відстань  $OS = 15мм$  (рекомендується  $OS = 15...40мм$ ). З точки  $O$  проводимо прямі, паралельні відріzkам  $O_1c, O_1O_2, Pc, fO_3$ . В результаті на горизонталі дістанемо точки 1, 2(3), Н(А), В. Виміряв відстань у мм від т.  $S$  до кожної з зазначених точок, знайдемо кутові швидкості ланок:

$$\omega_1 = S1 \cdot \mu_\omega = 106 \cdot 1,33 = 141 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{2,3} = S2 \cdot \mu_\omega = 21 \cdot 1,33 = 27,9 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{H,A} = SH \cdot \mu_\omega = 10 \cdot 1,33 = 13,3 \text{ рад/с};$$

$$\omega_B = SB \cdot \mu_\omega = 5 \cdot 1,33 = 6,7 \text{ рад/с},$$

Де  $\mu_\omega$  – масштаб кутової швидкості:

$$\mu_\omega = \frac{\mu_V}{\mu_1 \cdot OS} = \frac{0,1}{0,005 \cdot 15} = 1,33 \frac{\text{рад/с}}{\text{мм}}.$$

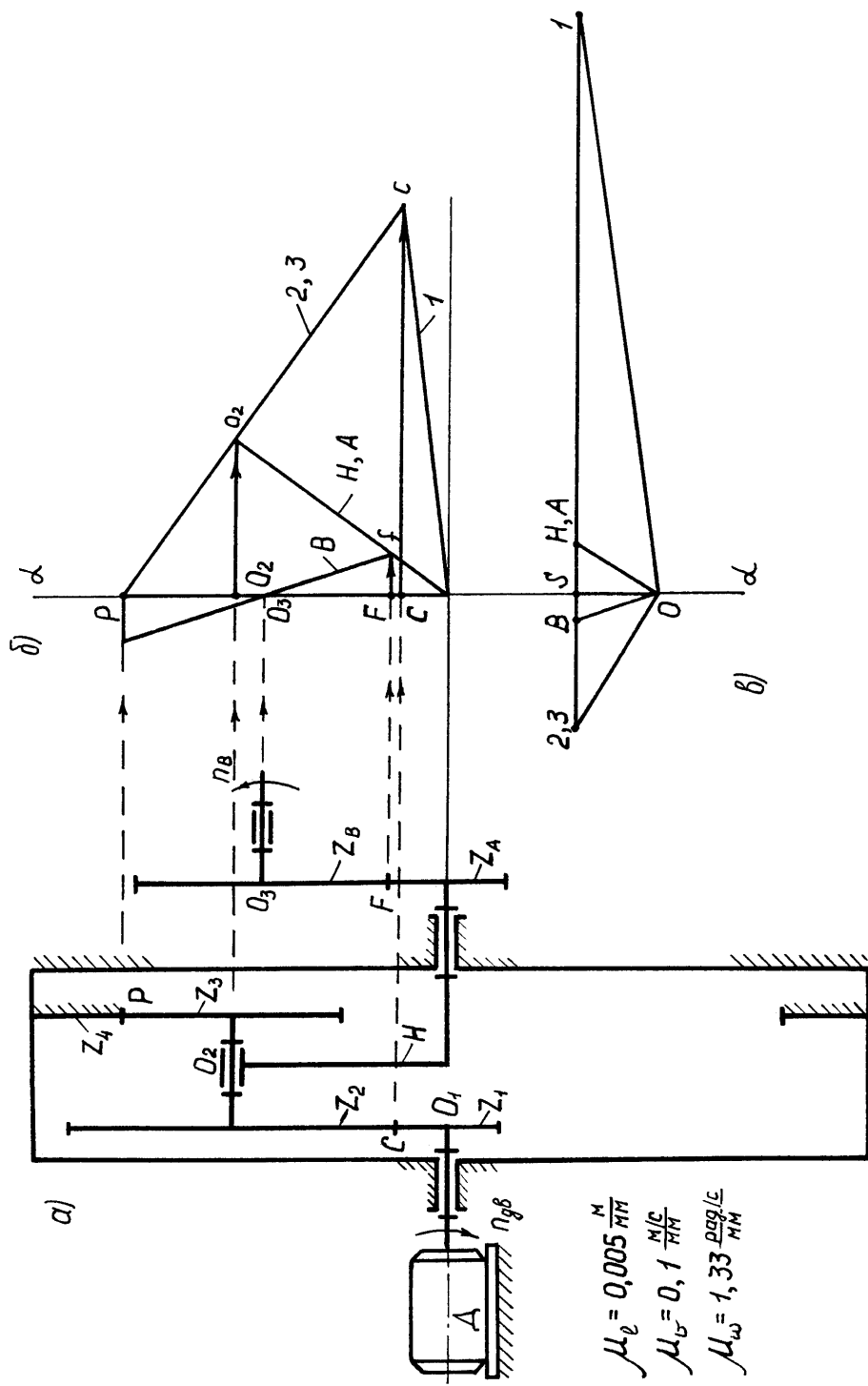


Рисунок 4.3 – Схема планетарного механізму (до прикладу 4.3): а – кінемагічна схема; б – план лінійних швідкостей; в – діаграма кутових швідкостей

#### Приклад 4.4

Визначити числа зубців коліс планетарного редуктора (рисунок 4.4,а), виходячи з даних:

– частота обертання ротора двигуна:

$$n_{\text{об}} = n_H = 1480 \text{ об/хв};$$

– частота обертання колеса  $z_B$ :  $n_B = 85 \text{ об/хв}$ ;

– модуль зубчастих коліс редуктора:  $m_I = 4 \text{ мм}$ ;

– модуль коліс  $z_A, z_B$ :  $m_{II} = 5 \text{ мм}$ ;

– числа зубців коліс:  $z_A = 15, z_B = 35$ .

Побудувати картину лінійних та діаграму кутових швидкостей.

Загальне передаточне відношення приводу:

$$i = \frac{n_{\text{об.}}}{n_B} = \frac{1480}{85} = \frac{296}{17}.$$

Потрібне передаточне відношення редуктора:

$$i_{H1T}^{\odot} = \frac{i}{i_{AB}} = \frac{i}{z_B/z_A} = \frac{296}{17} \cdot \frac{15}{35} = \frac{296 \cdot 3}{17 \cdot 7} = 7,46. \quad (4.12)$$

З іншого боку, за формулою Вілліса:

$$i_{H1}^{\odot} = \frac{1}{1 - i_{1H}^{\odot}} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}}. \quad (4.13)$$

Порівнюючи (4,12) до (4.13), знайдемо:

$$\frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} = \frac{296 \cdot 3}{17 \cdot 7},$$

звідки

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 1 - \frac{17 \cdot 7}{296 \cdot 3} = \frac{769}{888}.$$

Введемо до розгляду співмножники, що пропорційні числам зубців відповідних коліс:

$$z_1 \sim \gamma C_1, z_2 \sim \gamma C_2, z_3 \sim \gamma C_3, z_4 \sim \gamma C_4,$$

де  $\gamma$  - коефіцієнт (деяке ціле число,  $\gamma \neq 0$ ).

Тоді відношення чисел зубців можна подати у вигляді:

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{C_2 C_4}{C_1 C_3} = \frac{769}{888} \approx \frac{780}{900}.$$

Згідно умов компоновки зубчастих коліс в редукторі доцільним є виконання умов:

$$\frac{C_2}{C_1} < \frac{1}{2}; \frac{C_4}{C_3} > 2.$$

В даному випадку:

$$\frac{C_2}{C_1} \frac{C_4}{C_3} \approx \frac{780}{900} = \frac{13}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{5}, \text{ що відповідає умовам } 1/3 < 1/2; 13/5 > 2,$$

Отже, можна прийняти:  $C_1 = 3, C_2 = 1, C_3 = 5, C_4 = 13$ .

Фактичне передаточне відношення редуктора:

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_4}{C_3}} = \frac{1}{1 - \frac{13}{15}} = \frac{15}{2} = 7,50.$$

Визначимо похибку:

$$\frac{7,50 - 7,46}{7,46} 100\% = 0,54\% < 5\%.$$

З урахуванням залежностей (15.19), наведених у [1], визначимо:

$$\begin{aligned}z_1 &= C_1 C_4 - C_3 \gamma = 3(3 - 5\gamma) = 24\gamma, \\z_2 &= C_2 C_4 - C_3 \gamma = 1(3 - 5\gamma) = 8\gamma, \\z_3 &= C_3 C_1 - C_2 \gamma = 5(6 - 1\gamma) = 10\gamma, \\z_4 &= C_4 C_1 - C_2 \gamma = 13(6 - 1\gamma) = 26\gamma.\end{aligned}$$

Найменше допустиме значення коефіцієнту  $\gamma$  :  $\gamma = 4$  (виходячі з вимог  $z_{1,4} \geq 85$  ,  $z_{2,3} \geq 20$  ).

При  $\gamma = 4$  :

$$z_1 = 96, z_2 = 32, z_3 = 40, z_4 = 104 .$$

Перевіримо виконання умови складання (4.3), з числом сателітів  $k = 3$  , попередньо визначив:

$$\begin{aligned}i_{1H} &= \frac{1}{i_{H1}} = \frac{1}{15/2} = \frac{2}{15}, \\ \frac{96 \cdot \frac{2}{15} (+ 3\Pi)}{3} &\neq \Pi.\end{aligned}$$

Очевидно, що ліва частина даного виразу не може набувати цілих значень при будь-яких  $\Pi = 0,1,2,3\dots$  . Отже, умова складання при  $k = 3$  не виконується.

Візьмемо інше число сателітів  $k = 4$  , тоді:

$$\frac{96 \cdot \frac{2}{15} (+ 4\Pi)}{4} = \Pi.$$

Наприклад, при  $\Pi = 1$  маємо  $\frac{96 \cdot \frac{2}{15} (+ 4 \cdot 1)}{4} = 16$  , тобто умова складання виконується.

Перевіримо виконання умови сусідства (4.2). Виконання цієї умови

слід перевіряти щодо тієї пари коліс, до якої належить сателіт з більшим числом зубців, а саме для коліс  $z_3$  і  $z_4$ , оскільки  $z_3 > z_2$ :

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_3 + 2}{z_4 - z_3}, \text{ де } \sin \frac{\pi}{k} = \sin \frac{\pi}{4} = 0,707,$$

$$\frac{z_3 + 2}{z_4 - z_3} = \frac{40 + 2}{104 - 40} = 0,656; \quad 0,707 > 0,656 \quad - \text{ умова сусідства}$$

виконується.

Якщо умова сусідства не виконується, число сателітів слід зменшити.

Зобразимо кінематичну схему передачі (рисунок 4.3,а), попередньо визначив діаметри ділільних кіл коліс:

$$d_1 = m_I z_1 = 4 \cdot 96 = 384,00 \text{ мм},$$

$$d_2 = m_I z_2 = 4 \cdot 32 = 128,00 \text{ мм},$$

$$d_3 = m_I z_3 = 4 \cdot 40 = 160,00 \text{ мм},$$

$$d_4 = m_I z_4 = 4 \cdot 104 = 416,00 \text{ мм},$$

$$d_A = m_{II} z_A = 5 \cdot 15 = 75,00 \text{ мм},$$

$$d_B = m_{II} z_B = 5 \cdot 35 = 175,00 \text{ мм}.$$

Масштаб схеми виберемо довільно, наприклад, М1:4, або

$$\mu_l = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Швидкість точок осі блоку коліс 2 і 3:

$$V_H = \frac{\pi n_{\text{дв.}}}{30} \cdot \left( \frac{d_4 - d_3}{2} \right) = \frac{\pi \cdot 1480}{30} \cdot \left( \frac{416 - 160}{2} \right) \cdot 10^{-3} = 19,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для побудови картини лінійних швидкостей механізму проведемо лінію  $\alpha - \alpha$ , перпендикулярно до осей зубчастих коліс та перенесемо до неї точки  $O_1, O_2, O_3, C, P, F$ . Вибрав масштаб швидкості

$\mu_V = 0,3 \frac{м/с}{мм}$ , відкладемо відрізок  $O_2o_2$ , що зображує швидкість  $V_H$ .

Точку  $O_2$  з'єднаємо з т.  $P$ . Знайдені прямі  $O_1o_2$  та  $o_2P$  – плани лінійних швидкостей точок  $H$  та блоку коліс  $z_2, z_3$  (або “ $v$ -лінії” водила  $H$  та блоку коліс  $z_2, z_3$ ). Колова швидкість точки контакту коліс  $z_1$  та  $z_2$  визначається відрізком  $Cc$ . З'єднав т.  $c$  з т.  $O_1$ , отримаємо “ $v$ -лінію” для коліс  $z_1$  та  $z_A$ . Через т.  $F$  до перетину з прямою  $O_1c$  проведемо відрізок  $Ff$ , котрий згідно з вибраним масштабом  $\mu_V$ , дорівнює коловій швидкості точки контакту коліс  $z_A$  та  $z_B$ .

“ $v$ -лінія” колеса  $z_B$  походить крізь т.  $f$  та  $O_3$ .

Отримана у такий спосіб картина лінійних швидкостей зображена на рисунку 4.4, б.

Для побудови діаграми кутових швидкостей (рисунок 4.3, в) візьмемо полюсну відстань  $OS = 15мм$  (рекомендується  $OS = 15...40мм$ ). З точки  $O$  проводимо прямі, паралельні відрізкам  $O_1c, O_1o_2, Po_2, fO_3$ . В результаті на горизонталі дістанемо точки 1(А), 2(З), Н, В. Виміряв відстань у мм від т.  $S$  до кожної з указаних точок, знайдемо кутові швидкості ланок:

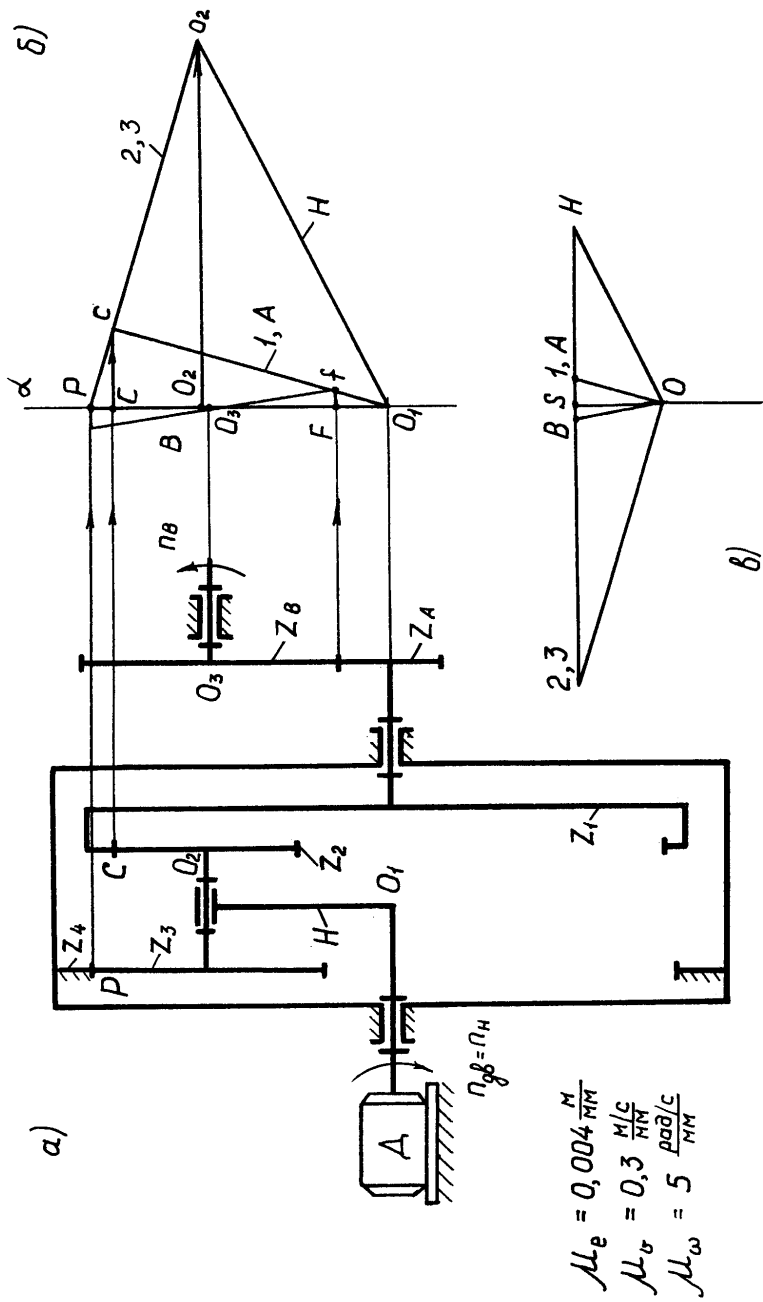


Рисунок 4.4 – Схема планетарного механiзму (до прикладу 4.4): а – кiнематична схема; б – план лiнiйних швидкостей; в – дiаграма кутових швидкостей



$$\omega_{1,A} = S1 \cdot \mu_\omega = 4 \cdot 5 = 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_{2,3} = S2 \cdot \mu_\omega = 48 \cdot 5 = 240 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_H = SH \cdot \mu_\omega = 31 \cdot 5 = 155 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_B = SB \cdot \mu_\omega = 2 \cdot 5 = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

Де  $\mu_\omega$  – масштаб кутової швидкості:

$$\mu_\omega = \frac{\mu_v}{\mu_l \cdot OS} = \frac{0,3}{0,004 \cdot 15} = 5 \frac{\text{рад/с}}{\text{мм}}.$$

## 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. В чому полягає характерна особливість планетарних передач у порівнянні із звичайними зубчастими передачами ?
2. Назвіть основні ланки планетарної зубчастої передачі.
3. Які зубчасті передачі називаються диференціальними ?
4. Як визначається ступінь рухливості планетарних та диференціальних зубчастих механізмів ?
5. Як визначаються передаточні відношення в планетарних та диференціальних зубчастих передачах ?
6. В чому полягає сутність метода інверсії ?
7. Що таке самогальмування в планетарній зубчастій передачі ?
8. Як конструктивні особливості планетарних передач впливають на величину коефіцієнта корисної дії ?
9. Які обмеження накладено на числа зубців коліс планетарних передач ?
10. Що означають умови співвісності, складання та сусідства в планетарних передачах ?

## 6 РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вишенський І.І. Теорія механізмів і машин. Механічні передачі / І.І. Вишенський. – Київ: Навчально-методичний кабінет вищої освіти Мінвузу України, 1992. – 356 с.
2. Кореняко О.С. Теорія механізмів і машин / О.С. Кореняко – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1987. – 206 с.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
4. Теория механизмов и машин / Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др.; под ред. К.В.Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.
5. Теория механизмов / Гавриленко В.А., Минут С.Б., Мусатов А.К. и др.; под ред. В.А. Гавриленко. – М.: Высш. шк., 1973. – 511 с.
6. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин / С.А. Попов – М.: Высшая школа, 1986. – 295 с.