Титулка

Титулка

Зміст .

Вступ

Стрімкий розвиток науки і наукова насиченість процесів, які відбуваються в економіці, вимагає від сучасних спеціалістів вміння швидко орієнтуватися у змінах, породжених науково-технічним прогресом, що неможливо без математичної культури та володіння елементами математичного моделювання економічних процесів.

Економіко-математичні методи та моделі як навчальна дисципліна покликана формувати теоретичні знання та практичні навички щодо методології та інструментарію побудови та адекватного використання різних типів економіко-математичних моделей для аналізу економічних об’єктів, процесів, явищ, тенденцій та причинно-наслідкових зв’язків в економіці. Завдання дисципліни полягає в усвідомленні студентами суті, пізнавальних можливостей та практичного значення математичного моделювання, як одного з наукових методів пізнання дійсності, ознайомленні з найбільш поширеними математичними методами, використовуваними для формалізації економічних задач.

З метою засвоєння студентами основних принципів та інструментарію щодо постановки задач економіко-математичного моделювання, методів їх розв’язування та аналізу, навчальною програмою передбачається виконання циклу лабораторних робіт.

Дані методичні вказівки призначені для студентів денної та заочної форм навчання за напрямом півготовки 6.030 і містять основні теоретичні відомості, завдання до виконання лабораторних за темами, передбаченими програмою курсу, а також список рекомендованої літератури.

Лабораторна робота № 1
Модель міжгалузевого балансу. (Модель Леонтьєва)

Мета: Вивчити рівняння міжгалузевого балансу. Навчитись визначати об'єми валової продукції, якщо відома матриця прямих матеріальних затрат та об'єми кінцевої продукції

Теоретичні відомості

Функціювання багатогалузевої економіки потребує балансу між її окремими галузями. Кожна галузь одночасно є як виробником, так і споживачем продукції, яку виробляють інші галузі. Таким чином, виникає непроста задача розрахунку взаємозв'язків між окремими галузями через випуск та споживання продукції. Вперше математична модель цієї задачі була побудована у 1936 році в працях американського економіста В.В. Леонтьєва. У 1973 році В.В. Леонтьєву була присуджена Нобелівська премія "за розвиток методу "витрати-випуск" і застосування до важливих економічних проблем".

Зробимо наступні припущення. Нехай виробнича сфера складається з n галузей, кожна з яких виробляє однотипну продукцію. Таким чином, маємо n типів продукції. Позначимо X_i - валовий випуск продукції i-ої галузі економіки, x_{ij} - частину продукції i-ої галузі, яку споживає j -та галузь економіки для своїх виробничих потреб, y_i - частину продукції i-ої галузі, яка використовується в невиробничій сфері (споживається), y_i також називають кінцевою продукцію споживання.

Схему міжгалузевого балансу можна подати у вигляді таблиці:

Галузі економіки	Споживання у виробничій сфері				Кінцева продукція	Валова продукція
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	X_n

Балансовий принцип звязку різних галузей економіки полягає в тому, що валова продукція i-ої галузі повинна дорівнювати сумі частин споживання у виробничій і невиробничій сферах, тобто для будь-якого i повинна виконуватись рівність:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \tag{1}$$

Рівняння (1), де $i = 1, 2, ...n$, називають рівнянням міжгалузевого балансу.

На основі аналізу економіки США Леонтьєвим було помічено, що відношення $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ залишаються сталими, або змінюється досить мало протягом певного проміжку часу, тому величини a_{ij} можна вважати константами. Цей факт пояснюється тим, що технологія виробництва досить довгий час може залишатися на одному й тому ж рівні. Числа називають a_{ij} коефіцієнтами прямих матеріальних затрат.

Запишемо рівняння балансу (1) у матричній формі. Для цього нам будуть потрібні наступні позначення.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Матриця А називається матрицею прямих матеріальних затра (її також називають технологічною матрицею).

Відмітимо деякі властивості коефіцієнтів a_{ij}. Зрозуміло, що $a_{ij} \geq 0$ і $a_{ij} < 1$. Матриця А називається продуктивною, якщо виконується умова: $X - AX > 0$. Достатня умова продуктикності:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Отже, рівняння (1) у матричній формі мають вигляд:

$$X = AX + Y \tag{2}$$

Рівняння (2) називається моделлю Лєонтьєва багатогалузевого балансу. За допомогою моделі Лєонтьєва можна розв'язувати задачі двох типів. 1) Знаючи об'єми валової продукції кожної галузі X, розрахувати об'єми кінцевої продукції кожної галузі Y:

$$Y = X - AX$$

2) Задаючи об'єми кінцевої продукції для кожної галузі Y, знайти об'єми валової продукції кожної X:

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

Зауважимо, що для продутивної матриці $(E - A)^{-1}$ існує. Матрицю

$$B = (E - A)^{-1}$$

називають матрицею повних витрат.

Хід роботи

1. Розв'язати задачі 1-2;

2. Відповідні обчислення провести в Excel;

Завдання для самостійного виконання

Задача 1. Таблиця містить дані міжгалузевого балансу для трьох галузей промисловості. Записати матрицю прямих матеріальних затрат. Знайти об'єми кінцевої продукції для кожної галузі. Знайти нові об'єми валової продукції для кожної галузі, якщо кінцеву продукцію планується збільшити відповідно до y_1; y_2; y_3 умовних грошових одиниць.

Варіант 1						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	10	20	25		100
2	B	15	30	15		150
3	C	20	20	30		200

$$y_1 = 50; \quad y_2 = 120; \quad y_3 = 140.$$

Варіант 2						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	5	35	20		100
2	B	10	10	20		100
3	C	20	10	10		50

$$y_1 = 60; \quad y_2 = 80; \quad y_3 = 40.$$

Варіант 3						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	10	50	20		200
2	B	25	20	50		200
3	C	40	40	20		180

$$y_1 = 1000; \quad y_2 = 110; \quad y_3 = 85.$$

Варіант 4						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	10	40	50		120
2	B	20	20	50		200
3	C	40	45	20		250

$$y_1 = 40; \quad y_2 = 120; \quad y_3 = 150.$$

Варіант 5						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	15	60	20		150
2	B	40	20	60		200
3	C	5	40	30		120

$$y_1 = 50; \quad y_2 = 90; \quad y_3 = 60.$$

Варіант 6						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	10	40	12		100
2	B	40	20	60		220
3	C	60	20	20		200

$$y_1 = 50; \quad y_2 = 110; \quad y_3 = 120.$$

Варіант 7						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	20	80	80		320
2	B	80	40	60		400
3	C	40	90	20		200

$$y_1 = 150; \quad y_2 = 220; \quad y_3 = 80.$$

Варіант 8						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	2	20	30		100
2	B	40	10	20		120
3	C	10	30	30		120

$$y_1 = 60; \quad y_2 = 60; \quad y_3 = 60.$$

Варіант 9						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	30	90	80		300
2	B	120	40	60		300
3	C	90	90	20		260

$$y_1 = 150; \quad y_2 = 100; \quad y_3 = 80.$$

Варіант 10						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	4	12	20		100
2	B	15	5	10		50
3	C	10	10	2		50

$$y_1 = 70; \quad y_2 = 30; \quad y_3 = 40.$$

Варіант 11						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	3	20	42		120
2	B	15	10	20		120
3	C	15	25	10		150

$$y_1 = 60; \quad y_2 = 90; \quad y_3 = 120.$$

Варіант 12						
№п/п		Споживання у виробничій сфері			Кінцева продукція	Валова продукція
	Галузь	A	B	C		
1	A	10	20	25		100
2	B	15	30	15		150
3	C	20	20	30		200

$$y_1 = 50; \quad y_2 = 120; \quad y_3 = 140.$$

Задача 2. Користуючись заданими коефіцієнтами прямих матеріальних затрат та заданими об'ємами кінцевої продукції для трьох галузей промисловості, потрібно:

1. перевірити продуктивність матриці прямих матеріальних затрат;
2. знайти об’єми валової продукції галузей;
3. знайти об’єми продукції i-ої галузі, які використовуються у виробничій сфері іншими галузями.

Варіант 1				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.3	0	0.2	58
2	0.1	0.1	0.6	105
3	0.2	0.4	0	27
i=3				

Варіант 2				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.1	0.2	0	100
2	0.4	0	0.6	50
3	0	0.2	0.1	60
i=2				

Варіант 3				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0	0.1	0.1	106
2	0.3	0.2	0.1	55
3	0.4	0	0.4	100
i=1				

Варіант 4				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.2	0.2	0	38
2	0	0.2	0.5	65
3	0.1	0.2	0.1	78
i=1				

Варіант 5				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.3	0.2	0.1	48
2	0.2	0.2	0	75
3	0	0.1	0.6	70
i=3				

Варіант 6				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.3	0.3	0.2	120
2	0.1	0.2	0.2	102
3	0.4	0.1	0.2	75
i=2				

Варіант 7				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.1	0	0.4	65
2	0.2	0.1	0.3	95
3	0.6	0.2	0	72
i=1				

Варіант 8				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0	0.1	0.1	200
2	0.6	0.1	0.2	140
3	0	0.4	0.3	100
i=3				

Варіант 9				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.05	0.2	0.2	120
2	0.25	0.01	0.2	205
3	0.4	0.4	0.02	170
i=3				

Варіант 10				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.03	0.15	0.2	180
2	0.25	0.15	0.2	250
3	0.6	0.1	0.04	320
i=3				

Варіант 11				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.05	0.4	0.3	82
2	0.5	0.02	0.3	118
3	0.1	0.3	0	180
i=2				

Варіант 12				
Галузь	Коефіцієнти прямих матеріальних затрат			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.02	0.1	0.15	50
2	0.12	0.2	0.2	48
3	0.2	0.45	0	92
i=1				

Контрольні запитання

1. Дайте означення математичної моделі економічної системи.
2. Перерахуйте основні етапи математичного моделювання.
3. Що називається рівнянням міжгалузевого балансу. (Модель Лєонтьєва). Поясніть економічний зміст моделі Лєонтьєва.
4. Що називається матрицею прямих матеріальних затрат? Поясніть економічний зміст елементів матриці прямих матеріальних затрат.
5. Що таке продуктивна матриця прямих матеріальних затрат? Сформулюйте достатню умову продуктивності матриці прямих матеріальних затрат.
6. Які задачі можна розв'язати за допомогою моделі Лєонтьєва?
7. Що називається матрицею повних витрат. Поясніть економічний зміст елементів цієї матриці.

Лабораторна робота № 2
Розв'язування задач лінійного програмування геометричним методом

Мета: Навчитися розв'язувати задачі лінійного програмування геометричним методом

Теоретичні відомості

Багато задач планування комерційної діяльності можна розв'язати, звівши їх до задач лінійного програмування.

Задачі математичного програмування - це задачі на знаходження максимуму або мінімуму (так звані оптимізаційні задачі) функції багатьох змінних (яку називають цільовою функцією) на деякій множині допустимих значень. Множину допустимих значень задають за допомогою системи рівнянь або нерівностей (обмежень на можливі значення змінних). Якщо цільова функція та функції, які входять в систему обмежень, є лінійними, то маємо задачу лінійного програмування.

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в стандартному вигляді:

$$f(x_1; x_2; ...x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \tag{4}$$

$$i = 1, 2, ...m;$$

$$x_j \geq 0 \tag{5}$$

Допустимим розв'язком задачі (3) - (5) називають будь-який набір змінних $(x_1; x_2; ...x_n)$, який задовольняє системі обмежень (4) - (5). Оптимальним розв'язком задачі називають допустимий розв'язок, при якому цільова функція (3) досягає максимального значення. Отже, потрібно знайти оптимальний розв'язок.

Геометричний метод роз'язування задач лінійного програмування базується на властивостях градієнта функції багатьох змінних (і цільової функції зокрема).

Нагадаємо означення градієнта функції.

Градієнтом функції $f(x_1; x_2)$, позначається $gradf$, називається вектор виду:

$$gradf(x_1; x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

Зокрема, для цільової функції задачі лінійного програмування:

$$f(x_1; x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$grad f(x_1;x_2) = (c_1;c_2).$$

Важливими для нас є наступні властивості градієнта.

1. Градієнт функції направлений в сторону найшвидшого зростання функції, причому максимальна швидкість зростання функції дорівнює модулю її градієнта;

2. Градієнт функції перпендикулярний до її лінії рівня.

Отже, щоб розв'язати задачу лінійного програмування геометричним методом, по-перше, будуємо область допустимих розв'язків задачі, тобто на площині будуємо сукупність точок $(x_1;x_2)$, що визначається системою нерівностей (обмежень). Відмітимо, що для задач лінійного програмування, цільова функція яких задежить від двох змінних, область допустимих розв'язків - деякий мгногокутник. По-друге, будуємо градієнт функції, і, наприклад, через початок координат проводимо перпендикулярно градієнту лінію рівня функції. По-третє, переміщаємо лінію рівня у напрямку градієнта, поки лінія рівня не виявиться на межі області допустимих розв'язків. Остання спільна точка лінії рівня та області допустимих розв'язків є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування. Залишається знайти координати цієї точки, розв'язавши відповідну систему лінійних рівнянь.

Відмітимо, що у випадку, коли задача лінійного програмування має єдиний розв'язок, цей розв'язок обов'язково знаходиться у вершині многокутника розв'язків. Крім того, задача лінійного програмування може мати безліч розв'язків, або взагалі не мати розв'язків.

Хід роботи

1. Розв'язати задачу лінійгного програмування геометричним методом;

2. Перевірити отримані результати в Excel за допомогою функуії "Пошук розв'язків";

Завдання для самостійного виконання

1. Розв'яжіть задачу лінійного програмування геометричним методом. Результати перевірте в Excel, користуючись фунцією 'Пошук розв'язків'.
   Знайдіть максимум цільової функції $F(x_1;x_2)$ при заданих обмеженнях.

Варіант 1

$$F(x_1;x_2) = 5x_1 - 2x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 2

$$F(x_1; x_2) = 3x_1 - 2x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 3

$$F(x_1; x_2) = -x_1 + 10x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 - 0.5x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 4

$$F(x_1; x_2) = 6x_1 - 5x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 5

$$F(x_1; x_2) = 10x_1 + x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 6

$$F(x_1; x_2) = 5x_1 - x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 7

$$F(x_1; x_2) = x_1 + 2x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 8

$$F(x_1; x_2) = -x_1 + 2x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 9

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

Варіант 10

$$F(x_1; x_2) = 5x_1 - x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 - 4x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

Варіант 11

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 5x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ -x_1 + 2x_4 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

Варіант 12

$$F(x_1; x_2) = 5x_1 - x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 0.5x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

Контрольні запитання

1. У чому полягає задача лінійного програмування?

2. Що називається допустимим розв'язком задачі лінійного програмування? Що називається областю допустимих значень задачі лінійного програмування? Що таке оптимальний розв'язок задачі?

3. Дайте означення градієнта функції. Перерахуйте його властивості. Які властивості градієнта використовують при розв'язуванні задач лінійного програмування геометричним методом?

4. Перерахуйте основні етапи розв'язування задачі лінійного програмування геометричним методом.

5. Чи може задача лінійного програмування не мати розв'язків? Якщо так, з чим це може бути пов'язано?

6. Чи може задача лінійного програмування мати безліч розв'язків? За яких умов?

7. Вкажіть переваги та недоліки геометричного методу.

Лабораторна робота № 3
Розв'язування задач лінійного програмування симплекс методом

Мета: Навчитися будувати лінійні моделі для простих економічних задач та розв'язувати задачі лінійого програмування симплексним методом

Теоретичні відомості

Багато задач планування комерційної діяльності можна розв'язати, звівши їх до задач лінійного програмування.

Задачі математичного програмування - це задачі на знаходження максимуму або мінімуму функції багатьох змінних (яку називають цільовою функцією) на деякій множині допустимих значень. Множину допустимих значень задають за допомогою системи рівнянь або нерівностей (обмежень). Якщо цільова функція та функції, які входять в систему обмежень, є лінійними, то маємо задачу лінійного програмування.

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в стандартному вигляді:

$$f(x_1; x_2; ...x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \tag{7}$$

$$i = 1, 2, ...m;$$

$$x_j \geq 0 \tag{8}$$

Допустимим розв'язком задачі (6) - (8) називають будь-який набір змінних $(x_1; x_2; ...x_n)$, який задовольняє системі обмежень (7) - (8). Оптимальним розв'язком задачі називають допустимий розв'язок, при якому цільова функція (6) досягає максимального значення. Отже, потрібно знайти оптимальний розв'язок.

Симплекс метод - це аналітичний ітеративний метод розв'язування задачі лінійного програмування, який полягає в послідовномуціленаправленому переході від одного допустимого розв'язку до іншого з покращенням значення цільової функції. Якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то за скінченне число кроків ми отримаємо її оптимальний розв'язок.

Щоб розв'язати задачу симплексним методом, спочатку перепишемо її у канонічному виді, який передбачає запис усіх обмежень у вигляді рівностей. Перехід від стандартного до канонічного виду можна здійснити, ввівши до кожного обмеження додаткову невід'ємну змінну x_{m+i}.

Отже, канонічний вид задачі лінійного програмування:

$$f(x_1;x_2;...x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{m+i}=b_i \tag{10}$$

$$i=1,2,...m;$$

$$x_j\geq 0 \tag{11}$$

Додаткові змінні $\{x_{m+1};x_{m+2};...x_{2m}\}$ можна розглядати як базисні системи рівнянь (5) і, таким чином, перший допустимий розв'язок матиме вигляд:

$$(0;0;...0;b_1;b_2;...b_m).$$

Значення цільової функції, що відповідає даному допустимому розв'язку, дорівнює нулю, і, очевидно, такий розв'язок не є оптимальним. Обчислимо симплексні оцінки

$$\Delta_i=\sum_{i=1}^{m}c_{k_i}a_{ij}-c_i,$$

де c_{k_i}- коефіцієнти цільової функції біля базисних змінних.

Критерій оптимальності полягає в наступному. Допустимий розв'язок задачі (6)-(8) є оптимальним тоді і тільки тоді, коли всі симплексні оцінки невід'ємні. Якщо серед симплексних оцінок є хоча б від'ємна, то допустимий розв'язок можна покращити. Для покращення допустимого розв'язку вводимо в базис нову змінну, яка відповідає стовбчику з найбільшою по модулю від'ємною симплексною оцінкою (ведучий стовбчик). Щоб зрозуміти, яку змінну потрібно виводити із базису, знаходимо симплексні відношення

$$\theta_i=\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}$$

Із базису потрібно вивести змінну, яка знаходиться в рядку з мінімальним симплексним відношенням (ведучий рядок). Далі перерахуємо симплексну таблицю по методу Жордана-Гаусса. Результати обчислень зручно оформляти у вигляді симплексних таблиць.

Хід роботи

1. Розв'язати задачі 1-2 для самостійного виконання;
2. Відповідні обчислення перевірити в Excel;

Завдання до самостійного виконання

1. Розв'яжіть задачу лінійного програмування симплексним методом. Результати перевірте в Excel, користуючись фунцією 'Пошук розв'язків'.
Знайдіть максимум цільової функції $F(x_1;x_2)$ при заданих обмеженнях.

Варіант 1

$$F(x_1;x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 2

$$F(x_1;x_2) = x_1 + 3x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 3

$$F(x_1;x_2) = x_1 + 3x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 4

$$F(x_1;x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 5

$$F(x_1; x_2) = 10x_1 + x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 6

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 7

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 4x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 8

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 8x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 9

$$F(x_1;x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 10

$$F(x_1;x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 11

$$F(x_1;x_2) = 6x_1 + x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Варіант 12

$$F(x_1;x_2) = x_1 + 7x_2$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

2. Підприємство випускає продукцію двох видів P_1 і P_2. Запаси сировини і норми витрати сировини на умовну одиницю продукції кожного виду подані в таблиці. Прибуток від реалізації одиниці продукціїP_1 складає $_1$ тис. грн, а від реалізації одиниці продукції P_2 - C_2 тис.грн. Як потрібно спланувати випуск продукції, щоб прибуток був максимальний?

Вар. №	Вид сировини	Запас сировини	Витрати на од. продукції P1	Витрати на од. продукції P2	C_1	C_2
1	1 2 3 4	19 13 15 18	2 2 0 3	3 1 3 0	7	1
2	1 2 3 4	5 8 3 4	1 2 0 1	2 1 1 0	1	3
3	1 2 3 4	8 10 3 7	1 3 0 1	2 1 1 0	1	2
4	1 2 3	100 80 150	2 1 0	1 1 2	1	4
5	1 2 3	25 9 22	1 1 3	5 1 2	3	1
6	1 2 3	12 9 20	2 1 1	2 1 4	2	3
7	1 2 3	21 18 24	2 1 5	3 3 2	3	4
8	1 2 3	16 7 12	1 1 2	4 1 1	2	5
9	1 2 3	12 8 10	1 1 2	3 1 2	2	6

10	1 2 3	40 50 32	2 1 1	2 2 0	4	1
11	1 2 3 4	60 42 35 40	2 4 1 1	3 1 3 1	8	3
12	1 2 3	28 20 32	2 4 1	3 1 2	7	1

Контрольні запитання

1. Дайте означення задачі лінійного програмування.
2. Яка форма запису задачі лінійного програмування називається канонічною? Сформулюйте правило переходу від стандартної до канонічної форми запису задачі лінійного програмування.
3. Сформулюйте суть симплексного методу розв’язування задач лінійного програмування.
4. Сформулюйте критерій оптимальності розв’язку задачі лінійного програмування.
5. Сформулюйте правило переходу від одного базису до іншого при розв’язуванні задач лінійного програмування симплексним методом.

Лабораторна робота № 4
Двоїста задача лінійного програмування

Мета: Навчитися будувати двоїсту задачу лінійного програмування та та знаходити її розв'язок за допомогою теорем двоїстості

Теоретичні відомості

Будь-яка задача лінійного програмування тісно пов'язана з іншою лінійною задачею, яку називають двоїстою задачею. Кожну із пари взаємодвоїстих задач можна розглядати як самостійну задачу лінійного програмування і розв'язувати незалежно від іншої. Однак зв'язок між взаємодвоїстими задачами полягає, зокрема, і в тому, що розв'язок двоїстої задачі може бути отриманий із розв'язку прямої за допомогою теорем двоїстості.

Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі лінійного програмування називають двоїстими оцінками (об'єктивно обумовленими оцінками).

Розглянемо правила побудови двоїстої задачі. Нехай пряма задача записана в стандартній формі.

1. Якщо пряма задача лінійного програмування сформулювана як задача на знаходження максимуму цільової функції, а всі обмеження записані за допомогою знака "$\leq$", то двоїсту задачу формулюють як задачу на знаходження мінімуму цільової фунції, а обмеження записують за допомогою знака "$\geq$".

2. Число змінних двоїстої задачі дорівнює числу обмежень прямої, причому індекс змінної двоїстої задачі відповідає номеру обмеження; число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої.

3. Якщо A- матриця коефіцієнтів обмежень прямої задачі, то матриця коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі -A^T. Вільні члени в обмеженнях двоїстої задачі дорівнюють коефіцієнтам цільової функції прямої.

4. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі дорівнюють вільним членам обмежень прямої задачі.

5. Будь-якому обмеженню прямої задачі, записаному через знак $\leq$ відповідає умова невід'ємності змінної двоїстої задачі. Якщо обмеження прямої задачі записане як рівність, то обмеження невід'ємності знімається.

Таким чином, нехай пряма задача лінійного програмування записана у вигляді:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i; \quad i = 1;...m \tag{13}$$

$$x_j \geq 0 \tag{14}$$

Тоді двоїста задача записується у вигляді:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \geq c_j; \quad j = 1,...n \tag{16}$$

$$y_i \geq 0 \tag{17}$$

Знайти розв'язок двоїстої задачі лінійного програмування, знаючи розв'язок прямої, можна за допомогою теорем двоїстості.

Теорема 1

Якщо існує оптимальний розв'язок прямої задачі лінійного програмування $\mathbf{X}^*$, то існує також оптимальний розв'язок двоїстої задачі $\mathbf{Y}^*$, причому виконується рівнінсть $f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{g}(\mathbf{Y}^*)$.

Якщо цільова функція $f(\mathbf{X})$ прямої задачі лінійного програмування необмежена на області допустимих значень, то двоїста задача не має розв'язку.

Теорема 2

Для того, щоб допустимі розв'язки **X** та **Y** відповідно прямої та двоїстої задач лінійного програмування були оптимальними необхідно і достатньо виконання умов:

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \right) = 0$$

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j \right) = 0$$

Хід роботи

1. Розв'язати задачі 1-2 для самостійного виконання;

2. Відповідні обчислення провести в Excel;

Завдання для самостійного виконання

1. Розв'яжіть задачу лінійного програмування симплексним методом (або користуючись фунцією “Пошук розв'язків”). Побудуйте двоїсту задачу та знайдіть її розв'язок за допомогою першої та другої теорем двоїстості. Результати перевірте в Excel, користуючись фунцією ”Пошук розв'язків”.

Варіант 1

$$F(x_1;x_2) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0$$

Варіант 2

$$F(x_1;x_2) = 4x_1 + x_2 + 6x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 16 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0$$

Варіант 3

$$F(x_1;x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 20 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0$$

Варіант 4

$$F(x_1;x_2) = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 30 \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 \le 36 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 5

$$F(x_1;x_2) = 10x_1 + x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 48 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 6

$$F(x_1;x_2) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 36 \\ 2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 60 \\ 4x_2 + 5x_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 7

$$F(x_1;x_2) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 21 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 8

$$F(x_1;x_2) = 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 \leq 56 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 45 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 9

$$F(x_1;x_2) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 10

$$F(x_1;x_2) = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 39 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 11

$$F(x_1;x_2) = 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 42 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 40 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Варіант 12

$$F(x_1;x_2) = 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 \to \max$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 50 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 42 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

2. Підприємство випускає продукцію двох видів P_1 і P_2. Запаси сировини і норми витрати сировини на умовну одиницю продукції кожного виду подані в таблиці. Прибуток від реалізації одиниці продукції P_1 складає C_1 тис. грн, а від реалізації одиниці продукції P_2 - C_2 тис. грн. Крім того, виходячи із споживчих потреб, відомо, що випуск продукції P_i повинен бути не меншим, ніж α_i умовних одиниць. Як потрібно спланувати випуск продукції, щоб прибуток був максимальний?
Для отриманої задачі лінійного програмування побудуйте двоїсту задачу. Знайдіть двоїсті оцінки. Користуючись двоїстими оцінками, зробіть висновок щодо дефіцитності кожного виду сировини.

Вар. №	Вид сировини	Запас сировини	Витрати на од. продукції P1	Витрати на од. продукції P2	C_1	C_2	α_i
1	1 2 3	120 100 150	2 2 0	3 1 3	7	1	30 (i=2)
2	1 2	50 70	1 2	2 1	1	3	20 (i=1)
3	1 2	60 120	1 5	4 2	1	2	15 (i=1)
4	1 2 3	100 80 150	2 1 0	1 1 2	1	4	25 (i=1)
5	1 2 3	75 9 22	1 1 3	5 1 2	3	1	
6	1 2 3	120 80 120	2 1 1	5 1 4	2	3	30 (i=1)
7	1 2 3	30 27 40	2 1 5	3 3 2	3	4	6 (i=1)

8	1 2 3	160 50 120	1 1 2	4 1 1	2	5	40 (i=1)
9	1 2 3	60 80 100	1 2 2	3 1 5	2	6	25 (i=1)
10	1 2 3	40 50 32	2 1 1	2 2 0	4	1	25 (i=2)
11	1 2 4	60 80 40	2 4 1	3 1 1	8	3	30 (i=2)
12	1 2 3	480 200 320	2 4 1	3 1 2	7	1	80 (i=2)

Контрольні запитання

1. В чому полягає алгоритм побудови двоїстої задачі?
2. Сформулюйте першу теорему двоїстості.
3. Сформулюйте другу теорему двоїстості. В чому полягає економічний зміст другої теореми двоїстості?
4. Опишіть алгоритм знаходження розв'язку двоїстої задачі на основі другої теореми двоїстості.

Лабораторна робота № 5
Знаходження умовного екстремуму методом множників Лагранжа

Мета: Навчитись визначати умовний екстремум функції багатьох змінних методом мгожиків Лагранжа

Теоретичні відомості

Розглянемо задачу математичного програмування

$$f(x_1; x_2; ...x_n) \to \max \tag{18}$$

$$\phi_j(x_1; x_2; ...x_n) \le 0, \quad j = 1; ...m \tag{19}$$

Якщо цільова функція $f(x_1;x_2;...x_n)$, або хоча б одна з функцій $\phi(x_1;x_2;...x_n)$ нелінійні, то задача (18) - (19) є задачею нелінійного програмування. У випадку, коли обмеження задаються у вигляді рівностей

$$\phi_j(x_1; x_2; ...x_n) = 0, \quad j = 1; ...m \tag{20}$$

задача (18) - (19) полягає у знаходженні умовного екстремуму і може бути зведена до задачі відшукання глобального екстремуму. (Обмеження (20) у цьому випадку називають рівняннями зв'язку)

Побудуємо допоміжну функцію

$$L(x_1; x_2; ...x_n; \lambda_1; ...\lambda_m) = f(x_1; x_2; ...x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi_j(x_1; x_2; ...x_n) \tag{21}$$

Можна показати, що глобальний екстремум функції (4), яку ми далі будемо називати функцією Лагранжа, співпадає з шуканим умовним екстремумом.

Отже, досліджуємо на екстрмум функцію Лагранжа.

Як відомо, необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, 2, ..., n \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0; \quad j = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

Достатніми умовами екстремуму функції є знаковизначеність диференціалу другого порядку, $d^2L(x_1, ...x_n)$.

Хід роботи

1. Розв'язати задачі 1)-2) для самостійного виконання;

2. Відповідні обчислення провести в Excel;

Завдання для самостійного виконання

1. Користуючись методом множників Лагранжа, знайдіть умовний екстремум функції.

Варіант 1

$$a)\, f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6xy + 8x - 12$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 4x + y - 4 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = 2x - y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2 + y^2 = 4$$

Варіант 2

$$a)\, f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x + 6y - 4 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = 2x + 5y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 3x^2 + 2y^2 = 12$$

Варіант 3

$$a)\, f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6xy + 4x - 2y + 10$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x - 5y - 10 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = 2x + y + 1$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Варіант 4

$$a)\, f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 12xy + 2x - 12y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x + 3y - 9 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = 2x + 4y - 5$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 2x^2 + y^2 = 4$$

Варіант 5

$$a)\, f(x,y) = 6xy + 8x - 12y + 11$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 4x + 6y - 12 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = x + 5y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2 + y^2 = 5$$

Варіант 6

$$a)\, f(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy + 4x - 2y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 8x + y - 16 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = x + 6y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2 + 9y^2 = 18$$

Варіант 7

$$a)\, f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 8x - 12y + 3$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x - 10y + 5 = 0$$

$$b)\, f(x,y) = x + 8y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2+y^2=6$$

Варіант 8

$$a)\, f(x,y)=3x^2+y^2-6xy+6x-2y+12$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 4x+y-8=0$$

$$b)\, f(x,y)=3x+2y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2+4y^2=4$$

Варіант 9

$$a)\, f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+4x-y+2$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x-y-10=0$$

$$b)\, f(x,y)=12x+y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 8x^2+y^2=4$$

Варіант 10

$$a)\, f(x,y)=x^2-4y^2+2xy+4x-4y+12$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 6x-y-12=0$$

$$b)\, f(x,y)=3x+2y+10$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 9x^2+y^2=36$$

Варіант 11

$$a)\, f(x,y)=x^2+5y^2-4xy+2x-14$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 4x+6y+18=0$$

$$b)\, f(x,y)=12x+2y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 2x^2+y^2=16$$

Варіант 12

$$a)\, f(x,y)=x^2+4y^2-6xy+8x-12$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad 4x+y-4=0$$

$$b)\, f(x,y)=2x-y$$

Рівняння зв'язку:

$$\phi(x,y): \quad x^2+y^2=4$$

2. Підприємство випускає продукцію двох видів, яку може реалізувати по ринковим цінам p_1 і p_2 відповідно. $C(x,y)$ - функція затрат, де x, y - об'єми випуску продукції відповідно першого та другого видів. Потрібно спланувати випуск продукції так, щоб прибуток фірми був максимальним.

Вар. №	p_1	p_2	$C(x,y)$
1	5	10	$x^2+y^2-xy+2y$
2	7	3	$2x^2+y^2-0.5xy$
3	15	8	$x^2+1.5y^2-2xy+3x$
4	12	2	$0.3x^2+0.1y^2-2y$
5	6	4	$0.1x^2+0.2y^2$
6	2	3	$0.2x^2+0.3y^2-0.2xy$

3. Фірма може реалізувати свою продукцію на двох ринках. Затрати по реалізації x одиниць продукції на першому ринку складають $C_1(x)$, а по реалізації y одиниць продукії на другому - $C_2(y)$. Фірмі потрібно реалізувати M одиниць продукції. Як розподілити продукцію по ринкам збуту, щоб затрати фірми були мінімальними.

6	$C_1(x)=x^2+8x$	$C_2(y)=y^2$	$M=250$
7	$C_1(x)=x^2-2x$	$C_2(y)=y^2+2y$	$M=300$
8	$C_1(x)=0.1x^2$	$C_2(y)=0.2y^2$	$M=450$
9	$C_1(x)=x^2+4.5x$	$C_2(y)=y^2+0.5y$ 60	$M=400$
10	$C_1(x)=x^2$	$C_2(y)=y^2+4y$	$M=800$
11	$C_1(x)=0.2x^2-4x$	$C_2(y)=0.1y^2$	$M=900$
12	$C_1(x)=0.3x^2$	$C_2(y)=0.2y^2+0.1y$	$M=880$

Контрольні запитання

1. Дайте означення умовного екстремуму.
2. Що називається рівнянням зв'язку?
3. Сформулюйте правило побудови функції Лагранжа.
4. В чому суть методу множників Лагранжа?
5. Сформулюйте необхідні і достатні умови екстремуму функції багатьох змінних.

Рекомендована література

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2002.
2. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч.посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
3. Абчук В.А. Экономико-математические методы, С-П, “Союз”, 1999.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод.посібник для самост.вивч.дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
6. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели, М.: “ЮНИТИ”, 1995.
7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997. – 365 с.
8. Збірник задач з курсу “Математичне програмування”. Ч.2. /Укл.: С.І.Наконечний, В.В.Вітлінський та інш. – К.: КНЕУ, 1998. – 224 с.
9. Исследование операций в экономике (Под ред. Кремера). – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
10. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
11. Ястремский А.И. Стохастические модели математической экономики. – К., 1983.