

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

## **ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ**

### **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до практичних занять та самостійної роботи студентів усіх форм навчання  
галузі знань 07 – Управління та адміністрування,  
спеціальності 072 – «Фінанси, банківська справа та страхування»

Обговорено і рекомендовано  
на засіданні кафедри фінансово-  
економічної безпеки  
*Протокол № 4 від 5 листопада 2018 р.*

Чернігів - 2018

Оптимізаційні методи та моделі. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів усіх форм навчання галузі знань 07 – Управління та адміністрування, спеціальності 072 – «Фінанси, банківська справа та страхування» / Укл.: Садчикова І.В, Тарасенко А.В. – Чернігів: ЧНТУ, 2018. – 20 с.

Укладачі: Садчикова Ірина Володимирівна, кандидат економічних наук, доцент кафедри фінансово-економічної безпеки  
Тарасенко Артем Валерійович, кандидат економічних наук, доцент кафедри фінансово-економічної безпеки

Відповідальний за випуск: Лапінський Ігор Едуардович, завідувач кафедри Фінансово-економічної безпеки, кандидат економічних наук, доцент

Рецензент: Лавров Р.В., доктор економічних наук, доцент кафедри фінансів, банківської справи та страхування Чернігівського національного технологічного університету

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>4</b>
<b>1 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ.....</b>	<b>6</b>
<b>2 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ.....</b>	<b>9</b>
Тема 1 Теоретичні основи математичного моделювання економіки....	9
Тема 2 Оптимізаційні економіко-математичні моделі.....	9
Тема 3 Основи математичного апарату розв'язання оптимізаційних задач.....	9
Тема 4 Основні форми та властивості задач лінійного програмування.	10
Тема 5 Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	11
Тема 6 Транспортна задача.....	12
Тема 7 Цілочислові задачі лінійного програмування.....	14
Тема 8 Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем.....	15
Тема 9 Задачі динамічного програмування.....	18
Тема 10 Використання теорії ігор для розв'язування задач оптимізації.	18
<b>3 РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>19</b>

## ВСТУП

Метою вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» є формування у студентів базових математичних знань та інструментарію з побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають в ринкових умовах.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» є: ознайомлення з типовими оптимізаційними задачами, які виникають при управлінні економічними системами; вміння грамотно формулювати математичну постановку загальної задачі математичного програмування, а також транспортної задачі, задач цілочислового та динамічного програмування; вміння розв'язувати задачі математичного програмування; вміння використовувати комп'ютер для розв'язування оптимізаційних задач (з використанням MS Excel).

Мета даних методичних вказівок – надати студентам допомогу в кращому засвоєнні курсу «Оптимізаційні методи та моделі», поглибити теоретичні знання, що набуті під час прослуховування лекцій, сформулювати необхідні практичні навички з підготовки та обґрунтування рішень, пов'язаних з побудовою та розв'язком оптимізаційних задач за допомогою математичних методів.

У процесі викладання дисципліни надається така інформація:

- основні категорії, поняття, теореми та умови, необхідні при застосуванні оптимізаційних методів і моделей;
- теоретичні основи математичного моделювання і програмування;
- принципи та етапи процесу побудови економіко-математичних моделей;
- методи лінійного, нелінійного та динамічного програмування, основи теорії ігор;
- види оптимізаційних задач та їх економічна інтерпретація;
- методи та інструментарій побудови і розв'язування оптимізаційних задач.

У результаті вивчення курсу студенти повинні знати:

- правила побудови оптимізаційних задач та їх економічну інтерпретацію.
- методологію та інструментарій розв'язування оптимізаційних задач;
- програмне забезпечення MS Excel та його основні функції для розв'язання оптимізаційних задач на комп'ютері.

У результаті вивчення курсу студенти повинні вміти:

- формулювати економіко-математичні моделі;
- робити загальну постановку оптимізаційної задачі;
- з урахуванням виду цільової функції та обмежень підбирати відповідний метод розв'язування задачі;
- розв'язувати оптимізаційні задачі за допомогою математичних методів;
- аналізувати результати розв'язку задач для прийняття оптимальних рішень щодо підвищення ефективності виробництва в конкурентних ринкових умовах.

Практичні заняття з даного курсу спрямовані на закріплення студентами теоретичних знань, отриманих на лекційних заняттях та поглиблення цих знань у процесі самостійної роботи. Полегшити самостійну роботу студентів має наведений перелік рекомендованої літератури. Запропоновані контрольні запитання та завдання розрахункового характеру нададуть студентам необхідних практичних навичок з дисципліни.

## 1 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### ***Тема 1. Теоретичні основи математичного моделювання економіки***

Вступ. Предмет, завдання і зміст курсу.

Сутність моделювання як методу наукового пізнання. Основні поняття економіко-математичного моделювання. Особливості та принципи математичного моделювання. Особливості економічних спостережень і вимірів.

Етапи економіко-математичного моделювання. Елементи класифікації економіко-математичних моделей. Роль прикладних економіко-математичних досліджень.

### ***Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі***

Сутність, мета та класифікація оптимізаційних моделей. Загальна постановка оптимізаційної задачі. Критерій вибору як основна складова оптимізаційної задачі.

Цільова функція, її призначення та характеристика складових. Обмеження як спосіб опису множини допустимих планів. Основні проблеми пошуку точок екстремуму.

Приклади класичних екстремальних задач та підходів до їх математичного формулювання. Задача визначення оптимального плану виробництва. Задача про «дієту». Приклад транспортної задачі.

### ***Тема 3. Основи математичного апарату розв'язання оптимізаційних задач***

Ключові терміни та визначення з теорії лінійної алгебри та опуклих множин.

Матриці та їх використання у розв'язуванні оптимізаційних задач.

Визначники, їх властивості та порядок обчислення. Застосування визначників для розрахунку обернених матриць.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, їх види і геометрична інтерпретація.

Матричні методи розв'язання системи.

Робота з матрицями та визначниками у середовищі MS Excel.

Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою MS Excel.

### ***Тема 4. Основні форми та властивості задач лінійного програмування***

Загальна форма задачі лінійного програмування. Можливий, допустимий та оптимальний план задачі. Область допустимих значень задачі.

Стандартна форма задачі лінійного програмування. Канонічна форма задачі лінійного програмування. Заміна нерівностей рівняннями. Види запису задач лінійного програмування.

Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування. Опуклі множини та їх використання для графічного зображення області допустимих значень задачі лінійного програмування.

Призначення та загальна характеристика методів лінійного програмування.

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

### ***Тема 5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування***

Початковий опорний план. Перехід від одного опорного плану до іншого.

Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану. Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом. Метод штучного базису. Правила побудови двоїстих задач лінійного програмування та їх економічна інтерпретація. Основні теореми двоїстості. Двоїстий симплекс-метод.

Аналіз чутливості оптимального рішення з використанням MS Excel.

### ***Тема 6. Транспортна задача***

Постановка транспортної задачі та її математична модель. Методи побудови початкового опорного плану.

Алгоритм розв'язування транспортної задачі за методом потенціалів. Цикли перерахунку транспортної задачі. Перехід від одного опорного плану до іншого методом квадратів.

Методика розв'язування транспортної задачі за допомогою MS Excel.

Приклади економічних задач, що зводяться до задач транспортного типу. Модель формування штатного розкладу фірми. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів комерційного банку.

### ***Тема 7. Цілочислові задачі лінійного програмування***

Економічна та математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація розв'язків задачі на площині.

Методи розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Методи відтинання. Метод Гоморрі. Комбінаторні методи. Метод «гілок та меж».

Приклади цілочислових економічних задач. Модель формування оптимальної інвестиційної програми підприємства при заданому бюджеті.

### ***Тема 8. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем***

Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування. Геометрична інтерпретація задачі. Основні проблеми розв'язування задач нелінійного програмування.

Класичний метод оптимізації. Метод множників Лагранжа. Необхідні умови існування сідлової точки. Теорема Куна – Таккера. Опукле програмування.

Задачі дробово-лінійного програмування та особливості застосування симплекс-методу для їх розв'язання.

### ***Тема 9. Задачі динамічного програмування***

Математична постановка задачі динамічного програмування. Економічний зміст і геометрична інтерпретація. Вимоги до задачі динамічного

програмування. Принцип оптимальності Беллмана. Методи розв'язування задач динамічного програмування. Основні етапи побудови алгоритму розв'язування задачі динамічного програмування.

Приклад моделі оптимального розподілу капіталовкладень підприємства.

### ***Тема 10. Використання теорії ігор для розв'язування задач оптимізації***

Основні поняття та елементи теорії ігор. Класифікація ігор.

Гра двох гравців з нульовою сумою. Правила гри та ціна гри. Пара оптимальних стратегій для двох осіб. Платіжна матриця. Основна теорема теорії ігор. Принцип мінімаксу. Гра в чистих стратегіях. Поняття сідлової точки і її знаходження. Гра 2 на 2 в змішаних стратегіях. Алгоритм розв'язування задачі. Зведення гри двох осіб до задачі лінійного програмування.



## 2 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ

### Тема 1. Теоретичні основи математичного моделювання економіки

#### *Питання для перевірки знань*

1. Сутність моделювання як методу наукового пізнання.
2. Основні поняття економіко-математичного моделювання.
3. Особливості та принципи математичного моделювання.
4. Особливості економічних спостережень і вимірів.
5. Етапи економіко-математичного моделювання.

#### *Питання для обговорення*

1. Які економіко-математичні моделі вам відомі?
2. Які з елементів класифікації економіко-математичних моделей є найбільш важливими?
3. Яку роль, з вашої точки зору, відіграють прикладні економіко-математичні дослідження?

### Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі

#### *Питання для перевірки знань*

1. Сутність, мета та класифікація оптимізаційних моделей.
2. Загальна постановка оптимізаційної задачі.
3. Критерій вибору як основна складова оптимізаційної задачі.
4. Цільова функція, її призначення та характеристика складових.
5. Обмеження як спосіб опису множини допустимих планів.
6. Основні проблеми пошуку точок екстремуму.

#### *Задачі*

1. Навести приклади класичних екстремальних задач та пояснити можливі підходи до їх математичного формулювання.
2. Дати опис задачі визначення оптимального плану виробництва.
3. Охарактеризувати зміст задачі «про дієту» та транспортної задачі.

### Тема 3. Основи математичного апарату розв'язання оптимізаційних задач

#### *Питання для перевірки знань*

1. Ключові терміни та визначення з теорії лінійної алгебри та опуклих множин.
2. Матриці та їх використання у розв'язуванні оптимізаційних задач.
3. Визначники, їх властивості та порядок обчислення.
4. Застосування визначників для розрахунку обернених матриць.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, їх види і геометрична

інтерпретація.

6. Матричні методи розв'язання системи.

### Задачі

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$1.1 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$1.2 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$1.3 \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$1.4 \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$1.5 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 7x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$1.6 \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом повного виключення змінних (методом Гаусса):

$$2.1 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$2.2 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2.3 \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2.4 \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$2.5 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$2.6 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

$$2.7 \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -15 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2.8 \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

$$2.9 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

## Тема 4. Основні форми та властивості задач лінійного програмування

### Питання для перевірки знань

1. Загальна форма задачі лінійного програмування.
2. Область допустимих значень задачі.
3. Стандартна форма задачі лінійного програмування.
4. Канонічна форма задачі лінійного програмування.
5. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
6. Опуклі множини та їх використання для графічного зображення області допустимих значень ЗЛП.
7. Призначення та загальна характеристика методів лінійного програмування.

**Задачі**

1. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

1.1  $Z = x_1 - 2x_2$  (min)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0, \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.2  $Z = x_1 + 3x_2$  (max)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 - x_2 &\geq 0, \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.3  $Z = 3x_1 + 2x_2$  (min)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ x_1 + 4x_2 &\geq 4, \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.4  $Z = x_1 + x_2$  (max)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10, \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.5  $Z = 2x_1 + 4x_2$  (max)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 11, \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 0, \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.6  $Z = 2x_1 + 4x_2$  (min)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 11, \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 - 3x_2 &\leq 0, \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

**Тема 5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування*****Питання для перевірки знань***

1. Початковий опорний план ЗЛП.
2. Перехід від одного опорного плану до іншого.
3. Критерій оптимальності плану.
4. Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом.
5. Метод штучного базису.
6. Правила побудови двоїстих задач лінійного програмування та їх економічна інтерпретація.
7. Двоїстий симплекс-метод.

***Задачі***

1. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування, варіанти якої представлено в темі 4 (завдання 1.1–1.6).
2. Побудувати двоїсту задачу до даної ЗЛП, знайти розв'язок двоїстої задачі та дати економічну інтерпретацію отриманого розв'язку.
3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

<p>3.1</p> $F = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 100; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 90; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$	<p>3.2</p> $F = 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 40; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 180; \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 80; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$	<p>3.3</p> $F = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 60; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 150; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 80; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$
<p>3.4</p> $F = x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 80; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 120; \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$	<p>3.5</p> $F = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 100; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 210; \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 120; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$	<p>3.6</p> $F = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 140; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 150; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 120; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$

## Тема 6. Транспортна задача

### *Питання для перевірки знань*

1. Постановка транспортної задачі та її математична модель.
2. Методи побудови початкового опорного плану.
3. Алгоритм розв'язування транспортної задачі за методом потенціалів.
4. Цикли перерахунку транспортної задачі.
5. Метод переходу від одного опорного плану до іншого.

### *Задачі*

1. Побудувати початковий опорний план транспортної задачі методом північно-західного кута з перевіркою, що план є не виродженим:

Таблиця 6.1 – Вихідні дані для задачі 1

Постачальники (запаси)		Споживачі (потреби)			
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		5	7	2	4
$A_1$	6	4	1	2	3
$A_2$	4	2	3	1	5
$A_3$	8	5	3	2	4

2. Побудувати початковий опорний план транспортної задачі методом північно-західного кута з перевіркою плану на оптимальність:

Таблиця 6.2 – Вихідні дані для задачі 2

Постачальники (запаси)		Споживачі (потреби)			
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		6	4	8	8
$A_1$	10	3	2	5	1
$A_2$	7	4	1	3	2
$A_3$	9	1	2	4	3

3. Побудувати початковий опорний план транспортної задачі методом найменшої вартості з перевіркою, що план є не виродженим:

Таблиця 6.3 – Вихідні дані для задачі 3

Постачальники (запаси)		Споживачі (потреби)			
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		5	5	3	4
$A_1$	6	4	3	1	2
$A_2$	3	2	4	3	1
$A_3$	8	1	4	3	2

4. Побудувати початковий опорний план транспортної задачі методом найменшої вартості з перевіркою плану на оптимальність:

Таблиця 6.4 – Вихідні дані для задачі 4

Постачальники (запаси)		Споживачі (потреби)			
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		3	6	7	3
$A_1$	6	2	5	4	3
$A_2$	3	1	4	2	3
$A_3$	10	3	3	4	1

5. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів:

Таблиця 6.5 – Вихідні дані для задачі 5

Постачальники (запаси)		Споживачі (потреби)			
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		5	4	6	7
$A_1$	5	3	4	2	1
$A_2$	10	2	5	1	4
$A_3$	7	2	2	3	4

## Тема 7. Цілочислові задачі лінійного програмування

### Питання для перевірки знань

1. Економічна та математична постановка цілочислової ЗЛП.
2. Методи розв'язування цілочислових ЗЛП.
3. Методи відтинання та метод Гоморрі.
4. Комбінаторні методи.
5. Метод «гілок та меж».

### Задачі

1. Навести приклади цілочислових економічних задач.
2. Представити модель формування оптимальної інвестиційної програми підприємства при заданому бюджеті.
3. Знайти оптимальний розв'язок задачі цілочислового лінійного програмування:

3.1.

$$F = 6x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.2.

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.3.

$$F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.4.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.5.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.6.

$$F = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.7.

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.8.

$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}$$

3.9.

$$F = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цїлі}$$

3.10.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{цїлі}$$

## Тема 8. Нелїнійні оптимізаційні моделї економічних систем

### Питання для перевірки знань

1. Економічна і математична постановка задачі нелїнійного програмування.
2. Геометрична інтерпретація задачі НП.
3. Метод множників Лагранжа.
4. Задачі дробово-лінійного програмування.

### Задачі

1. Навести основні проблеми розв'язування задач НП.
2. Розкрити особливості застосування симплекс-методу для розв'язання ЗНП.
3. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування:

3.1.

$$F = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.2.

$$F = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.3.

$$F = \frac{5x_1 - 3x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.4.

$$F = \frac{3x_1 - x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.5.

$$F = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.6.

$$F = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.7.

$$F = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.8.

$$F = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.9.

$$F = \frac{2x_1 - x_2 - 3}{x_1 + 2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.10.

$$F = \frac{x_1 + 3x_2}{2 + x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму функції:

4.1.

$$F = 2x_1^2 + x_2^2,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

4.2.

$$F = x_1^2 - x_2^2,$$

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

4.3.

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

4.4.

$$F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$$

$$x_1 + 3x_2 = 6$$

4.5.

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

4.6.

$$F = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

4.7.

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

4.8.

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

4.9.

$$F = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

4.10.

$$F = x_2 - x_1 - 2x_1^2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$



## 5. Розв'язати задачу нелінійного програмування графічним методом:

5.1.

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.3.

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.5.

$$F = x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.7.

$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

5.9.

$$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 4 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.2.

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.4.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ x_1x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.6.

$$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.8.

$$F = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5.10.

$$F = 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## Тема 9. Задачі динамічного програмування

### *Питання для перевірки знань*

1. Математична постановка задачі динамічного програмування.
2. Економічний зміст і геометрична інтерпретація задачі ДП.
3. Методи розв'язування задач динамічного програмування.
4. Основні етапи побудови алгоритму розв'язування задачі ДП.

### *Задачі*

1. Розкрити сутність та зміст принципу оптимальності Беллмана.
2. Навести приклад моделі оптимального розподілу капіталовкладень підприємства.

## Тема 10. Використання теорії ігор для розв'язування задач оптимізації

### *Питання для перевірки знань*

1. Основні поняття теорії ігор.
2. Сутність матричної гри двох осіб.
3. Гра зі змішаними стратегіями.
4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

### *Задачі*

1. Які правила гри та оптимальні стратегії для двох осіб вам відомі?
2. Розкрити зміст платіжної матриці та принцип мінімаксу.
3. Дати опис гри в чистих стратегіях та в змішаних стратегіях.
4. Дві конкуруючі фірми (гравці) реалізують на ринку продукцію, котра швидко псується. Кожний з гравців прагне зайняти по два сегмента ринку (має дві стратегії). Відомі прибуток (виграш) або збиток (програш) для кожного гравця і кожного сегмента ринку, які наведені в платіжній матриці  $C$ . Розв'язати гру, знайти пару оптимальних стратегій і ціну гри:

$$4.1. C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4.2. C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4.3. C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4.4. C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3 РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бех О.В. Математичне програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А.Городня, А.Ф.Щербак. – Львів: «Магнолія 2006», 2007. – 200 с.
2. Бех О.В. Збірник задач з математичного програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А.Городня, А.Ф.Щербак. – Львів: «Магнолія 2006», 2007. – 200 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: ВЦ «Академія», 1998. – 272 с.
4. Вітлінський В. В., Наконечний С.І., Шарапов О.Д. та ін. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник/ За заг.ред. В.В.Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2008. – 536 с.
5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
6. Глушик М. М. Математичне програмування: Навчальний посібник / М.М. Глушик, І.М.Копич, О.С.Пенцак, В.М.Сороківський . – Львів: «Новий світ-2000», 2005. – 216 с.
7. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник.– К.: Либідь, 2007. – 720 с.
8. Дякон В.М. Математичне програмування: Навчальний посібник / В.М.Дякон, Л.Е. Ковальов. За ред. В.М. Михайленка.– К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2004. – 500 с.
9. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
10. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко, А.В. Сігал, Я.С. Наконечний; За ред. В.В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
11. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997. – 365 с.
12. Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Ч.2. /Укл.: С.І.Наконечний, В.В.Вітлінський та інш. – К.: КНЕУ, 1998. – 224 с.
13. Івченко І.Ю. Математичне програмування: Навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.
14. Катренко А.В. Дослідження операцій: Підручник. – Львів: «Магнолія Плюс», 2004. – 549 с.
15. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007 – 256 с.
16. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб.: ВHV, 1997. – 384 с.
17. Кучма М.І. Математичне програмування: приклади і задачі: Навчальний посібник. – Львів: «Новий світ-2000», 2006. – 342 с.
18. Леснікова І.Ю. Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць Excel. – К.: ЦУЛ, 2007. – 186 с.

19. Мазаракі А.А., Толбатов Ю.А. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.
20. Минюк С.А. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие / Минюк С.А., Ровба Е.А., Кузьмич К.К. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
21. Наконечний С.І. Математичне програмування: Навчальний посібник / Наконечний С.І., Савіна С.С. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
22. Самойленко М.І. Математичне програмування: Навч. посібник. – Харків: Основа, 2001. – 424 с.
23. Охріменко М.Г. Дослідження операцій: Навч. посіб. / М.Г. Охріменко, І.Ю. Дзюбан. – К.: ЦУЛ, 2006. – 182 с.
24. Ульянченко О.В. Методи оптимізації в економіці: Навчальний посібник. – Харк. держ. аграр. ун-т ім. В.В. Докучаєва. – Харків, 2001. – 139 с.
25. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів. – Харк. держ. аграр. ун-т ім. В.В. Докучаєва. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.
26. Христиановский В.В., Щербина В.П. Экономико-математические методы и модели: теория и практика: Учебное пособие. – Донецк, 2010. – ДонНУ. – 335 с.
27. Hands, D. W., Introductory Mathmatical Economics, Second Edition, Oxford Univ. Press, 2004.
28. Hess, Peter, Using Mathematics in Economic Analysis, Prentice-Hall, 2002.
29. Klein, M. W.: Mathematical methods for economics. McGraw-Hill, 2009.
30. G. Cornuejols and R. Tutuncu, Optimization Methods in Finance, Cambridge University Press, 2007.