

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ**  
**УНІВЕРСИТЕТ**

**КАФЕДРА ТУРИЗМУ**

**ПРАКТИКУМ**

**з дисципліни**

**Планування та прогнозування туристичної**  
**діяльності**

Чернігів-ЧНТУ, 2017

Практикум з дисципліни Планування та прогнозування туристичної діяльності, для магістрів спеціальності 242 «Туризм» / укладач І. В. Безуглий. – Чернігів: ЧНТУ, 2017. 21 с.

Рецензент:

Алешугіна Н. О., к.е.н., доц., доцент кафедри туризму ЧНТУ

## Зміст

Практична робота № 1 Прогнозування та планування в системі державного управління економічним розвитком

Практичне заняття 2. Історичний аспект розвитку прогнозування та планування

Практична робота № 3 Методологія та організація прогнозування і планування

Практична робота № 4 Технологічна матриця і задача оптимального планування

Практична робота № 5 Лінійне програмування в туризмі

Практична робота № 6 Визначення показників при криволінійній залежності

## Практична робота № 1

### Прогнозування та планування в системі державного управління економічним розвитком

#### Задача 1.

На основі даних, які наведені у таблиці 1, провести аналіз динаміки валового внутрішнього продукту (ВВП) у спів ставних цінах за 19 років, для чого:

- 1.) Побудувати графік, який відображує ВВП за період 1998-2016 рр.;
- 2.) Розрахувати середній об'єм ВВП за 1998-2016 рр.;
- 3.) Визначити абсолютні прирости, темпи зростання та приросту ВВП з постійною та змінною базою.

Таблиця 1

**Об'єми ВВП за 1998-2016 роки, млн. грн.**

Рік	Варіанти											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1998	7644	1748	2227	1782	1352	859	2020	3356	3531	2291	1925	1441
1999	15311	1691	2276	1821	1382	878	2065	3430	3609	2341	1967	1545
2000	18663	1763	2374	1899	1441	916	2163	3578	3764	2442	2052	1516
2001	20138	1891	2545	2036	1545	982	2153	3836	4036	2618	2200	1620
2002	26599	1854	2496	1997	1516	963	2309	3762	3958	2567	2157	1709
2003	34794	1982	2667	2134	1620	1029	2264	4020	4230	2744	2305	1842
2004	41458	2091	2814	2251	1709	1086	2420	4242	4463	2895	2432	2180
2005	48160	2254	3035	2428	1842	1170	2553	4573	4812	3121	2623	2375
2006	59380	1748	2227	1782	1352	859	2753	3356	3531	2291	2925	2490
2007	70331	1680	2196	1775	1645	810	2810	3297	3420	2180	2870	2410
2008	91925	1630	2145	1734	1690	795	2867	3330	3378	2375	2765	2535
2009	115863	1723	1998	1690	1735	767	2790	3298	3490	2490	2713	2676
2010	156431	1759	1914	1635	1787	710	2740	3270	3575	2410	2658	2765
2011	152681	1825	1886	1625	1820	680	2497	3180	3680	2535	2510	2186
2012	163480	1847	1820	1610	1898	615	2435	3096	3845	2676	2238	2090
2013	170230	1905	1815	1587	1945	605	2250	3285	3890	2765	2170	2020
2014	169140	1987	1785	1568	1989	637	2186	3368	3968	2830	2056	2065
2015	163245	2060	1748	1535	2015	690	2090	3410	4010	2865	2012	2134
2016	159870	2126	1730	1514	2005	746	2020	3475	4176	2910	1925	2268

Таблиця 2

**Динаміка внутрішнього продукту ВВП у співставних цінах**

Роки	Ланцюговий абсолютний приріст $\Delta Y_i^u$	Абсолютний приріст з постійною базою в $i$ -ом періоді $\Delta Y_i^b$	Ланцюговий темп зростання показника в $i$ -ом періоді $\Delta Y_i^z$	Базисний темп приросту в $i$ -м періоді $\Delta Y_i^o$	Середньорічний абсолютний приріст $\Delta Y_{сер}$	Середньорічний темп зростання $T_{сер}$
1998						
1999						
2000						
2001						
2002						
2003						
2004						

2005									
2006									
2007									
2008									
2009									
2010									
2011									
2012									
2013									
2014									
2015									
2016									

### Задача 2.

Об'єм пропозиції рекреаційних послуг у регіоні характеризується даними, які представлені у таблиці 3. Динаміка попиту на рекреаційні послуги відображена у таблиці 4.

Таблиця 3

### Об'єми пропозиції рекреаційних послуг за 2007-2016 рр.

Рік	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2007	1748	2624	3254	1453	1209	2080	3734	2837	1928	3243
2008	1691	2726	3632	1736	1436	2327	4293	2932	2372	3752
2009	1763	2739	3827	1793	1537	2435	4387	2832	2398	4572
2010	1891	2637	3872	1835	1436	2382	4392	2735	2462	4092
2011	1891	2536	3928	1932	1493	2537	4283	2635	2493	4672
2012	1854	2732	3983	1982	1527	2736	4538	2837	2572	4737
2013	1982	2640	4012	2005	1589	2768	4590	2892	2587	4786
2014	2091	2615	3910	1978	1604	2835	4638	2946	2637	4837
2015	2254	2556	3867	1945	1536	2873	4756	2834	2685	4878
2016	1748	2730	3814	1890	1469	2890	4789	2712	2710	4924

Таблиця 4

### Об'єми попиту рекреаційних послуг за 2007-2016 рр.

Рік	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2007	1654	2221	3228	1362	1232	1779	3296	2478	1807	3276
2008	1699	2358	3682	1250	1378	1832	3373	2514	1857	3323
2009	2111	2853	4672	1410	1423	1896	3412	2567	1915	3456
2010	2221	2869	4938	1475	1479	1957	3545	2578	1979	3515
2011	1909	2241	4067	1534	1480	1986	3712	2605	2134	3670
2012	1835	2312	3951	1663	1496	2034	3873	2618	2272	3873
2013	1940	2287	3910	2068	1928	2564	4766	3045	2766	5684
2014	2130	2115	3875	2211	1882	2620	4984	3072	2967	5314
2015	2175	2065	3746	1890	1589	2266	3947	2403	2439	4927
2016	2098	2017	3670	1858	1556	2340	4006	2478	2411	4785

Для аналізу динаміки пропозиції рекреаційних послуг та попиту на них за 2007-2017 роки розрахувати:

1. Абсолютні прирости, темпи росту та темпи зростання попиту та пропозиції до 2017 року (табл. 5).
2. Середньорічний об'єм пропозиції рекреаційних послуг та попиту на них (табл. 6).
3. Середньорічний абсолютний приріст пропозиції рекреаційних послуг та попиту на них.
4. Середньорічні темпи росту та приросту попиту та пропозиції за:
  - а.) 2007-2012 роки;
  - б.) 2012-2016 роки.

Порівняти отримані дані, надати їх у таблицях. Відобразити об'єми пропозиції рекреаційних послуг та попиту на них за 2012-2016 роки на графіку.

5. Розрахувати дефіцит (залишок) рекреаційних послуг в регіоні за роками та запропонувати заходи, які спрямовані на забезпечення збалансованого попиту та пропозиції.

Таблиця 5

**Прирости, темпи росту та темпи приросту пропозиції й попиту на рекреаційні послуги**

Роки	Ланцюгові абсолютні прирости		Абсолютний приріст з базою в 2005 році		Ланцюгові темпи росту		Базисні темпи росту		Ланцюгові темпи приросту		Базисні темпи приросту	
	Пропозиції рекреаційних послуг	Попиту на рекреаційні послуги	Пропозиції рекреаційних послуг	Попиту на рекреаційні послуги	Пропозиції рекреаційних послуг	Попиту на рекреаційні послуги	Пропозиції рекреаційних послуг	Попиту на рекреаційні послуги	Пропозиції рекреаційних послуг	Попиту на рекреаційні послуги	Пропозиції рекреаційних послуг	Попиту на рекреаційні послуги
2012												
2013												
2014												
2015												
2016												

Таблиця 6

**Середньорічні значення**

Назва показника	Значення показника
Середньорічний об'єм пропозиції рекреаційних послуг та попиту на них	
Середньорічний абсолютний приріст пропозицій рекреаційних послуг та попиту на них	
Середньорічні темпи росту попиту та пропозиції на них 2007-2012 роки	
Середньорічні темпи росту попиту та пропозиції на них 2012-2016 роки	
Середньорічні темпи приросту попиту та пропозиції на них 2006-2012 роки	
Середньорічні темпи приросту попиту та пропозиції на них 2012-2016 роки	

### Методичні вказівки до рішення задач:

Для розрахунку показників динаміки необхідно використовувати наступні формули:

1. а) абсолютні прирости:

$$\Delta Y_i^{\lambda} = Y_i - Y_{i-1},$$

$$\Delta Y_i^{\delta} = Y_i - Y_{\delta},$$

де  $\Delta Y_i^{\lambda}$  - ланцюговий приріст в  $i$ -му періоді;  $Y_i$  - значення показника в  $i$ -му періоді;  $Y_{i-1}$  - значення показника в періоді, який попередній  $i$ -му;  $\Delta Y_i^{\delta}$  - абсолютний приріст з постійною базою в  $i$ -му періоді;  $Y_{\delta}$  - значення показника в базисному періоді.

б.) темпи зростання

$$T_i^{\lambda} = \frac{Y_i 100}{Y_{i-1}},$$

$$T_i^{\delta} = \frac{Y_i 100}{Y_{\delta}},$$

де  $T_i^{\lambda}$  - ланцюговий темп зростання показника в  $i$ -му періоді;  $T_i^{\delta}$  - базисний темп зростання в  $i$ -періоді.

в.) темпи приросту

$$\Delta T_i^{\lambda} = \frac{(Y_i - Y_{i-1})}{Y_{i-1}},$$

$$\Delta T_i^{\delta} = \frac{(Y_i - Y_{\delta})}{Y_{\delta}},$$

чи  $\Delta T = T - 100$ ?

де  $\Delta T_i^{\lambda}$  - ланцюговий темп приросту показника в  $i$ -м періоді;  $\Delta T_i^{\delta}$  - базисний темп приросту в  $i$ -м періоді.

2. Для розрахунку середньорічного абсолютного приросту  $\Delta Y_{сер}$ , середньорічного темпу зростання  $T_{сер}$  та темпу приросту  $\Delta T_{сер}$  відповідно наступні формули:

$$\Delta Y_{сер} = \frac{\sum \Delta Y_i^{\delta}}{n-1} = \frac{(Y_i - Y_{\delta})}{n-1},$$

$$T_{сер} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_i}{Y_{\delta}}} 100,$$

$$\Delta T_{сер} = T_{сер} - 100.$$

Індивідуальне завдання.

Заповнити таблиці 7-9, використовуючи сайт Державної служби статистики України (використовувати дані за 2016 рік)

Таблиця 7

### Виписка із структури валового внутрішнього продукту за виробничим методом

	Код за КВЕД-2010	У фактичних цінах		У постійно діючих цінах 2010, до попереднього року	
		млн. грн	% до підсумку	зміна обсягу	зміна дефлятора
Валовий внутрішній продукт					
Тимчасове розміщення й організація харчування					
Мистецтво, спорт,					

розваги та відпочинок					
-----------------------	--	--	--	--	--

Таблиця 8

### Виписка із структури валового внутрішнього продукту за категоріями доходу

	Код за КВЕД-2010	Валова додана вартість	У тому числі		
			оплата праці найманих працівників	податки за виключенням субсидій на виробництво та імпорт	валовий прибуток, змішаний дохід
Валовий внутрішній продукт					
Тимчасове розміщування й організація харчування					
Мистецтво, спорт, розваги та відпочинок					

Таблиця 9

### Виписка із структури валового внутрішнього продукту за категоріями кінцевого споживання

	Код за КВЕД-2010	У фактичних цінах		У постійно діючих цінах 2010, до попереднього року	
		млн. грн	% до підсумку	зміна обсягу	зміна дефлятора
Кінцеві споживчі витрати:					
домашніх господарств					
індивідуальні споживчі витрати					
Валове нагромадження					
валове нагромадження основного капіталу					
Сальдо експорту-імпорту товарів та послуг					
ВВП у розрахунку на одну особу, грн.					



## Практичне заняття 2.

### Історичний аспект розвитку прогнозування та планування

#### Задача 3.

Динаміка випереджаючих індикаторів за червень-липень та липень-серпень звітного року характеризується даними, які наведені у таблиці 7. Провести аналіз змін індикаторів та сформулювати висновок про те, чи можливо передбачити настання в економіці поворотної точки циклу ?

Таблиця 7

#### Індекси попереджуючих індикаторів

Показники	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Червень-липень										
Індекс цін на послуги	1,04	1,17	1,04	1,08	1,05	1,0	1,1	1,06	1,04	1,02
Індекс обмінного курсу гривні	1,08	1,03	1,12	1,0	1,2	0,9	0,98	1,02	1,15	1,12
Індекс зростання товарних запасів у співставних цінах	1,2	0,9	1,2	0,9	0,91	1,1	1,2	1,0	1,15	1,1
Липень-серпень										
Індекс цін на послуги	1,07	1,12	1,05	1,1	1,01	1,1	1,0	1,08	1,04	1,04
Індекс обмінного курсу гривні	1,0	1,14	1,08	1,03	1,07	1,06	1,05	1,0	1,12	1,08
Індекс зростання товарних запасів у співставних цінах	0,8	1,02	0,8	1,2	0,95	0,9	1,1	1,2	1,05	1,12

#### Задача 4.

Виміряти швидкість змін, що відбуваються в економіці протягом 2013-2015 років, використовуючи дані таблиці 8 щодо динаміки співпадаючих індикаторів. За результатами розрахунків сформулювати висновки.

Таблиця 8

#### Середньорічні темпи приросту співпадаючих індикаторів, %

Показники	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2015-2016										
ВВП у спів ставних цінах	2,4	2,1	2,7	3,5	3,8	4,1	2,7	3,0	1,2	3,2
Реальні доходи населення	3,1	4,2	4,9	3,1	3,7	3,2	1,9	2,4	1,4	2,9
Чисельність безробітних	-0,8	-0,2	0,3	-1,1	-0,2	1,3	0,7	0,3	2,1	-0,4
2016-2017										
ВВП у спів ставних цінах	3,2	2,9	3,1	1,8	1,4	3,6	3,1	2,5	1,5	2,7
Реальні доходи населення	2,4	3,2	3,1	1,5	1,9	4,0	3,3	3,0	1,2	2,9
Чисельність безробітних	-0,5	-0,3	0,5	-1,4	-0,7	0,7	1,1	1,1	2,7	-0,7

Методичні вказівки до рішення задач:

Виділяють три групи індикаторів: випереджальні, співпадаючі, запізняючи. До *випереджальних* індикаторам відносяться показники, які випереджають в часі зміни економічної кон'юнктури. Індикатори, *співпадаючі* за часом з рухом економічної кон'юнктури, відносяться до групи співпадаючих. *Запізняючи* є індикаторами, які відстають за часом від динаміки економічної кон'юнктури.

При аналізі економічних індикаторів розраховуються зведені індекси індикаторів та індекси амплітуди.

Зведений індекс за групою індикаторів дозволяє оцінити спрямування динаміки економічних процесів. Зведений випереджальний (співпадаючий, запізняючий) індекс являє собою середньозважену величину із оцінок випереджальних (співпадаючих, запізняючих) економічних індикаторів. Оцінки індикаторів визначаються наступним чином: коли динаміка індикатору виявляє тенденцію до зростання економіки, то йому присвоюється оцінка 1, коли динаміка незмінна, то оцінка 0,5, коли динаміка індикатору виявляє негативні економічні тенденції, то його оцінка 0. В якості ваг використовуються показники значущості індикаторів.

Коли розрахований таким чином зведений індекс знаходиться в інтервалі  $[0; 0,5]$ , то це свідчить щодо переважно негативних тенденціях в економіці; коли зведений індекс попадає в інтервал  $[0,5; 1]$ , то це відображує тенденції до зростання економіки. Прогноз поворотної точки циклу відбувається на основі співставлення випереджальних індексів двох наступних періодів: очікується поворотна точка циклу, коли зведені індекси двох послідовних періодів припадають в різні інтервали  $[0; 0,5]$  та  $[0,5; 1]$ .

Індекс амплітуди надає можливість виміряти швидкість змін, що відбуваються в економіці у якомусь періоді у порівнянні з заданою (нормативною) величиною швидкості. Індекс амплітуди розраховується як для кожного індикатору, так і для групи.

Методика розрахунку індексу амплітуди окремого індикатору включає:

1. Визначення темпу зростання індикатору;

2. Співставлення темпу зростання із заданою екзогенно нормальною його величиною.

Індекс амплітуди групи індикаторів визначається як середньозважена індексів амплітуди індикаторів групи. В якості ваг можуть бути взяті коефіцієнти значущості. Коли індекс амплітуди знаходиться в інтервалі  $[0; 1]$ , то швидкість досліджуемого економічного процесу менше нормативної (заданої); коли індекс амплітуди більше одиниці, то можна казати про більш інтенсивний у порівнянні з заданою динамікою економічних процесів.

### Практична робота № 3

#### Методологія та організація прогнозування і планування

##### Задача 5.

Зробити прогноз чисельності населення в цілому, чисельності народжених та зайнятих на 2016 і 2017 роках за методом середніх характеристик (за середнім абсолютним приростом, середнім темпом зростання, середнім приростом). Вихідні дані представлені у таблиці 9.

Таблиця 9

#### Показники чисельності населення, зайнятості та народжуваності

Рік	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середньостатистична чисельність населення, тис. чол.										
2011	1274	1422	1311	1588	2080	1738	1543	1463	1683	1142
2012	1299	1450	1337	1620	2122	1773	1574	1492	1717	1165
2013	1351	1508	1391	1685	2206	1844	1637	1552	1785	1211
2014	1338	1493	1377	1668	2184	1825	1620	1536	1767	1199
2015	1284	1434	1322	1601	2097	1752	1556	1475	1697	1151
2016	1207	1348	1242	1505	1971	1647	1462	1386	1595	1082
Чисельність народжених за рік, тис. чол.										
2011	42	38	29	48	51	39	44	41	32	25
2012	41	37	28	47	49	38	43	40	31	24
2013	39	35	27	44	47	36	41	38	29	23
2014	38	34	26	43	46	35	40	37	27	22
2015	38	35	26	44	47	36	39	36	28	21
2016	39	36	27	45	48	37	40	37	29	23
Чисельність зайнятих в економіці, тис. чол.										
2011	463	502	483	515	584	527	472	493	558	392
2012	449	487	469	500	566	511	458	478	541	380
2013	427	463	445	475	538	486	435	454	514	361
2014	418	453	436	465	527	476	426	445	504	354
2015	422	458	441	470	533	481	431	450	509	358
2016	435	472	454	484	549	495	443	463	524	368

##### Задача 6.

На основі даних задачі 5 розрахувати на ретроспективний і прогнозний (2017-2020) періоди загальний коефіцієнт народжуваності та долю зайнятих у загальній чисельності населення. За результатами розрахунків сформулювати висновки.

**Методичні вказівки до рішення задач:**

Коли існує потреба визначити загальну кількість населення, прогнозування може бути проведеним на основі динаміки чисельності населення за ряд років, визначення тенденцій зміни її (шляхом вирівнювання за аналітичними формами чи авто регресійними моделями) та екстраполяції рядів динаміки.

До методів демографічного прогнозування відносяться:

- 1.) методи екстраполяції;
- 2.) метод пересування років;
- 3.) метод статистичного моделювання.

Використання методів екстраполяції для оцінки майбутньої чисельності населення базується на припущенні, що виявлені тенденції народжуваності, смертності, міграції, чисельності зайнятих у економіці будуть незмінні протягом прогнозованого періоду часу.

Найбільш наближені оцінки майбутньої чисельності населення за допомогою методу екстраполяції можливо отримати через узагальнюючі показники динаміки:

1. екстраполяція на основі показника середнього абсолютного приросту:

$$S_t = S_0 + \Delta Y_{\text{сер}} * t,$$

де  $\Delta Y_{\text{сер}}$  – показник середнього абсолютного приросту населення;

$S_t$  - прогнозована чисельність населення в  $t$ -му році;

$S_0$  - чисельність населення на початок прогнозованого періоду;

$t$  - період прогнозування, років.

2. екстраполяція на основі показника середнього темпу зростання:

$$S_t = S_0 * T_{\text{сер}},$$

де  $T_{\text{сер}}$  - показник середнього абсолютного зростання.

3. Екстраполяція на основі середнього приросту

$$S_t = S_0 * (1 + \Delta T_{\text{сер}})^t$$

де  $\Delta T_{\text{сер}}$  - коефіцієнт середнього темпу приросту.

За результатами розрахунків заповнити таблицю 10:

Таблиця 10

### Прогноз чисельності населення, зайнятості та народжуваності

Рік	Населення	Народжених	Зайнятих економіці	в
на основі показника середнього абсолютного приросту				
2017				
2018				
2019				
2020				
на основі показника середнього темпу зростання				
2017				
2018				
2019				
2020				
на основі показника середнього темпу зростання				
2017				
2018				
2019				
2020				

Якщо темп зростання розраховується як коефіцієнт, то базовий показник приймається за 1 або за 100, якщо рахувати його в процентах. При розрахунку базових темпів росту для кожного місяця року всі показники на кінець кожного місяця співвідносяться до базового показника на 1 січня. Якщо ви будете розраховувати ланцюгові показники, то за базовий слід приймати показник попереднього періоду. Для розрахунку середньорічного темпу зростання зручніше користуватися ланцюговими показниками.

$$\Delta T_{сер} = \frac{\left[ \frac{(Y_i - Y_0)}{n-1} \right]}{Y_0}.$$

Методом пересування вікових груп називається спосіб розрахунку на перспективу статеві-вікової структури населення. Він заснований на використанні даних про віковий склад населення і коефіцієнтів дожиття з таблиць смертності.

Суть методу пересування вікових груп полягає в тому, що чисельність населення вікової групи  $x$  на момент часу  $t$  розраховується як добуток чисельності населення вікової групи ( $x-1$ ) на момент часу  $(t-1)$  і коефіцієнта дожиття для даної вікової групи, що показує, яка частина осіб у віці  $(x-1)$  доживе до віку  $x$  років:

$$S_x^t = S_{x-1}^{t-1} * P_{x-1},$$

Якщо відомий віковий склад населення на певну дату, то можна розрахувати передбачувану чисельність населення в кожному віці через рік, два і т. Д. (Без урахування міграції).

Для визначення можливого числа народжень використовуються дані про віковий склад жінок 15-49 років і спеціальні коефіцієнти народжуваності:

$$P^t = \sum_{x=15}^{49} K_{p.снecy,x} * S_x^t,$$

де  $K_{p.снecy,x}$  - спеціальний коефіцієнт народжуваності для жінок у віці  $x$  років;

$S_x^t$  - середня чисельність жінок у віці  $x$  років.

Суть методів статистичного моделювання полягає в застосуванні для демографічного прогнозування моделей регресії, що характеризують залежність демографічних явищ від обраних факторів.

В окрему групу виділяються методи математичного моделювання, які передбачають використання моделей, заснованих на застосуванні математичних функцій (наприклад, експоненційної кривої, параболи та інше).

Якщо відома чисельність населення на початок якогось періоду, то перспективну чисельність населення через  $t$  років можна визначити на основі експоненціального закону зростання населення за формулою:

$$S_t = S_0 \left( 1 + \frac{K_{зак.нр.}}{1000} \right)^t,$$

де

$$K_{зак.нр.} = \frac{(P - Y) + (\Pi - B)}{\bar{S}} * 1000\%,$$

де  $S_0$  - чисельність населення на початок планового періоду;

$(P - Y)$  - природний приріст населення;

$(\Pi - B)$  - механічний приріст населення;

$\bar{S}$  - середньорічна чисельність населення;

$t$ - період прогнозу.

$K_{\text{заг.}}$  коефіцієнт загального приросту населення за період, який передує плановому.

Коефіцієнт народжуваності ( $K_p$ ) розраховується шляхом ділення числа народжених за рік ( $N$ ) на середньорічну чисельність населення, тобто  $K_p = \frac{1000N}{\bar{S}}$ .

## Практична робота № 4

### Технологічна матриця і задача оптимального планування

Нехай підприємство виробляє з  $m$  видів ресурсів  $n$  видів продукції.

Припустимо, що виготовлення однієї одиниці продукції  $j$ -го виду продукції витрачається  $a_{ij}$  одиниць  $j$ -го виду ресурсу, тобто  $a_{ij}$  – норма витрат  $i$ -го ресурсу на виробництво  $j$ -го виду продукції. Матриця  $A = (a_{ij})$ , складена з норм витрат, називається матрицею норм витрат. Технологічною її називають ось чому.

Розглянемо якийсь  $j$ -й стовпчик цієї матриці. Цей стовпчик повністю описує витрати ресурсів на виробництво однієї одиниці  $j$ -го виду продукції. Тобто для виготовлення  $j$ -го виду продукції потрібно «змішати»  $a_{1j}$  одиниць першого ресурсу,  $a_{2j}$  - другого ресурсу і т.д. Таким чином,  $j$ -й стовпчик  $A_j$  цієї матриці описує технологію отримання  $j$ -го виду продукції.

Розглянемо тепер рядки цієї матриці. Як бачимо, елементи  $i$ -го рядка описують витрати  $i$ -го ресурсу на одиницю продукції.

Розглянемо план виробництва  $x_1$  одиниць першої продукції,  $x_2$  одиниць другої продукції і взагалі  $x_j$  одиниць  $j$ -ої продукції. Такий план зобразимо вектором  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Зауважемо, що для здійснення цього плану потрібно  $\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j$  одиниць 1-го ресурсу,  $\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j$  одиниць 2-го ресурсу і взагалі  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  одиниць  $j$ -го ресурсу. А ці елементи вектора-стовпчика  $AX$ , якщо помножити технологічну матрицю  $A$  на вектор-план  $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Нехай  $b_i$  – кількість одиниць  $i$ -го ресурсу, які є на складі. Запишемо ці величини запасів у вигляді вектора-стовпця  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ . Тоді матрично-векторна нерівність  $AX \leq \vec{b}$

означає необхідність враховувати обмеженість запасів ресурсів під час розгляду планів виробництва.

Якщо ця нерівність виконується, це означає, що для плану  $X$  вистачить запасів ресурсів  $\vec{b}$  і такий план є реальним.

Введемо ще одну величину: *питома вага прибутку* – прибуток від реалізації однієї одиниці  $j$ -ї продукції. Запишемо всі ці питомі ваги у вигляді вектора-рядка  $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Тоді скалярний добуток  $\vec{c} * \vec{x}$  (вектор-рядки на вектор-стовпець планів) – прибуток, отриманий від реалізації  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  одиниць продукції.

Сформулюємо **задачу оптимального планування**: Знайти такий план виробництва, який був би реальним і забезпечував найбільший прибуток з усіх реальних планів.

Цю задачу (одну з найбільш важливих у всій економічній теорії) символічно записують так:

$$\begin{cases} P(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} \rightarrow \max, \\ AX \leq \vec{b}, \\ \vec{X} \geq 0. \end{cases}$$

**Приклад 1.** Цех виготовляє трансформатори двох видів. На один трансформатор першого виду потрібно 5 кг заліза і 3 кг дроту, другого виду – 3 кг заліза і 2 кг дроту. Від реалізації одного виду трансформатора цех отримує прибуток 6 і 5 умовних одиниць відповідно. На складі цеху є 4,8 т заліза і 3 т дроту. Скільки кожного виду продукції виготовляє цех? Скільки ресурсів використовується? Чи реальні плани  $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ .

*Розв'язання.* Вектор питомого прибутку  $\vec{c} = (6; 5)$ , вектор запасів ресурсів  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}$ . Матриця норм витрат  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Для перевірки того, чи план  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  реальний, треба перевірити нерівність  $A\vec{X} \leq \vec{b}$ . Відповідь: так.

*Правила перемноження матриць:*

$$YZ = C;$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = y_{11} * z_{11} + y_{12} * z_{21};$$

$$c_{21} = y_{21} * z_{11} + y_{22} * z_{21}.$$

Для перевірки плану  $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$  перемножимо матриці  $A$  та  $X$ :

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*500 + 3*600 \\ 3*500 + 2*600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 2700 \end{pmatrix}.$$

Нерівність  $AX \leq \vec{b}$  виконується:  $\begin{pmatrix} 4300 \\ 2700 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}$ .

**Задача 1.** Санаторій надає два виду курсів лікування. На один цикл лікування першого виду потрібно 300 л мінеральної води та 100 кг лікувальної грязі, другого

виду – 200 л мінеральної води та 150 кг лікувальної грязі. Від реалізації одного лікувального курсу санаторій отримує 5000 та 6500 грн. відповідно. Природні можливості території санаторію за період лікування дозволяють отримувати 150000 л мінеральної води та 75000 кг лікувальної грязі. Скільки кожного виду лікувальних циклів надає санаторій? Скільки ресурсів використовується? Чи реальні плани  $\left(\frac{200}{300}\right), \left(\frac{300}{400}\right)$ ? **Коли плани не реальні запропонувати реальний план.**

Питання для захисту практичної роботи:

Що таке питома вага прибутку?

Сформулюйте задачу оптимального планування.

### Практична робота № 5

#### Лінійне програмування в туризмі

Розглянемо дві практичні задачі, які пояснюють необхідність введення деяких нових понять і методів.

**Задача 1.** *Якесь підприємство виготовляє водяні лічильники двох типів. Умовно назвемо одні з них великими, інші – малими. Ціна кожного малого лічильника \$ 6, а кожного великого – \$ 10. Для виготовлення малого лічильника потрібно 2 кг сталі та 2 кг пластмаси; для виготовлення великого лічильника потрібно 3 кг сталі та 9 кг пластмаси. Підприємство має 1200 кг сталі та 2700 кг пластмаси. Яку кількість лічильників кожного типу має виготовляти підприємство, щоб одержати максимальний прибуток? для простоти вважається, що попит на лічильники різних типів – однаковий.*

Пояснимо, як побудувати математичну модель цієї задачі.

По-перше, якою має бути відповідь? очевидно, вона має визначити, яку кількість лічильників різних типів необхідно виготовити. По-друге, який максимальний прибуток отримають?

Введемо такі позначення:

$x$  - кількість малих лічильників;

$y$  - кількість великих лічильників.

Зауважимо, що на ці змінні природно накласти обмеження  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Оскільки сума грошей, отриманих від продажу цих лічильників виражається формулою  $P = 6x + 10y$ , то остання має максимізувати функцію  $P(x, y) = 6x + 10y$  при обмеженнях  $x \geq 0, y \geq 0$ . Чи є інші обмеження на величини  $x$  і  $y$ ? Оскільки кількість металу і пластмаси обмежена, то на виготовлення  $x$  малих і  $y$  великих лічильників використовується не більше 1200 кг сталі та не більше 2700 кг пластмаси. Тому

$$2x + 3y \leq 1200 \text{ і } 2x + 9y \leq 2700.$$

З умови задачі бачимо, що інших обмежень не змінні  $x$  і  $y$  немає.

**Модель.** Знайти максимум функції

$$P(x, y) = 6x + 10y$$

при обмеженнях

$$2x + 3y \leq 1200;$$

$$2x + 9y \leq 2700;$$

$$x \geq 0;$$

$$y \geq 0.$$

**Розв'язання.** Розглянемо перші обмеження  $2x + 3y \leq 1200$ . Якщо розглянути граничне значення, коли нерівність перетворюється на рівність:  $2x + 3y = 1200$ , то це рівняння якоїсь прямої. Зобразимо її на площині. Якщо розглянути довільну точку в нижній



півплощині відносно цієї прямої, то вона задовольняє нерівність  $2x+3y \leq 1200$ . Справді точка  $(0;0)$ :  $2*0+3*0=0 \leq 1200$ ; точка  $(100;100)$ :  $200+300=500 \leq 1200$  (рис. 5.1)

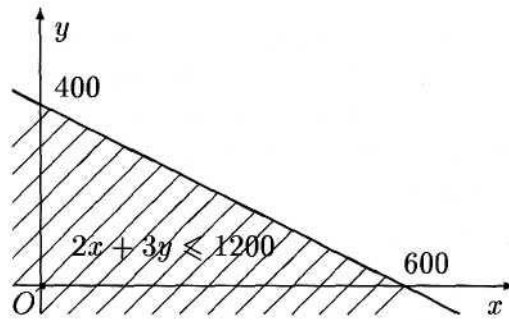


Рис. 5.1

Отже, множина точок, що задовольняє нерівність  $2x+3y \leq 1200$ , - пів площа щодо прямої  $2x+3y=1200$ , що містить початок координат. Аналогічно знаходимо множину точок, що задовольняють другу нерівність (рис. 5.2):

$$2x+9y \leq 2700$$

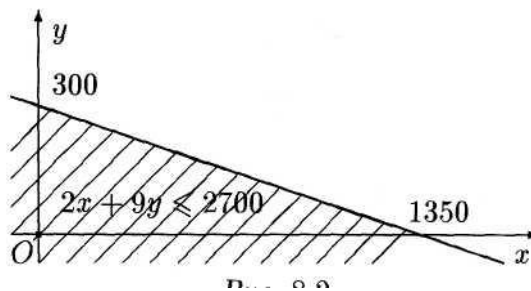


Рис. 5.2

Відповідні обмеження  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  зображуються півплощинами (рис. 5.3 і 5.4):

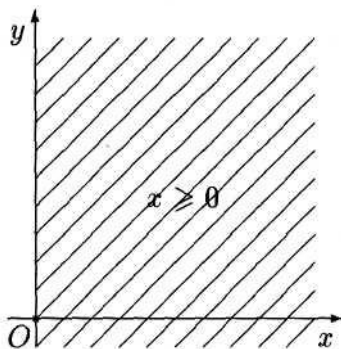


Рис. 5.3.

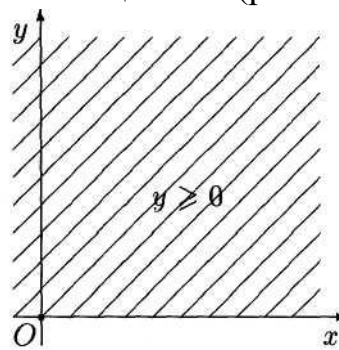


Рис. 5.4

Тоді область точок на площині, що задовольняють усі чотири обмеження, буде чотирикутником, зображеним на рис. 5.5.

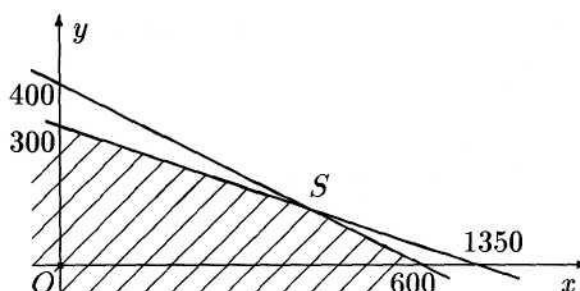


Рис. 5.5

Координати всіх величин цього чотирикутника, крім вершини  $S$ , відомі. Для знаходження її координат розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1200; \\ 2x + 9y = 2700. \end{cases}$$

$$6y = 1500,$$

$$y = 250,$$

$$x = 225.$$

Отже,  $S(225; 250)$ .

Розглянемо тепер нашу функцію

$$P(x; y) = 6x + 10y.$$

При зміні значень  $P$  отримуємо сім'ю паралельних прямих (рис. 5.6):

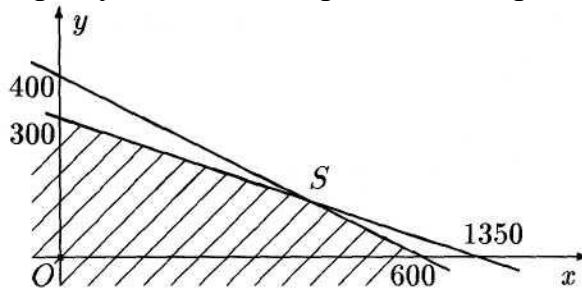


Рис. 5.6

Як бачимо, значення функції зростають, якщо пряма рухається паралельно собі від початку координат. Значення максимуму функція набуде в точці  $S$ .

Отже,

$$P(x; y) = 6x + 10y.$$

Так,

$$P(x; y) = P(225; 250) = 6 \cdot 225 + 10 \cdot 250 = 1350 + 2500 = 3850.$$

Відповідь. Для отримання максимального прибутку \$ 3850 слід випустити 225 малих і 250 великих лічильників.

Розглянути задача – типова в математичному розділі, який об'єднується поняттям *лінійне програмування*.

Багато практичних задач зводиться до задач лінійного програмування. Якщо змінних багато, то вибрати оптимальний варіант досить важко. Для розв'язування таких задач у 1947 р. американський математик Джордж Данцінг запропонував так званий *симплекс-метод*. За розв'язання одного з типів задач лінійного програмування радянський математик Лев Канторович був нагороджений Нобелівською премією з економіки.

**Завдання:**

*Скласти аналогічну задачу в інтерпретації для туристичної сфери і вирішити її.*

## Практична робота № 6

### Визначення показників при криволінійній залежності

Дослідження форми зв'язку інколи зумовлює потребу в застосуванні нелінійних рівнянь регресії. При криволінійній залежності систему рівнянь будують так, як і для лінійної залежності. Система рівнянь для параболі другого порядку  $\tilde{Y}_x = a + bx + cx^2$  має такий вигляд:



			$X^2$	$X^3$	$X^4$	$XY$	$YX^2$	$Y^2$	
	$X$	$Y$							
1	20	1000	400	8000	160000	20000	400000	1000000	
2	25	1200	625	15625	390625	30000	750000	1440000	
3	30	1250	900	27000	810000	37500	1125000	1562500	
4	40	1300	1600	64000	2560000	52000	2080000	1690000	
5	50	1400	2500	125000	6250000	70000	3500000	1960000	
6	60	1500	3600	216000	12960000	90000	5400000	2250000	
7	70	1450	4900	343000	24010000	101500	7105000	2102500	
8	75	1400	5625	421875	31640625	105000	7875000	1960000	
9	80	1350	6400	512000	40960000	108000	8640000	1822500	
10	90	1200	8100	729000	65610000	108000	9720000	1440000	
разом	<b>540</b>	<b>13050</b>	<b>34650</b>	<b>2461500</b>	<b>185351250</b>	<b>722000</b>	<b>46595000</b>	<b>17227500</b>	

4. Підставимо отримані дані в систему рівнянь:

$$\begin{cases} 13050 = 10a + 540b + 3450c; & (1) \\ 722000 = 540a + 34650b + 2461500c; & (2) \\ 465 = 34650a + 2461500b + 18535125c. & (3) \end{cases}$$

5. Розв'яжемо систему рівнянь і знайдемо коефіцієнти регресії  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

а) поділимо всі члени рівняння на коефіцієнти при  $a$  (перше – на 10, друге – на 540, третє – на 34650);

$$\begin{cases} 1305 = a + 54b + 3465c; & (4) \\ 1337,0 = a + 64,2b + 4558,3c; & (5) \\ 1344,7 = a + 71,0b + 5349,2c. & (6) \end{cases}$$

б) віднімемо від 5-го рівняння 4-е, від 6-го рівняння 5-е, в результаті отримаємо систему рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 32 = 10,2b + 1093,3c; & (7) \\ 7,7 = 6,8b + 790,9c. & (8) \end{cases}$$

в) розділемо обидва рівняння на коефіцієнт при  $b$ :

$$\begin{cases} 3,14 = b + 107,2c; & (9) \\ 1,13 = b + 116,3c. & (10) \end{cases}$$

г) віднімемо від 9-го рівняння 10-е:

$$2,01 = 9,1c; \text{ звідси } c = -\frac{2,01}{9,1} = -0,22.$$

д) підставимо значення  $c$  в рівняння (9) і знайдемо коефіцієнт регресії  $b$ :

$$3,14 = b + 107,2 * (-0,22); b = 3,14 + 23,58 = 26,72.$$

е) визначимо коефіцієнт регресії  $a$ , підставимо значення  $b$  і  $c$  в перше рівняння:

$$13050 = 10a + 540 * (26,72) + 34650 * (-0,22);$$

$$a = 624,42.$$

6. Проведемо перевірку правильності обчислення коефіцієнтів за такою формулою:

$$\bar{Y} = a + b\bar{X} + c\bar{X}^2$$

$$\text{де } \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{13050}{10} = 1305; \bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{540}{10} = 54; \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{n} = \frac{34650}{10} = 3465.$$

$$1305 = 624,42 + 26,72 * 54 + (-0,22) * 3468;$$

$$1305 = 1305.$$

7. Отже, рівняння регресії, що характеризує зв'язок між об'ємом рекреаційних послуг і кількістю місць в засобах розміщення має вигляд:

$$\tilde{Y}_x = 624,42 + 26,7x - 0,22x^2.$$

Коефіцієнт регресії  $b = 26,72$  тис. грн. показує, що із збільшенням кількості місць в засобах розміщення до 60 (див. графік і очікуване значення об'єму рекреаційних послуг -  $\tilde{Y}_x$ ) кожне додаткове місце збільшує об'єм на 26,76 тис. грн., а потім об'єм послуг зменшується. Про це свідчить коефіцієнт регресії

$$c = -\frac{26,72}{2 * (-0,22)} = 60,7.$$

8. Визначимо очікувані (розрахункові) значення об'єму рекреаційних послуг для різної кількості місць в готелях ( $\tilde{Y}_x$ ). Для цього в рівнянні регресії замість  $x$  (кількість місць в готелі) підставимо його конкретні значення ( $x = 10, 20 \dots 100$ ).

$$\tilde{Y}_{x=10} = 624,42 + 26,72 * 10 - 0,22 * 10^2.$$

Таблиця 6.2

**Теоретичне значення**

№	Місткість готелів, місць	Очікуване значення об'єму наданих рекреаційних послуг, тис. грн.

9. Визначимо тісноту зв'язку між кількістю місць в готелях і об'ємом рекреаційних послуг, для чого розрахуємо індекс кореляції:

$$i_m = \sqrt{\frac{\sigma_{\hat{Y} \hat{X}}^2}{\sigma_{\hat{X}}^2}} = \sqrt{\frac{a \sum Y + b \sum YX + c \sum YX^2 - n\bar{Y}^2}{\sum Y^2 - n\bar{Y}^2}} = \sqrt{\frac{624,42 * 13050 + 26,72 * 722000 + (-0,22) * 46595000 - 10 * 54^2}{17227500 - 10 * 54}} = 0,99.$$

Індекс кореляції показує, що між об'ємом рекреаційних послуг і кількістю місць в готелях спостерігається тісний зв'язок. Коефіцієнт детермінації ( $i_r^2 = 0,99$ ) показує, що 0,99 % відмінностей в об'ємі послуг пов'язано кількістю готельних номерів, а решта - 1 % з іншими факторами, дія яких в задачі не враховувалася.

Завдання:

1. Знайти формулу залежності між місткістю готелів та об'ємом наданих рекреаційних послуг.
2. Побудувати графік фактичної та теоретичної залежності між місткістю готелів та об'ємом наданих рекреаційних послуг.