МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ „Вища математика”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено
на засіданні кафедри вищої і прикладної математики,
протокол №4 від 23.11. 2018 р.

Чернігів ЧДТУ 2018

Випадкові події. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей./ Укл.:Казнадій С.П., Мурашковська В.П.. — Чернігів: ЧДТУ, 2018. — 61с.

Укладачі: Казнадій Світлана Петрівна, старший викладач
Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Теорія ймовірностей широко застосовується, як в прикладній математиці, так і в різних інженерних дисциплінах. Вона висвітлює базові відомості про властивості процесів, які мають випадковий характер, і способи кількісного оцінювання міри випадковості їх виникнення – ймовірності.

Мета цих методичних вказівок – надати студентам теоретичну та практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу "Випадкові події " з дисципліни "Вища математика". Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, необхідний для самостійного виконання студентами індивідуальних домашніх завдань. Наведені приклади розв'язання основних стандартних задач.

В розділі "Завдання до самостійної роботи " наведено 30 варіантів індивідуальних завдань. Завдання охоплюють в цілому матеріал розділу, який в тому чи іншому обсязі вивчається студентами.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно-тестових робіт.

Частина 1
КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей. Елементи комбінаторики

Предмет теорії ймовірностей

Математична наука, що вивчає закономірності масових подій, називається *теорією ймовірностей* . Теорія ймовірностей досліджує певний вид математичних моделей – моделі випадкових подій. Будь-яка випадкова подія відбувається або не відбувається при виконанні деякої сукупності (комплексу) умов S.

Події поділяються на достовірні, неможливі та випадкові.

Достовірною подією називається подія, яка при виконанні певного комплексу умов обов'язково відбудеться.

Неможливою подією називається подія, яка в разі виконання певного комплексу умов не може відбутися.

Випадковою називається подія, яка в разі виконання певного комплексу умов може або відбутися, або не відбутися.

Передбачити появу чи не появу певної випадкової події наступного разу, спираючись на одноразове спостереження чи випробування, неможливо, і на перший погляд здається, що жодних закономірностей бути не може. Проте це не правильно. На основі багаторазових спостережень за випадковими подіями був виявлений новий тип закономірностей , які називаються ймовірнісними, або стохастичними.

Стохастичними називаються випробування, результати яких не можна наперед передбачити.

Таким чином, *предметом теорії ймовірностей* є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

Простір елементарних подій

Для математичного опису випадкових подій – наслідків експерименту – застосовують такі точні поняття: прості(елементарні), складені випадкові події та простір елементарних подій.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається *простою* (елементарною) випадковою подією.

Випадкова подія називається *складеною*, якщо її можна розкласти на прості події.

Множина всіх елементарних випадкових подіїї називається *простором елементарних подіїї*. Його позначають буквою Ω , елементарні події цього простору – буквами ω_1. ω_2, …. ω_n ,… .

Простір елементарних подій є математичною моделлю експерименту. Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним. Якщо множина є зчисленною, тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати то простір називається *дискретним*, Він може бути обмеженим і необмеженим. У противному разі (тобто коли кожній елементарної події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число) простір елементарних події називають *неперервним*.

Основні види випадкових подій. Операції над подіями

Події A і B називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому самому випробуванні.

Приклад. Із ящика, де знаходяться стандартні і нестандартні деталі, дістали одну деталь. Поява «стандартної деталі» - подія A виключає появу «нестандартної деталі» - подія B. Отже, події A і B – несумісні.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *попарно несумісними*, якщо жодні дві з них не можуть відбутися разом.

Події A і B називаються *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи іншої.

Приклад. Подія A – поява на грані шести очок при підкиданні гральної кості і подія B – поява на грані парної кількості очок – сумісні випадкові події.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *рівноможливими*, якщо в разі виконання певного комплексу умов S у кожної з них існує однакова можливість відбутися або не відбутися.

Приклад. Події $A_1, A_2, ..., A_6$ при підкиданні шестигранної гральної кості обов'язково з'явиться одна із цифр. Події A_1 і A_2– рівноможливі.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо вони попарно несумісні та їх сума збігається з усім простором елементарних подій Ω.

Події $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається.

Приклад. Подія A – «випадання герба» є протилежною до події $\overline{A}$ - «випадання цифри». Ці дві події A і $\overline{A}$ є несумісними.

Сумою двох подій A і B називається така подія $C = A \cup B$ ($C=A+B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Операція $A \cup B$ називається *об'єднанням* цих подій.

Добутком двох подій A і B називається така подія $C = A \cap B$ ($C=AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B. Операція $A \cap B$ називається *перерізом* цих подій.

Різницею двох подій A і B називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A-B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події A і одночасним ненастанням події B.

Предмет комбінаторики. Основні формули комбінаторики.

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає розташування та вибір об'єктів за певними правилами, а також числові характеристики цих об'єктів будь-якої природи, підпорядковані певним умовам.

У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів. Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані. Множину називають *упорядкованою*, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів. У противному разі множину називають *невпорядкованою*.

Переставленням із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

де n набуває лише цілих невід'ємних значень. Отже, $0!=1$.

Приклад. Задано множину цілих чисел $\Omega=\{2,5,7\}$. Скільки тризначних цілих чисел можна утворити?

Розв'язання. $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Розміщенням із n елементів по m ($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$A^m_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Приклад. Скільки тризначних цілих чисел можна утворити із чисел $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Розв'язання. $A^3_9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Комбінаціями із n елементів по m ($0 \le m \le n$) називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$C^m_n = \frac{A^m_n}{P_m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Приклад. Скількома способами можна вибрати дві деталі з ящика, в якому міститься 8 деталей?

Розв'язання. $C^2_8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$.

1.2 Класичне, геометричне і статистичне означення ймовірностей

Класичне означення ймовірності

Ймовірність події – це числова характеристика ступеня об'єктивної можливості появи події.

Імовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

З означення ймовірності випливають такі її властивості:

1) ймовірність достовірної події рівна одиниці. $P(\Omega)=1$.

2) ймовірність неможливої події дорівнює нулю. $P(\varnothing)=0$.

3) ймовірність випадкової події – додатне число, що знаходиться між нулем і одиницею. $0 < P(A) < 1$.

Отже, ймовірність будь-якої події задовольняє подвійну нерівність:

$$\mathbf{0 \le P(A) \le 1}.$$

<u>Приклад.</u> У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта – стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: n=15. Нехай A – подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти (m=9). Тоді ймовірність події А буде:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

Геометрична ймовірність

Класичне означення ймовірності придатне лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних подій, тобто коли множина Ω (простір елементарних подій) обмежена.

Якщо множина Ω є неперервною і , то для обчислення ймовірності A використовується геометрична ймовірність.

Геометрична ймовірність події A дорівнює відношенню міри g до міри G, тобто

$$P(A)=\frac{mes\ g}{mes\ G},$$

де $mes\ g$ і $mes\ G$ - міри (довжини, площі, об'єми) областей g і G.

<u>Приклад.</u> В середині еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ розміщене коло $x^2 + y^2 = 9$.Знайти ймовірність потрапляння точки в кільце, обмежене еліпсом і колом.

Розв'язання. Нехай подія A – потрапляння точки в кільце (рисунок 1)

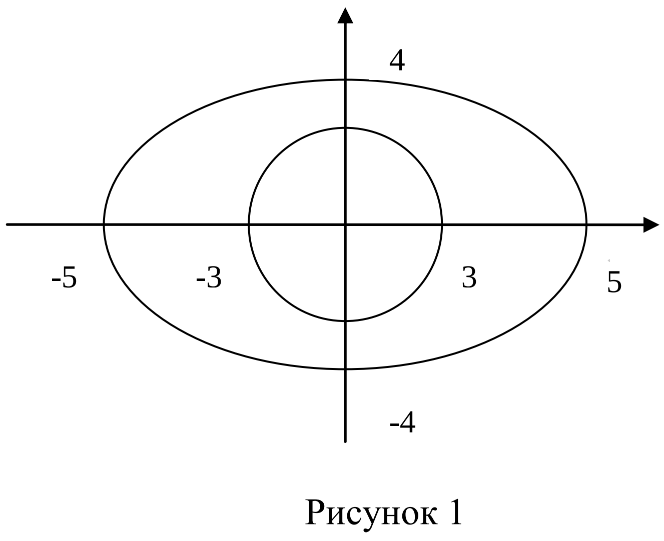

Рисунок 1

Скористаємося формулою: $P(A)=\frac{S_{кільця}}{S_{еліпса}}$.

$S_{кільця} = S_{еліпса} – S_{кола} = \pi ав – \pi r^2 = \pi\cdot4\cdot5 - \pi\cdot9 = 20\pi - 9\pi = 11\pi$.

У формулі a=5, $в$=4 – півосі еліпса, r = 3 – радіус кола. Таким чином, $P(A)=\frac{11\pi}{20\pi}$=0,55.

Статистична ймовірність

На практиці обчислити ймовірності випадкових подій можна лише для обмеженого класу задач як для дискретний, так і для неперервних просторів елементарних подій (множини Ω). Для більшості задач, особливо економічних, обчислити ймовірності практично не можливо. У цьому разі використовується статистична ймовірність. Для цього введемо поняття відносної частоти випадкової події $W(A)$.

Відносною частотою випадкової події A називається відношення кількості експериментів m, при яких подія A відбулася, до загальної кількості n проведених експериментів:

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

Як і для ймовірності випадкової події, для відносної частоти виконується нерівність $0\leq W(A)\leq 1$.

Ймовірність P(A) є теоретичною величиною, яка обчислюється до проведення експерименту, а відносна частота $W(A)$ – величина емпірична, яка обчислюється експериментально за результатами випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі випадкові події, в яких спостерігається стабільність відносних частот, а сааме: у разі проведення серій випробувань існує таке стале число $P(A)$, навколо якого групуватимуться відносні частоти $W(A)$ випадкової події A. Це групування до $P(A)$ буде тим ближчим, чим більшою буде кількість випробувань.

Статистичною ймовірністю події A називається число, навколо якого групуються відносні частоти цієї події або сама відносна частота:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} W_n(A).$$

1.3 Теореми додавання та множення ймовірностей

Теореми додавання ймовірностей для сумісних та несумісних події

Теорема. Якщо випадкові події A і B несумісні, то ймовірність появи однієї з них дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A) + P(B).$$

Наслідок. Ймовірність появи хоча б однієї з попарно несумісних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1+ A_2+\ldots+ A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots+ P(A_n).$$

Приклад. Садівник восени посадив 10 саджанців яблуні. Кожний із саджанців може прийнятись або не прийнятись із певною ймовірністю. Яка ймовірність того, що з 10 саджанців навесні наступного року приймуться 6 або 2?

Розв'язання. Множина Ω містить $n = 2^{10}$ елементарних подій. Нехай А – випадкова подія, яка полягає в тому, що число саджанців, котрі проросли, дорівнює 6; В – число саджанців, що проросли, дорівнює 2.

Кількість елементарних подій, які сприяють появі події A: $m_1 = C^6_{10} = 210$.

Кількість елементарних подій, які сприяють появі події B: $m_2 = C^2_{10} = 45$.

Оскільки A і B несумісні події, маємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{210}{2^{10}} + \frac{45}{2^{10}} = \frac{255}{2^{10}}.$$

Теорема. Сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок. Сума ймовірностей протилежних подій А і $\overline{A}$ дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема. Ймовірність суми двох сумісних подій рівна сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх суміщення:

$$P(A+B)=P(A) + P(B) – P(AB).$$

Наслідок. Формула додавання для n сумісних подій має такий вигляд:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i-1}^{n} P(A_i \bigcap A_j) + \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i-1}^{n-1}\sum_{k=j-1}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

<u>Приклад.</u> В урні містяться 30 однакових кульок, які пронумеровані від 1 до 30. Навмання із урни беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться кратним 3 або 5?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω n=30.

Позначимо через A= {3,6,9,12,15,18,21,24,27,30} (m_1 =10) – появу кульки із номером, кратним 3, а через B= {5,10,15,20,25,30} (m_2 =6) – появу кульки із номером, кратним 5. $A \cap B$ ={15,30} (m_3 =2) є подіями сумісними.

Згідно з теоремою: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{14}{30}$.

Залежні та незалежні випадкові події.

Умовна ймовірність та її властивості

Випадкові події A і B називають *залежними,* якщо поява однієї з них впливає на ймовірність появи іншої.

Подія A називається *незалежною* від події B, якщо ймовірність появи події A не залежить від появи чи не появи події B.

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$.

Аналогічно ймовірністю P(B/A) або $P_B(A)$ називається ймовірність події B за умови, що подія A відбулася і обчислюється так: P(B/A) = $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, P($A$)$\neq 0$.

Умовна ймовірність має такі властивості:

1. P(A/B) = $P_A(B)$ = 0, якщо A = Ø.
2. P(A/B) = $P_A(B)$ = 1, якщо A = B.
3. У решті випадків 0<P(A/B) < 1.

Приклад. Задана множина цілих чисел: Ω = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A – поява числа кратного 3, B – кратного 2. Тоді A={3,6,9,12}, m_1=4; B={2,4,6,8,10,12}, m_2=6; ($A\cap B$) ={6,12}, m_3 =2.

P(A) = $\dfrac{m_1}{n}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$; P($B$) = $\dfrac{m_2}{n}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$; P($A\cap B$)=$\dfrac{m3}{n}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$;

P(A/B) = $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/6}{1/2}=\dfrac{1}{3}$.

Оскільки P(A) $\neq$ P(A/B), то події A і B є залежними.

Теореми множення ймовірностей

Теорема. Ймовірність добутку двох подій A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність появи іншої події при умові, що попередня відбулася, тобто

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Аналогічно обчислюється ймовірність сумісної появи декількох подій і дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших за умови, що всі попередні події відбулися:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/(A_1\cdot A_2))\cdot\ldots\cdot P(A_n/(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})).$$

Приклад. Із множини чисел Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9} навмання беруть одне число, а далі з решти – друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?

Розв'язання. Позначимо через A_1 – поява непарної цифри при першому вийманні, через B_1 – поява парної цифри при першому, а через B_2 – появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай C – випадкова подія: поява парного двоцифрового числа. Тоді $C=(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)$. Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

P(C)=P($(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)$)=P($A_1\cap B_2$)+P($B_1\cap B_2$) = P($A_1$)·P($B_2/A_1$) + P($B_1$)·P($B_2/B_1$) $=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}+\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{32}{72}=\dfrac{4}{9}$.

Теорема. Ймовірність добутку незалежних подій A і B дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Аналогічно обчислюється ймовірність сумісної появи подій $A_1, A_2, ...,\cdot A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих події:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n).$$

Приклад. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Імовірність того, що перший складе екзамен дорівнює 0,9, для другого – 0,8, для третього – 0,7. Обчислити ймовірності таких подій: а) A- три студенти складуть екзамен; б)B – три студенти не складуть екзамен.

Розв'язання. Позначимо A_1, A_2, A_3 – випадкові події, які полягають у тому, що перший, другий і третій студенти складуть екзамен з математики. Тоді $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ - відповідно не складуть. За умовою задачі маємо: $P(A_1)=0{,}9$, $P(A_2)=0{,}8$, $P(A_3)=0{,}7$.

Тоді ймовірності протилежних подій такі: $P(\overline{A_1}) = 1- P(A_1)=1-0{,}9=0{,}1$, $P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2$, $P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-0{,}7=0{,}3$.

Оскільки випадкові події A_1, A_2, A_3 між собою незалежні, то

а) $P(A)= P(A_1)\ P(A_2)\ P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504$.

б) $P(B)= P(\overline{A_1})\ P(\overline{A_2})\ P(\overline{A_3})= 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}006$.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ...,\cdot A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює:

$P(A)=1- P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n})$, де $P(\overline{A_1}),P(\overline{A_2}),\ldots,P(\overline{A_n})$- ймовірність протилежних подій.

1.4 Повна ймовірність. Формула Байєса ймовірностей

Формула повної ймовірності

Нехай подія A може настати за умови появи однієї з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними

$$(H_i \cap H_j = \varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1, ,..,n;\ \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega)$$

Теорема. Ймовірність події A, яка може настати за умови появи однієї з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, що складають повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A.

Ймовірність події A обчислюється за формулою: $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)$, яка називається *формулою повної ймовірності*.

Випадкові події $H_1, H_2, ..., H_n$ називають *гіпотезами*.

Приклад. Нехай в урну з 7 кульками білого та 2 кульками чорного кольору, однаковими у всьому іншому, вкинули таку ж кульку. Після цього навмання вийняли одну кульку. Яка ймовірність того, що це кулька білого кольору?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що вийнята кулька білого кольору. Подія H_1 – вкинули в урну білу кульку, H_2 – вкинули в урну чорну кульку. Тоді, очевидно, $H_1+H_2 = \Omega$ (одна з подій H_1або H_2 відбулася). Отже, маємо умови, при яких справедлива формула повної ймовірності.

$P(A/ H_1)=\frac{8}{10}$, $P(A /H_2)=\frac{7}{10}$.

Будемо вважати події H_1, H_2 рівноможливими, тобто $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$.

Тому $P(A)=P(H_1)\cdot P(A/ H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}=\frac{3}{4}$.

Ймовірність гіпотез. Формула Байєса

Нехай ми знаходимось в умовах, коли справедлива формула повної ймовірності. Перед початком експерименту у нас є повні уявлення про ймовірності гіпотез. Але після того, як подія A відбулася, ці уявлення можна уточнити, тому, що появилася додаткова інформація. Формули, за якими здійснюються обчислення уточнених ймовірностей гіпотез, називаються *формулами ймовірності гіпотез* або *формулами Байєса*.

Теорема. Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – події, що складають повну групу. Тоді для будь-якої випадкової події A, що може настати лише за умови появи однієї з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, і такої, $P(A)\neq 0$, виконуються рівності:

$$P(H_i /A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

<u>Приклад.</u> Є три однакові ящики, що містять деталі, виготовлені токарем. У першому ящику – 2% нестандартних деталей, у другому – 3%, у третьому – 1%. Із довільно вибраного ящика одна навмання взята деталь виявилась нестандартною. Яка ймовірність того, що деталь дістали з першого ящика?

Розв’язання. Подія A – вилучена деталь нестандартна. Можливі такі гіпотези: H_1 – деталь дістали з першого ящика; H_2 – деталь дістали з другого ящика; H_3 – деталь дістали з третього ящика. Ці гіпотези утворюють повну групу подій, оскільки вони рівноймовірні, то $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

За умовою ймовірність (дістали нестандартну деталь з кожного ящика) відповідно дорівнює: $P(A/H_1)=\frac{2\%}{100\%}=0{,}02$, $P(A/H_2)=\frac{3\%}{100\%}=0{,}03$, $P(A/H_3)=\frac{1\%}{100\%}=0{,}01$.

1.5 Повторні незалежні випробування

Формула Бернуллі

Якщо проводиться кілька випробувань, причому ймовірність настання події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються незалежними відносно події A.

Нехай відбувається n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може настати або не настати. Вважатимемо, що ймовірність «настання» події A в кожному випробуванні однакова, а саме рівна p. Ймовірність «ненастання» події A (протилежна подія $\overline{A}$) також постійна і рівна q=1-p.

Незалежні випробування, що повторюються багато разів, називаються *випробуваннями Бернуллі*, якщо у кожного з них є лише два можливі наслідки A і $\overline{A}$, а ймовірності p і q цих наслідків є сталими для всіх випробувань. Простір елементарних подій кожного окремого випробування Бернуллі складається з двох подій $\Omega=\{A,\ \overline{A}\}$, (A – «успіх», $\overline{A}$ - «невдача»). Простір елементарних подій n незалежних випробувань Бернуллі містить 2^n подій.

Основна задача для схеми Бернуллі така: обчислити ймовірність того, що в схемі Бернуллі при n експериментах подія A, яка нас цікавить, відбудеться k разів. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій буде рівна $p^k q^{n-k}$. Таких складних подій може бути стільки, скільки можна скласти комбінацій C^k_n з n елементів по k елементів, тобто $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.Оскільки ці складні події несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій шукана ймовірність дорівнює сумі ймовірностей всіх можливих складних подій.

Теорема. Ймовірність того, що у n випробуваннях Бернуллі, у кожному з яких імовірність настання події дорівнює p($0<p<1$), подія настане k разів і не настане n-k разів дорівнює:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \ .$$

Наслідок. Сума ймовірностей P_n (k) у n незалежних випробуваннях дорівнює одиниці, тобто $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$.

Приклад. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9.

Обчислити ймовірність того, що з п’яти електролампочок,увімкнених у електромережу не перегорять: 1) два; 2) не більше як дві; 3) не менш як дві.

Розв’язання. За умовою задачі маємо: p=0,9: q=0,1; n=5, k=2. Згідно з формулою Бернуллі дістанемо:

1)$P_5(2)$= $C_5^2 p^2 q^3 = \dfrac{5!}{2!\,3!}(0{,}9)^2\,(0{,}1)^3 = 10\cdot 0{,}81\cdot 0{,}001 = 0{,}0081$:

2)$P_5(0\le k\le 2)$= $C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 + C_5^2 p^2 q^3 = (0{,}1)^5 + 5\cdot 0{,}9\cdot(0{,}1)^4 + 10\cdot(0{,}9)^2\cdot(0{,}1)^3 =$ 0,00001+0,00045+0,0081=0,00856;

3)$P_5(2\le k\le 5)$= $\sum_{k=2}^{5} C_5^k p^k q^{5-k} = 1-\sum_{k=0}^{1} C_5^k p^k q^{5-k} = 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p^1 q^4 = 1 - (0{,}00001 + 0{,}00045) = 1 - 0{,}00046 = 0{,}99954$.

Найімовірніше число появи випадкової події

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ перевищує або в усякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Для визначення найімовірнішого числа появи події немає потреби обчислювати ймовірності для різних можливих значень k ($0 \le k \le n$), скористуємося теоремою.

Теорема. Якщо $(n+1)p$ – дробове число, то зі зміною k від нуля до n ймовірність $P_n(k)$ спочатку монотонно зростає, а потім монотонно спадає, досягаючи максимального значення при $k=k_0=[(n+1)p]$. Якщо $(n+1)p= k_0$ – ціле число, то $P_n(k_0-1)= P_n(k_0)$ і при $k > k_0$ спадає. Число k_0, що називається *найімовірнішою кількістю* «успіхів» або *модою* у випробування Бернуллі, задовольняє нерівність:

$$np-q \le k_0 \le np+p.$$

<u>Приклад.</u> Робітник обслуговує 10 верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат потребує уваги робітника в середньому становить 0,6. Знайти ; а)найімовірніше число верстатів, які потребують уваги робітника; б) обчислить ймовірність цього числа.

Розв’язання. $p=0{,}6$; $q=0{,}4$; $n=10$.

а)за формулою найбільш імовірного числа успіхів в схемі Бернуллі маємо:

$$10\cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 \le 10\cdot 0{,}6+0{,}6;$$

$$5{,}6 \le k_0 \le 6{,}6;$$

$$k_0=6.$$

б)$P_{10}(6)= C_{10}^{6} p^{6} q^{4} = \frac{10!}{6!\,4!}(0{,}6)^6\,(0{,}4)^4 =0{,}2508226.$

1.6 Граничні теореми випробувань Бернуллі. Найпростіший потік подій

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

При великих n та k обчислення по формулі Бернуллі громіздкі. Тому виникає необхідність в побудові асимптотичної формули, яка давала б можливість в таких випадках з достатньо високою точністю обчисляти ймовірності.

Теорема. Якщо у випробуваннях Бернуллі кількість випробувань $n \to \infty$, а ймовірність p появи події A в одному випробуванні мала ($p \to 0$), але $np=\lambda$, то ймовірність появи події A k разів у n випробуваннях визначається наближеною рівністю (формула Пуассона):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ або}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Наслідок. 1. Для обмежених значень k маємо:

$$\mathrm{P}_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

2. Функція $\mathrm{P}_n(k)$ визначається за таблицею (додаток А) за заданим k і обчисленим значенням $\lambda = np$.

<u>Приклад.</u> Імовірність того, що під час епідемії грипу мешканець міста захворіє становить у середньому 0,03%. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних 300 мешканців міста хворих на грип виявиться 5 осіб.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: p=0,003, n=300, k=5.

Обчислюємо значення параметра $\lambda = np. = 300 \cdot 0{,}003 = 0{,}9$.

Ймовірність визначаємотаблично: $\mathrm{P}_{300}(5) = 0{,}002001$.

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює р ($0<p<1$), то ймовірність того, що подія A настане у n незалежних випробуваннях k разів, наближено дорівнює значенню функції:

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{k}) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається функцією Гаусса,

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція Гаусса протабульована і її значення для $x \ge 0$ наведено в таблицях (додаток Б).

Властивості функції Гаусса:

1) функція визначена на всій числовій осі, тобто $x \in (-\infty; \infty)$;
2) $\varphi(x) > 0$;
3) $\varphi(x)$ є функцією парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
4) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$;
5) $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ - максимум функції Гаусса;

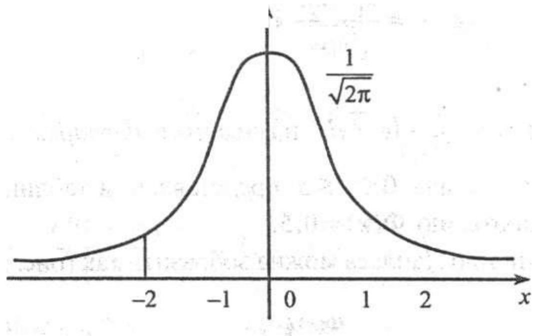

Рисунок 2

<u>Приклад.</u> На фруктовій базі 75% ящиків яблук вищого сорту. Навмання беруть 400 ящиків. Обчислити ймовірність того, що серед них яблук вищого сорту буде 320 ящиків.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: p=0,75, q=0,25, n=400, k=320.

Знайдемо x= $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{320-300}{8,7}=\frac{20}{8,7}=2,3.$

Із таблиці (додаток 2) вибираємо φ(2,3)=0,0283.

Відповідна ймовірність буде така : $P_{400}(320)=\frac{\varphi(2,3)}{8,7}=\frac{0,0283}{8,7}=0,0033.$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p ($0<p<1$), то для великих значень n ймовірність появи подія A від k_1 до k_2 раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_j)-\Phi(x_i),$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ називається функцією Лапласа,

де $x_j=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x_i=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$.

Функція Лапласа протабульована і її значення для $x \ge 0$ наведено в таблицях (додаток В).

Властивості функції Лапласа:

1)функція визначена на всій числовій осі, тобто $x \in (-\infty; \infty)$;
2) $-0,5 < \Phi(x) < 0,5$;
3) $\Phi(x)$ є функцією непарною: $\Phi(-x) = \Phi(x)$;
4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\Phi(x)=\pm\frac{1}{2}$;
5) $\Phi(0)=0$;
6) $\Phi(x)/_{x\ge 4}=0,5$, $\Phi(x)/_{x\le -4}=-0,5$.

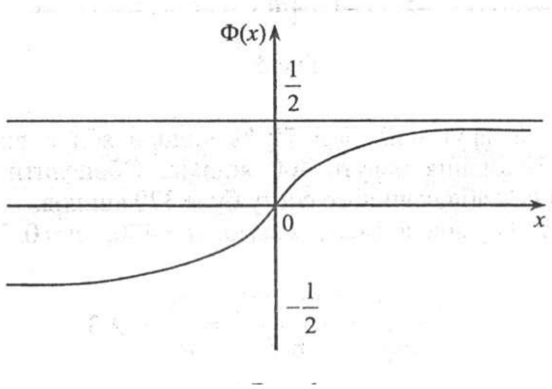

Рисунок 3

<u>Приклад.</u> Ймовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність у результаті перевірки книжки на 1000 сторінок виявити помилку не більш як на 5 сторінках?

Розв'язання. За умовою задачі маємо: p=0,001, q=0,999, n=1000, $0 \le k \le 5$.

Знайдемо $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{5-1000\cdot 0,001}{\sqrt{1000\cdot 0,001\cdot 0,999}}=\frac{4}{0,999}=4,001$;

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0-1000\cdot 0{,}001}{\sqrt{1000\cdot 0{,}001\cdot 0{,}999}}=\frac{-1}{0{,}999}=-1{,}001$$

Із таблиці (додаток 3) вибираємо $\Phi(x_2)=\Phi(4{,}001)=0{,}499468$,
$\Phi(x_1)=\Phi(-1{,}001)=-0{,}3413$.
Відповідна ймовірність буде така : $P_n(0\le k\le 5)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=0{,}4995-(-0{,}3413)=$ $=0{,}8408$.

Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності в незалежних випробуваннях

Нехай проводиться n незалежних експериментів, в кожному з яких імовірність настання події A стала і дорівнює p ($0<p<1$), а $W(A)=\frac{m}{n}$ - відносна частота появи цієї події в n експериментах Бернуллі. Необхідно оцінити ймовірність події $|W(A)-p|<\varepsilon$ того, що відхилення відносної частоти $W(A)$ від p не перевищує деякого як завгодно малого заданого числа $\varepsilon>0$. Згідно з інтегральною теоремою ймовірність буде:

$$P(|W(A)-p|<\varepsilon)=P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon<\frac{m-np}{n}<\varepsilon\right)=$$

$$P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отже,

$$P(|W(A)-p|<\varepsilon)=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Теорема. Якщо у кожному з n незалежних випробувань Бернуллі
події A настає з імовірністю p ($0<p<1$), то за досить великої кількості випробувань n з близькою до одиниці ймовірністю частота настання події A буде відрізнятися від її сталої ймовірності менше, ніж на як завгодно мале додатне число ε.

Цю теорему називають теоремою Бернуллі, що є найпростішою формою закону великих чисел. Вона доводить, що за великої кількості випробувань виконується наближена рівність $p=W(A)$.

<u>Приклад</u>. Імовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту, який має на меті виявити надійність виробу в роботі, дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Чому дорівнює ймовірність такої події: абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу із ладу виробів від імовірності $p=0{,}2$ становить $\varepsilon=0{,}01$?

Розв'язання. За умовою задачі: $n=400$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $\varepsilon=0{,}01$.

$$P(|W(A)-0{,}2|<0{,}01)=2\Phi\left(0{,}01\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=2\cdot\Phi(0{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383.$$

Найпростіший потік подій

Послідовність подій, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу, називається потоком подій. Прикладами можуть бути потік викликів медичної швидкої допомоги, потік викликів на телефонну станцію,потік покупців в магазині, потік відмов комп'ютерів обчислювальних комплексів и т.д.

Потік водій називається *регулярним*, якщо події настають одна за одною через певні, рівні проміжки часу.

Для розв'язання великої кількості прикладних задач часто буває достатнім застосувати математичні моделі однорідних потоків, що задовольняють умови стаціонарності, відсутності післядії й ординарності. Такі потоки подій називаються *найпростішими*, або *пуассонівськими.*

Потік подій називається с*таціонарним*, коли ймовірність того, що за проміжок часу ΔT відбудеться те чи інше число подій, залежить лише від довжини цього проміжку і не залежить від того, де міститься ΔT щодо початку відліку часу.

Потік подій називається *ординарним,* якщо ймовірність появи двох чи більше подій протягом елементарного інтервалу часу Δ t є величиною нескінченно малою порівняно з імовірністю появи однієї події впродовж цього інтервалу, тобто $\lim\limits_{\Delta t\to 0} p(n,\Delta t)=0$ при n=2,3,….

Потік подій називається потоком з *відсутністю післядії*, якщо для будь-яких інтервалів часу, що не перетинаються, кількість подій, що потрапили на один із них, не залежить від кількості подій, що потрапили на інший.

Для найпростішого потоку кількість п подій, що потрапили на довільний інтервал часу *t*, розподілено за законом Пуассона:

$$p(n,t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}, n=0,1,2,...,$$

де λ – інтенсивність потоку або частота появи подій.

Ймовірність того, що на інтервалі часу t не з'явиться жодної події, рівна:

$$p(0,t)=\cdot e^{-\lambda t}.$$

Ймовірність протилежної події, що характеризуватиметься законом розподілу скінченного інтервалу часу T між двома довільними суміжними подіями (n>0), буде

$$p(n,t)=p(T<t)=1-\cdot e^{-\lambda t},$$

де за означенням $p(T<t)=F(t)$- це функція розподілу ймовірності випадкової величини *T*. Звідси дістанемо щільність ймовірності випадкової величини, що є похідною функції розподілу $f(t)=\frac{dF}{dt}=\lambda\cdot e^{-\lambda t}$.

Приклад. Автомобілі, що рухаються по шосе в одному напрямку, утворюють найпростіший потік із параметром λ=3с$^{-1}$ (тобто, через умовною лінію, яка проведена перпендикулярно до шосе в певному місці, у середньому проїжджає 3 автомобілі за 1 с.) Обчислити ймовірність того, що за 2 *с* через умовну лінію проїде 5 автомобілів.

Розв'язання. Із умови задачі: $\lambda=3c^{-1}$, $\lambda t=3c^{-1}\cdot 2c=6$.

За таблицею(додаток 3), коли $a=\lambda t=6$ знаходимо $P_5(2)=0{,}160623$.

Частина 2
МЕТОДИЧНІ ВКАЗЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

2.1 Основні поняття теорії ймовірностей. Елементи комбінаторики

Теоретичні запитання до теми

1. Що називається неможливою подією? Навести приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Яка подія називається елементарною; складеною випадковою подією? Навести приклади.
4. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.
5. Сумою двох випадкових подій А і В називається…
6. Добутком двох випадкових подій А і В називається…
7. Різницею двох випадкових подїї А і В називається…
8. Перестановками із *n* елементів називається…
9. Розміщеннями із *n* елементів по *m* називається…
10. Комбінацією із *n* елементів по *m* називається…

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Тричі підкинуто монету. Опишіть події: подія А – герб випав хоча б 2 рази; В – в трьох підкиданнях випала одна цифра.

Розв'язання. За трьох відкидань монети можливі такі події: ГГГ, ЦЦЦ, ГГЦ, ГЦЦ, ГЦГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦГГ. Запишемо події А={ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ}, В={ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ}.

Приклад 2. Дослід – підкидання монети. Подія А- поява герба, подія В – поява цифри. Чи сумісні ці події?

Розв'язання. За означенням сумісних подій: події сумісна, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої, дані події не можуть відбуватися одночасно – за одного відкидання монети не може одночасно випасти цифра і герб, тому вони не сумісні.

Приклад 3. В якому разі $A\cup\bar{A}=A$, $A\cap\bar{A}=A$?

Приклад 4. Відомо, що $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$.Чому дорівнює $(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)(A\cap B)$?

Приклад 5. Нехай А=[-1; 1], В=(-∞; 0), С=[0; 2). Знайти такі множини: $A\cup C$, $A\cap B$, $A\cup B\cup C$, $(A\cup B)\cap C$, $B\cap C$ та зобразити їх на координатній прямій.

Приклад 6. Нехай А – множина дільників числа 15, в – множина простих чисел, менших за 10, С – множина парних чисел, менших за 9. Перелічіть елементи цих множин та знайдіть $A\cup B,\ A\cap C,\ B\cap C,\ A\cup B\cup C,\ (A\cup C)\cap B,\ A\cap B\cap C.$

Приклад 7.Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр: 1, 2, 3, 4, 5.

Відповідь: 120.

Приклад 8.Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр: 0, 1, 2, 3, 4.

Відповідь: 96.

Приклад 9. У філії банку працюють 15 працівників, троє з яких не мають потрібної кваліфікації. Скільки списків можна скласти: а) по 8 працівників; б) по 6 кваліфікованих працівників; в) по 9 працівників, двоє з яких не мають потрібної кваліфікації?

Відповідь: а) 6435; б) 924; в) 2376.

Приклад 10.Студенти першого курсу вивчають 12 дисциплін. В розклад занять кожний день включається по 3 предмета. Скількома способами можна скласти розклад занять на кожний день?

Відповідь: 1320.

Приклад 11. Скільки прямих можна провести через 8 точок, якщо відомо, що будь-яки три точки не належать одної прямий?

Відповідь: 28.

Приклад 12.Скількома способами можна роздати 6 різних книжок між 3 учнями, якщо кожний отримає дві книжки?

Відповідь: 90.

Приклад 13. У їдальні є 3 перші, 5 других і 2 треті справи. Скількома способами можна скласти з них обід?.

Відповідь: 30.

Приклад 14.Скількома способами можна присудити золоту, срібну, бронзову медалі на змаганнях, у яких братимуть участь 15 чоловік?

Відповідь: 2730.

2.2Класичне, геометричне і статистичне означення ймовірностей

Теоретичні запитання до теми

1. Ймовірністю випадкової події А називається … (За класичним означенням імовірності).
2. Властивості теорії ймовірностей.
3. Відомо, що A_i (i= 1,2,…,n) утворюють повну групу. Чому дорівнює $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$?
4. Відносною частотою випадкової події А називається …
5. Що називається геометричною ймовірністю?
6. Що таке статистична ймовірність?
7. Ймовірність випадкової події А дорівнює… (за геометричним означенням імовірності).

8. Чому дорівнює відносна частота достовірної події?

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Із річки, в якій плавало 40 щук, виловили 5, помітили їх і відпустили назад. На другий раз виловили 9 щук. Яка ймовірність того, що серед них попаде 2 помічені щуки?

Відповідь: 0,246.

Приклад 2. Числа 1,2, 3, 4, 5 написані на п'яти однакових картках. Навмання послідовно по одній вибирають три картки й розкладають їх у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому утвориться парне три цифрове число?

Відповідь: 0,4.

Приклад 3. В урні міститься 4 червоних, 5 синіх і 6 зелених кульок. Навмання із урни беруть три кульки. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору або всі три мати різні кольори?

Відповідь: 0,34.

Приклад 4.Студент забув останні три цифри потрібного телефону, але він пам'ятає, що всі три цифри: а) різні; б) можуть повторюватися,тому набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані цифри правильні.

Відповідь: а) $\frac{1}{720}$; б) 0,001.

Приклад 5. Колода з 36 карт розділена навмання на дві рівні частини. Яка ймовірність того, що кожна половина колоди буде одного кольору?

Відповідь: $1{,}1\cdot10^{-3}$.

Приклад 6. Два студенти домовилися зустрітися між 14 та 15 годинами. Той, хто прийде першим, чекає другого протягом 10 хв., після чого йде. Знайти ймовірність зустрічі цих студентів, якщо прихід кожного з них упродовж вказаного часу може відбутися в будь-який момент.

Відповідь: $\frac{11}{36}$.

Приклад 7.

Відповідь: 120

Приклад 8. В середину круга із радіусом R кинуто точку. Знайдіть ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного в круг: а) квадрата: б) правильного трикутника. Вважається, що ймовірність потрапляння точки в частину круга пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розташування відносно круга.

Відповідь: а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Приклад 9. Задано множину $\Omega = \{0\le x\le\pi,\ 0\le y\le 1\}$. Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа *x, y* утворять координати точки, яка належить області А= $\{0\le x\le\pi;\ 0\le y\le \sin^2 x\}$/

Відповідь: 0,5.

Приклад 10. Відділ технічного контролю серед 100 виробів виявив 8 нестандартних. Чому дорівнює відносна частота появи нестандартних виробів?

Відповідь: 0,08.

Приклад 11. Під час стрільби з гвинтівки по мішені відносна частота влучень дорівнює 0,85. Знайти кількість влучень, якщо було здійснено 20 пострілів.

Відповідь: 17.

Приклад 12. Англійський математик де Морган на початку XIX ст.. провів дослід з підкиданням монети. З 4092 підкидань герб випав 2048 разів. Обчислити статистичну ймовірність випадання герба.

Відповідь: $\approx 0,5$.

2.3 Теореми додавання та множення ймовірностей

Теоретичні запитання до теми

1. Випадкові події A і B називають залежним…
2. Чому дорівнює сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу?
3. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій A і $\overline{A}$?
4. Ймовірність суми двох сумісних подій рівна …
5. Подія *A* називається незалежною від події *B*, якщо …
6. Яка ймовірність випадкової події *A* називається умовною.
7. Формула для обчислення умовної ймовірності.
8. Чому дорівнює P(*A*/*B*), якщо A = Ø.
9. Чому дорівнює P(*A*/*B*), якщо A = B.
10. Формула множення ймовірностей для двох залежних подій має вигляд…

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Відомі P(A)=0,3, P($\overline{B}$)=0,6, P(A|B)=0,32.
Знайти: P(A$\cup$B), P(A$\cap$B), P(B|A), P(A$\cap\overline{B}$).

Відповідь: P(A$\cup$B)=0,572, P(A$\cap$B)=0,128, P(B|A)=0,427, P(A$\cap\overline{B}$)=0,172.

Приклад 2. Задано множину цілих одноцифрових чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Навмання береться одне число, а потім друге, при цьому перше не повертається. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: а) А – здобуте двоцифрове число виявиться непарним; б) В – здобуте двоцифрове число ділиться або на 5 або на 2.

Відповідь: а) $\frac{35}{72}$; б) $\frac{5}{9}$.

Приклад 3. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює p_1=0,9. Для другого і третього елементів ця ймовірність відповідно: p_2=0,8; p_3=0,7.

Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийде:а)A – три елементи; б) B- два елементи; в) C – один елемент; г) D – всі три елементи не вийдуть з ладу. З'ясувати, чи утворюють випадкові події A,B,C,D повну групу.

Відповідь:а) 0,006; б) 0,092; в) 0,398; г) 0,504.

Приклад 4. У деякому людському суспільстві 70% людей палять, 40% - хворіють на рак легенів, 25% - палять та мають рак легенів. Знайти ймовірність того, що навмання взята особа з цього суспільства: а) не палить, але має рак легенів: б) палить, але не має раку легенів: в) ніколи не палила і не має раку легенів: г) палить, або має рак легенів: д) або палить і не має раку легенів або не палить і має рак легенів.

Відповідь:а) 0,12; б)0,42; в) 0,18; г) 0,85; д) 0,54. .

Приклад 5. При вмиканні запалення мотор автомашини починає працювати із імовірністю p=0,9. Знайти ймовірності таких випадкових подій: а) A – мотор почне працювати при другому вмиканні запалення; б) для роботи мотора необхідно ввімкнути мотор не більше двох раз.

Відповідь: а) 0,09; б) 0,99.

Приклад 6. Три команди спортивного клубу *A* змагаються відповідно з трьома командами клубу *B*. Ймовірність перемоги першої, другої і третьої команд із клубу A у відповідних команд із клубу B рівна 0,7; 0,6; 0,4. Команди провели по одній зустрічі. Яка ймовірність того, що команди клубу A виграють: а) дві зустрічі; б) хоча б дві зустрічі; в) три зустрічі?

Відповідь: а) 0,436; б) 0,604; в) 0,168.

2.4 Повна ймовірність. Формула Байєса ймовірностей

Теоретичні запитання до теми

1. Записати повної ймовірності.
2. Які випадкові події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називаються гіпотезами?
3. Які властивості мають гіпотези у формулі повної ймовірності?
4. В якому разі використовується формула Байєса?
5.Чому дорівнює $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right)$, де H_i гіпотези у формулі повної ймовірності?

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Для пошуків апарату космічного корабля, який спускається, виділено 4 вертольотів першого типу і 6 вертольотів другого типу. Кожний вертоліт першого типу знаходить апарат в районі пошуку з ймовірністю 0.6, другого типу – з ймовірністю 0,7. а) Знайти ймовірність того, що навмання вибраний вертоліт знайде апарат. б) До якого типу ймовірніше всього належить вертоліт, що знайде апарат космічного корабля?

Відповідь: а) 0,66; б) до другого.

Приклад 2. Маємо три урни. У першій міститься 6 білих і 4 чорні кульки, у другій – 8 білих і 2 чорні та в третій – 1 біла і 1 – чорна. З першої урни навмання беруть 3 кульки, а з другої – 2 і перекладають у третю турну. Яка ймовірність після цього витягнути із третьої урни 1 білу кульку?

Відповідь: 0,63 .

Приклад 3. Є три партії деталей по 20 деталей в кожній. Кількість стандартних деталей в першій, другій та третій партіях відповідно рівна 20,15,10. З навмання обраної партії навмання беруть деталь, що виявилась стандартною. Деталь повертають в партію та вдруге навмання беруть деталь, яка теж є стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь взято з третьої партії.

Відповідь: $\frac{2}{9}$.

Приклад 4. Пасажир може звернутися за квитком в одну з трьох кас. Ймовірність звернення в кожну касу залежить від її місцезнаходження. Ці ймовірності співвідносяться як 1:7:2. Ймовірність того, що до моменту звернення в касі всі квитки будуть продані, дорівнює для першої каси - 0,2, для другої – 0,1, для третьої – 0,15. а) пасажир пішов в одну з кас і купив квиток;б) яка ймовірність, що він купив його в другій касі?

Відповідь: а) 0,86; б) 0,73.

Приклад 5. На заводі є 3 автоматичні лінії, що виготовляють однотипні деталі. Продуктивність першої лінії - 500, другої - 300 і третьої - 200 деталей за зміну. Браковані вироби серед деталей, виготовлених цими лініями, становлять відповідно 2%, 4%, 5%. Навмання взята деталь серед усіх деталей, виготовлених на цих лініях, виявилася бракованою. На якій лінії найімовірніше вона виготовлена?

Відповідь: На другий .

2.5 Повторні незалежні випробування

Теоретичні запитання до теми

1.Які експерименти називають експериментами за схемою Бернуллі?
2.Скількі подій містить простір елементарних подій n незалежних випробувань Бернуллі.
3.За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?
4.Запишіть формулу Бернуллі.
5. Чому дорівнює сума ймовірностей P_n (k) у n незалежних випробуваннях .
6.Що називають найімовірнішим числом (модою). скористуємося теоремою.
7. Запишіть формулу для визначення найімовірнішого числа.

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Під час тестування студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Імовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8.Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

Відповідь: 0,84208 .

Приклад 2.У кожному із семи ящиків міститься по 6 стандартних і 4 браковані деталі. Навмання з кожного ящика беруть по одній деталі. Обчислити ймовірність того, що серед семи взятих деталей стандартних буде: 1) 3; 2) не менш як 3; 3) не більш як 3.

Відповідь:1) 0,1935; 2) 0,9812; 3) 0,0963

Приклад 3. Імовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених деталей робітником хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа.

Відповідь:0,99976; k_0=5; $P_6(k_0)$=0,35596 .

Приклад 4. Посіяно 28 зернин ячменю з однією і тією самою ймовірністю проростання кожної з них. Знайти цю ймовірність, якщо найвірогідніше кількість позитивних результатів 17 і 18.

Відповідь: $\frac{18}{29}$.

Приклад 5. На складі є виробі двох сортів, причому виробів другого сорту в 1,5 разу більше, ніж виробів першого сорту. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів хоча б один першого сорту.

Відповідь: 0,784 .

Приклад 6. В яких межах має перебувати ймовірність появи випадкової події в одному експерименті, коли відомо, що в результаті проведення п=600 незалежних експериментів за схемою Бернуллі $к_0$=60?

Відповідь: $\frac{60}{601} \le p \le \frac{61}{601}$.

2.6 Граничні теореми випробувань Бернуллі. Найпростіший потік подій

Теоретичні запитання до теми

1. За якої умови використовується формула Пуассона?
2. Формула Пуассона має вигляд…
3. Чому дорівнює $\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
4.Сформулювати локальну теорему Муавра-Лапласа.

5. Функція $\varphi(x)$ називається …
6. Властивості функції Гаусса.
7.Сформулювати інтегральну теорему Муавра-Лапласа.
8. Чому дорівнює $P_n(k_1 \le k \le k_2)$.
9. Функція Ф(х) називається …
10. Чому дорівнює $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$?
11. Властивості функції Лапласа.
12.Чому дорівнює $P(|W(A)-p|<\varepsilon)$.
13. Що доводить теорема Бернуллі.
14. Який потік подій називається найпростішим.
15. Потік подій називається регулярним, якщо…
16. Потік подій називається *ординарним,* якщо…
17. Який потік називається потоком з відсутністю післядії.
18. Для найпростішого потоку кількість n подій, що потрапили на довільний інтервал часу t, розподілено за законом …? Де λ =… ?

Завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає дві розбитих пляшок.

Відповідь: 0,224 .

Приклад 2. Ймовірність настання події з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а)рівно 1478 разів; б) не менше 1470 і не більше 1500 разів; в) не більше 1469 разів.

Відповідь:а) 0,0153; б) 0,4236; в) 0,4801.

Приклад 3. Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. 1. Знайдіть ймовірність того, що зі 100 студентів на лекції будуть присутні:а) рівно 75; б) не менше 75 та не більше 90; в) не менше 75; г) не більше 74 студентів. 2. Зі скількох студентів має складатися потік, щоб з імовірністю 0,98 можна було б очікувати появу не менше 120 студентів?

Відповідь:1. а) 0,0456; б) 0,8882; в) 0,8944; г)0,1056. 2. 164.

Приклад 4. Імовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,999.

Відповідь: [0,804; 0,896] .

Приклад 5. У водойму випустили 100 помічених риб. Згодом із неї було виловлено 400 рибин, серед яких виявилося т5 мічених. Визначити з імовірністю 0,9 кількість рибин у цій водоймі.

Відповідь: 0,9.

Приклад 6. ЕОМ, що працює в реальному масштабі часу, обробляє інформацію, яка до неї надходить. Протягом 1 с на обробку надходять 4 умовні одиниці інформації. Беручи до уваги, що потік інформації є найпростішим, обчислити ймовірності таких подій: а) за 2 с на ЕОМ надійдуть 5 одиниць; б) від двох до шести одиниць.

Відповідь: а) 0,0916; б) 0,3134.

Частина 3
ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Вісім літаків, серед яких два Ту-154, випадковим чином ставляться в чергу на технічне обслуговування. Знайти ймовірність того, що між літаками Ту-154 виявиться три літаки інших типів.

2. Група студентів складається з 20 хлопців і 10 дівчат. На змагання відібрали групу з 5 студентів. Яка ймовірність того, що серед них 3 хлопці та 2 дівчини?.

3.Паркетну підлогу складено з прямокутних плиток з розмірами 6х24см. Визначити ймовірність того, що монета, яка впала на підлогу, повністю виявиться на одній плитці, якщо діаметр монети дорівнює 2см.

4. На кожному з трьох верстатів виготовлено по одній деталі. Ймовірність браку на першому верстаті дорівнює 0,05; на другому -0,07; на третьому - 0,1. Знайти ймовірність того, що серед виготовлених деталей тільки одна бракована.

5. Є два однакові ящики з кулями. У першому ящику 2 білі та 1 чорна куля, у другому - 1 біла та 4 чорні кулі. Навмання вибирають один ящик і виймають з нього кулю. Знайти ймовірність того, що витягнута куля буде білою.

6. 21 % яблук (у ящиках) надійшов у продаж з сховища №1, з них 90% ящиків стандартних, 35% -з сховища №2, з них 80% - стандартних; 29% - сховища №3, з них 70% - стандартних; 15% - і сховища №4, з них 80% - стандартних. При відкриванні навмання вибраного ящика яблука визнано стандартними. Визначити ймовірність того, що ці яблука надійшли з сховища №2.

7.За статистичними даними 30 % усіх затримок рейсів авіакомпанії відбувається з вини служби перевезень. Протягом тижня з різких причин із затримкою було виконано 12 рейсів. Знайти найбільш імовірне число рейсів, затриманих із вини служби перевезень, і обмислити відповідну ймовірність.

8. а) авіакомпанія виконує протягом місяця 400 рейсів. Імовірність повного комерційного завантаження кожного рейсу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано половину рейсів.

б) фабрика випускає 75 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 300 виробів, виготовлених фабрикою, число першосортних виробів буде не менше 250.

9. У разі автоматичного виготовлення втулок брак становить в середньому 10%. Скільки втулок має взяти контролер, аби ймовірність того, що відхилення відносної частоти появи стандартної втулки від імовірності виготовлення такої втулки за абсолютною величиною не перевищує 0,001, дорівнювала 0,999?

10. Середня кількість замовлень, що надходять до комбінату побутового обслуговування кожну годину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві години надійде менше 5 замовлень.

Варіант 2

1. Шість пасажирів придбали квитки на потяг в одному ряді крісел із шести місць і випадковим чином зайняли ці місця. Знайти ймовірність того, що кожний пасажир зайняв своє крісло.

2. З 15 рейсів, що виконуються протягом доби, 60 % рейсів виконуються власним автопарком. Знайти ймовірність того, що з вибраних навмання п’яти рейсів рівно три виконуються автопарком.

3. Два студенти домовилися зустрітись у певному місці між 17 та 18 годинами. Той, хто прийде першим, повинен чекати другого протягом 15 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність зустрічі, якщо час приходу на місце зустрічі кожного студента незалежний і рівноможливий упродовж вказаної години.

4. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта - браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Було вийнято три деталі. Обчислити ймовірність того, що три деталі виявляться стандартними.

5. На першому верстаті виготовлено 15 деталей, на другому - 25, на третьому - 10. Імовірність одержання браку на першому верстаті дорівнює 0,02, на другому -0,015, на третьому - 0,03. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана деталь виявиться бракованою.

6.Задачу розв’язують 2 відмінники, 5 хорошистів і 3 середні студенти. Ймовірність того, що задачу розв’яже відмінник, дорівнює 0,9; хорошист - 0,7, середній студент - 0,5. Задача була розв’язана. Яка ймовірність того, що її розв'язав середній студент?

7. Імовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює $\frac{7}{15}$. Навмання беруть 14 конденсаторів і вмикають паралельно в електромережу. Знайти найімовірніше число конденсаторів, які вийдуть із ладу і обчислити відповідну ймовірність.

8. а) автопарк виконує протягом місяця 200 рейсів. Імовірність повного комерційного завантаження кожного рейсі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано 180 рейсів.

б) завод випускає 80 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 900 виробів відповідають вимогам 1-го сорту від 700 до 750 виробів.

9. Ймовірність появи події в кожному із 800 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,02.

10. Ймовірність порушення герметичності банки в деякій партії консервів дорівнює 0,04. Обчислити ймовірність того, що серед 1000 банок виявляться з порушенням герметичності не більше трьох банок.

Варіант 3

1. В урні знаходиться 5 білих, 6 чорних і 4 сині кулі. Яка ймовірність дістати білу кулю?

2. Дев'ять пасажирів навмання розміщуються у трьох вагонах. Обчислити ймовірність того, що у кожному вагоні виявиться по три пасажири.

3. Навмання обрано два додатні числа x та y, кожне з яких не перевищує 20. Знайти ймовірність того, що $x+y \leq 18$, а $y \leq 2x$.

4. З аеропорту протягом доби виконуються 3 рейси. Ймовірність повного завантаження для першого рейсу дорівнює 0,95; для другого - 0,9; для третього -0,85. Знайти ймовірність того, що з повним завантаженням буде виконано хоча б один рейс.

5. На першому верстаті виготовлено 15 деталей, на другому - 25, на третьому - 10. Ймовірність одержання браку на першому верстаті дорівнює 0,02; на другому -0,015, на третьому -0,03. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана деталь виявиться бракованою.

6. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого 0,8, другого - 0,4. Відомо, що є одне влучення. Хто зі стрільців найімовірніше влучив у мішень?

7. Ймовірність того, що серед 6 виготовлених робітником деталей хоча б одна буде відмінної якості, дорівнює 0,9998. Знайти ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості.

8. а) імовірність того, що перевірку деталі буде зроблено, дорівнює 0,04. Знайти ймовірність того, що з 50 деталей будуть перевірені рівно 4.

б) імовірність того, що кожен клієнт, який звернувся до каси, замовить квиток дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що зі 100 клієнтів, що звернулися в касу, замовлять квиток від 5 до 12 чоловік.

9. За масового випуску деякої продукції буває в середньому 4 % браку. Ймовірність того, що в партії цієї продукції відхилення вказаного відсотка браку буде не більше ніж 0,02, становить 0,9906. Визначити кількість одиниць продукції даної партії.

10. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Імовірність того, що будь-який абонент подзвонить на станцію протягом певної години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що протягом години на телефонну станцію подзвонить не більше трьох абонентів.

Варіант 4

1. Десять осіб, серед яких є А і В, шикуються в шеренгу в будь-якому порядку. Знайти ймовірність того, що між А і В буде стояти рівно дві особи.

2. Комплект містить 5 виробів 1-го сорту, 3 вироби 2-го сорту і 2 браковані вироби. Знайти ймовірність того, що серед 6 навмання взятих виробів виявляться 4 вироби 1-го сорту і 2 вироби 2-го сорту.

3. Підлогу складено з прямокутних плиток з розмірами 8х32см. Визначити ймовірність того, що монета, яка впала на підлогу, повністю виявиться на одній плитці, якщо діаметр монети дорівнює 2см.

4. Для повідомлення про аварію встановлено 3 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність спрацьовування в разі аварії першого сигналізатора дорівнює 0,95, другого - 0,92, третього - 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють хоча б два сигналізатори.

5. На базі знаходяться електричні лампочки, виготовлені на двох заводах. Серед них 60 % виготовлено першим заводом і 40 % - другим. Відомо, що на кожні 100 лампочок заводу № 1 90 відповідає стандарту, а на кожні 100 лампочок заводу № 2 відповідає стандарту 80. Визначити ймовірність того, що взята навмання з бази лампочка відповідає стандарту.

6. Фабрика виготовляє однотипну продукцію на трьох конвеєрних лініях, які мають однакову продуктивність. На першій лінії виробляється продукція тільки 1-го сорту. На другій лінії продукція 1- і о сорту становить 90 %, а на третій — 85 %. Випадково взятий виріб виявився першосортним. Знайти ймовірність того, що він виготовлений на третій лінії.

7. У разі додержання певної технології 90 % усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірнішу кількість виробів найвищого сорту в партії з 200 штук і обчислити відповідну ймовірність.

8. а) за статистичними даними 90 % рейсів виконується без запізнення. Знайти ймовірність того, що зі 169 рейсів без запізнення буде виконано 150 рейсів.

б) верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Ймовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде від 700 до 740 штук?

9. За масового випуску деякої продукції буває в середньому 4 % браку. Визначити ймовірність того, що в партії з 625 одиниць цієї продукції відхилення від вказаного відсотка браку буде не більше ніж 0,02.

10.Частка блондинів у певній місцевості становить у середньому 0,3 %. Навмання було обстежено 3000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них блондинів буде менше 4 осіб.

Варіант 5

1. Задано множину цілих чисел $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Її елементи навмання розставляють у рядок. Обчислити ймовірність того, що цифри утворять парне п'ятицифрове число.

2. Комплект містить 12 виробів, 5 з яких коштують по 3 гривні кожний, інші — по 1 гривні. Знайти ймовірність того, що взяті навмання 4 вироби коштують разом 10 гривень.

3. Дві однакові монети радіусом r розміщені всередині кола радіусом R, в який навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що ця точка впаде на одну з монет, якщо монети не перекриваються.

4. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Було вийнято три деталі. Обчислити ймовірність того, що ці три деталі виявляться стандартними.

5. Робітниця обслуговує три верстати. Ймовірність виготовлення одиниці бракованої продукції на 1-му верстаті дорівнює 0,01, на 2-му - 0,03, на 3-му - 0,2. Продуктивність першого верстата втричі більша від продуктивності другого, а третього - удвічі менша від продуктивності другого. Уся вироблена продукція надходить в один контейнер. Знайти ймовірність того, що взята одиниця продукції виявилася бракованою.

6. У продаж надходять однакові телевізори трьох заводів з ймовірностями 0,3; 0,2; 0,5. За термін гарантійного строку продукція першого заводу потребує ремонту в 20 % випадків, другого заводу - 25 %, третього - 15 %. Придбаний телевізор витримав гарантійний строк без ремонту. Знайти ймовірність того, що він був виготовлений другим заводом.

7. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Ймовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менше ніж на три запитання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

8. а) за даними аеропорту в лютому через метеорологічні умови відкладається 10 % рейсів. Знайти ймовірність того, що з 400 рейсів, запланованих на лютий, будуть відкладені 50 рейсів.

б) імовірність виходу з ладу кожного приладу при перевірці на надійність дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що зі 100 перевірених приладів вийдуть з ладу від 14 до 26.

9. Проводиться дослідження для з'ясування питомої ваги захворюваності на грип серед інших захворювань. Скільки лікарняних слід включити в дослідження, щоб відхилення відносної частоти захворюваності на грип від імовірності 0,5 при одному випробуванні не перевищувало числа 0,06 (за абсолютною величиною) з імовірністю 0,9973?

10. Середня кількість замовлень таксі, що надходять до диспетчерського пункту щохвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде не менше 4 замовлень.

Варіант 6

1. Після посадки п'яти літаків, серед яких два В-747, вони були розставлені випадково в один ряд на 8 стоянках. Знайти ймовірність того, що літаки В-747 займуть крайні стоянки.

2. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. Яка ймовірність того, що витягнуті навмання 2 кулі будуть чорні?

3. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 4 та 9 см навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в коло радіусом 1см, розташоване в трикутнику?

4. Ймовірність того, що студент складе іспит на відмінно дорівнює 0,2; добре - 0,4; задовільно - 0,3; незадовільно - 0,1. Визначити ймовірність того, що студент складе іспит.

5. Чотири робітники виготовляють однотипні вироби. При цьому продуктивність праці цих робітників задовольняє таке співвідношення: 2:1,5:4:2,5. Відомо, що частка браку для 1, 2, 3, 4 робітників дорівнює відповідно 1,5 %; 2,8 %; 2 %; 4,5 %. Після робочої зміни всі вироби вміщуються в один бункер. Знайти ймовірність того, що навмання взятий із бункера виріб виявився стандартним.

6. На заводі 40 % усієї продукції виготовляється першим верстатом, решта — другим. У середньому 9 із 1000 деталей, вироблених першим верстатом, виявляються бракованими, для другого верстата цей показник — одна бракована деталь із 250. Випадково вибрана з усієї продукції деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовлено першим верстатом?

7. Імовірність прольоту певного пункту в зазначений час для кожною з чотирьох літаків дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що пункт в зазначений час пролетить принаймні один літак.

8. а) Абоненти мобільного зв’язку не отримують відправлені повідомлення з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 200 відправлених повідомлень буде рівно 90 отриманих.

б)Ймовірність виходу з ладу кожного приладу при перевірці на надійність дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з 100 перевірених приладів вийдуть з ладу менше 28.

9. Проводиться дослідження для з'ясування питомої ваги захворюваності на грип серед інших захворювань. Скільки лікарняних слід включити в дослідження, щоб відхилення відносної частоти захворюваності на грип від ймовірності 0,5 при одному випробуванні не перевищило числа 0,02 (за абсолютною величиною) з ймовірністю 0,9973.

10. При перевезені скляних виробів у середньому 0,5 % від їх числа пошкоджується. Знайти ймовірність того, що при перевезенні 1000 виробів будуть пошкоджені рівно 3 вироби.

Варіант 7

1. Дві грані звичайної гральної кості пофарбовано в зелений колір, а інші чотири грані - в червоний. Кость підкидають один раз. Яка ймовірність того, що верхня грань буде зеленою?

2. У студентському ансамблі 14 студентів, серед яких 6 хлопців. Яка ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних солістів - 3 хлопці?

3. До аеропорту можна дістатися автобусом за 15 хвилин або пішки за 18 хвилин. Інтервал руху автобусів становить 8 хвилин. Будемо вважати, що варто їхати автобусом, якщо ймовірність випадкової події A={швидше дістатися до аеропорту автобусом, аніж пішки} перевищує 40 %. Чи варто чекати автобус?

4. При вмиканні запалювання мотор автомашини починає працювати з імовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що для роботи мотора необхідно ввімкнути мотор не більше двох разів.

5. Магазин отримує продукцію від двох виробників: перший постачає 2/5 усіх виробів, другий-3/5. Імовірність продажу виробів $1^{\underline{го}}$ постачальника становить 0,95, другого-0,8. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб не буде реалізовано?

6. У рекламному агентстві працює три групи дизайнерів: перша обслуговує 25 фірм, друга - 45, третя - 40. Протягом одного Місяця кошти, витрачені на рекламу дизайнерами першої групи, повертаються до 40 % фірм, другої - до 45 %, третьої - до 35 %. Яка ймовірність того, що фірма, котра окупила впродовж місяця витрачені на рекламу кошти, обслуговувалась третьою групою дизайнерів?

7. Серед великої кількості виробів, що знаходяться в комплекті, 30% - нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед п'яти виробів навмання узятих з комплекту, принаймні один нестандартний.

8. а) знайти ймовірність появи герба 55 разів при 100 незалежний підкиданнях симетричної монети.

б) фабрика випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що кількість нестандартних виробів у партії з 400 штук не більше 170?

9. Ймовірність появи події в кожному з 450 незалежних випробувань дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

10. У спостереженнях Е. Резерфорда радіоактивна речовина за проміжок часу 7,5 *сек* випромінювала в середньому 3,87 α-частинки. Знайти ймовірність того, що за 1 *сек* речовина випроменить в усякому разі одну α-частинку.

Варіант 8

1. У першому ящику знаходяться кулі з номерами від 1 до 5, а в другому — від 6 до 10. З кожного ящика дістали по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль дорівнює 11?

2. Із партії 20 радіоприймачів випадковим чином для перевірки відбирають три приймачі. Партія містить 15 справних приймачів. Яка ймовірність того, що до відібраних ввійдуть один справний і два браковані приймачі?

3. У коло радіусом 50*мм* вписано ромб із діагоналями 40 та 60*мм*. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка кола буде лежати і в ромбі?

4. Три студенти складають на сесії іспит з математики. Ймовірність того, що перший складе іспит, дорівнює 0,7, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,9. Обчислити ймовірність того, що тільки два студенти складуть іспит.

5. Завод випускає кухонні набори білого та синього кольорів, що виготовляються двома цехами. Перший цех виробляє 35% продукції, серед яких 40% наборів синього кольору. У продукції другого цеху 55% синіх наборів. Яка ймовірність того, що навмання вибраний набір — синього кольору?

6. Справи клієнтів банку зберігаються у 8 сейфах: у трьох — по 150 справ, у п'яти — по 250. Ймовірність вчасного повернення кредиту клієнтами, справи яких лежать у перших трьох сейфах, становить 0,96, в останніх п'яти — 0,95. Де найімовірніше лежала справа клієнта, який своєчасно повернув кредит, в одному з перших трьох чи в одному з останніх п'яти сейфах?

7. Якість одного виробу перевіряють незалежно один від одного 4 контролери. Ймовірність приймання одного виробу кожним контролером дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що виріб буде прийнято хоча б одним контролером.

8. а) при виробництві деякої продукції ймовірність виготовлення виробу 1-го сорту вважається рівною 0,64. Визначити ймовірність того, що зі 100 навмання взятих виробів 70 будуть 1-го сорту.

б) ймовірність виходу з ладу кожного приладу при перевірці на надійність дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що зі 100 перевірених приладів вийдуть з ладу не менше 20.

9. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,6. Знайти число випробувань, при якому з імовірністю 0,8 можна очікувати те, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

10. Під час роботи технологічної лінії в середньому за 5 годин відбувається 2 порушення в її роботі. Визначити ймовірність того, що за 30 хвилин роботи лінії не відбудеться жодного порушення.

Варіант 9

1. З урни, що містить 3 білі та 4 чорні кулі, навмання взято одну. Яка ймовірність того, що ця куля чорна?

2. 12 виробів, серед яких 4 нестандартні, випадковим чином розбивають на дві рівні партії. Знайти ймовірність того, що у кожній партії буде рівна кількість нестандартних виробів.

3. Після урагану на ділянці між 40-м та 70-м кілометрами телефонної лінії стався розрив дроту. Яка ймовірність того, що розрив стався між 50-м і 55-м кілометрами лінії?

4. З аеропорту протягом дня виконуються 3 рейси. Ймовірність затримки через метеоумови для першого рейсу дорівнює 0,1, для другого — 0,15, для третього — 0,2. Знайти ймовірність того, що із затримкою буде відправлений тільки один рейс.

5. У групі з 20 стрілків є 4 відмінні, 10 хороших і 6 посередніх стрілків. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі для відмінного стрілка дорівнює 0,9, для хорошого — 0,7, для посереднього — 0,5. Відомо, що в ціль влучено однією кулею. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний стрілок влучив у мішень.

6. Перший верстат виготовляє у два рази більше продукції, ніж другий, і в три рази більше, ніж третій. У першого верстата в середньому буває 3 браковані вироби із 100, у другого — 2 із 50 виробів, у третього — 4 із 60

виробів. Узята навмання деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено на другому верстаті.

7. Ймовірність здобуття вдалого результату в разі проведення складного хімічного досліду дорівнює 2/3. Знайти найбільш імовірну кількість вдалих дослідів, якщо їх загальна кількість 7. Обчислити відповідну ймовірність.

8. а) Ймовірність того, що відвідувач універмагу здійснить покупку, у середньому дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що зі 100 відвідувачів здійснять покупку 60 чоловік.

б) Ймовірність того, що кожен клієнт, який звернувся в касу, замовить квиток до міста А, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що із 200 клієнтів, що звернулися в касу, замовлять квиток до міста А менше 15 чоловік.

9. Магазин отримав партію пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час транспортування пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,08. Скільки слід перевірити пляшок, аби з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати, що відносна частота появи розбитих пляшок відхилиться від імовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,01.

Радіоапаратура складається з 1000 елементів. Імовірність відмови протягом доби для кожного елемента становить 0,002 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови протягом доби не менше двох елементів.

Варіант 10

1. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із них 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

2. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрано 7 робітників. Знайти ймовірність того, що серед відібраних буде 3 жінки.

3. На площині проведено паралельні прямі на відстані 8см одна від одної. Визначити ймовірність того, що навмання кинутий на цю площину м'яч радіусом 3см не перетне жодну лінію.

4. Аеропорт протягом доби виконує три рейси. Ймовірність вильоту без затримки для першого рейсу дорівнює 0,9, для другого -0,7; для третього - 0,8. Знайти ймовірність того, що без затримки вилетять усі три рейси.

5. Радіоприймач із ймовірностями 0,9 і 0,1 може належати до однієї з двох партій. Імовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу без ремонту, для цих партій відповідно дорівнює 0,8 і 0,6. Яка ймовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу?

6. Чотири робітники виготовляють однотипні вироби. При цьому продуктивність праці цих робітників задовольняє таке відношення: 2 : 3 : 4 : 1. Відомо, що частка браку для першого, другого, третього та четвертого робітників дорівнює відповідно 1,5 %; 2,8 %; 2 %; 4,5 %. Після робочої зміни всі виготовлені робітниками вироби вміщують в один бункер. Навмання взятий виріб із бункера виявився стандартним. Яка ймовірність того, що його виготував перший робітник?

7. На контроль надійшла велика партія виробів. Відомо, що 5 % усіх виробів не відповідає стандарту. Знайти найбільш імовірну кількість нестандартних виробів серед 6 перевірених і відповідну їй імовірність.

8. а) знайти наближено ймовірність того, що при 400 випробуваннях подія відбудеться рівно 104 рази, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

б) ймовірність закриття аеропорту на одну добу через метеоумови в осінньо-зимовий період дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в цей період аеропорт буде закритий не менше 50 діб.

9. Скільки разів треба підкинути монету, щоб з імовірністю 0,6 можна було очікувати, що відхилення відносної частоти появ герба від імовірності 0,5 виявиться за абсолютною величиною не більше 0,01?

10. Прилад складено з 1000 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови будь-якого елементу за час T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять 3 елементи.

Варіант 11

1. У ящику міститься 25 однотипних деталей. Серед них 15 бракованих, а решта - стандартні. Яка ймовірність того, що навмання вибрана з ящика деталь виявиться стандартною?

2. У студентському ансамблі 12 студентів, серед яких 5 хлопців. Яка ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних солістів — 2 хлопці?

3. На екрані локатора радіусом R з'явився сигнал. Знайти ймовірність того, що він буде всередині вписаного в екран правильного трикутника.

4. Є три ящики з деталями. У першому ящику знаходиться 6 деталей, серед яких чотири стандартні; у другому - 12 деталей, серед яких 8 - стандартних; у третьому - 17 деталей, з них 11 - стандартних. З кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Яка ймовірність того, що всі деталі будуть стандартними?

5. Для участі в математичній олімпіаді з груп 121, 122 і 123 запрошено відповідно 4, 5 і 6 студентів. Імовірність того, що переможцем олімпіади стане студент із першої, другої чи третьої групи, відповідно дорівнює 0,9; 0,8 і 0,7. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент стане переможцем.

6. Задачу розв'язують 2 відмінники, 5 хорошистів і 3 середні студенти. Ймовірність того, що задачу розв'яже відмінник, дорівнює 0,9, хорошист -0,7, середній студент -0,5. Задача була розв'язана. Яка ймовірність того, що її розв'язав відмінник?

7. У сім'ї десятеро дітей. Вважаючи, що ймовірність народження хлопчика і дівчинки дорівнює 0,5, знайти ймовірність того, що в сім'ї хлопчиків не більше 8 і не менше 3.

8. а) відділ доставки пі церії отримує 80 % замовлень на фірмову піцу. Знайти ймовірність того, що серед 100 замовлень на фірмову піцу буде рівно половина.

б) ймовірність того, що деталь не пройшла контролю якості, порівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відіпраних деталей виявляться неперевіреними від 70 до 100 деталей.

9. Ймовірність виготовити на заводі стандартний виріб дорівнює0,87. Навмання вибирають 750 виробів. Визначити межі, в яких перебуває відносна частота появи стандартних виробів з імовірністю 0,988.

10. Середня кількість замовлень, що надходять до комбінату побутового обслуговування кожну годину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві години надійде не менше 5 замовлень.

Варіант 12

1. З шести карток А, Е, И, К, М, Т навмання одна за одною вибираються чотири, і розташовані вони в порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово "ТЕМА"?

2. У майстра 12 деталей, які мало відрізняються одна від одної. З них 5 - 1-го виду, 4 - 2-го виду, 3 - 3-го виду. Яка ймовірність того, що серед 6 взятих одночасно деталей 3 будуть 1-го виду, 2 - 2-го виду і 1 - 3-го виду?

3. У коло радіусом 45*мм* вписано ромб з діагоналями 35 і 55*мм*. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка кола буде лежати і в ромбі?

4. Серед 500 лотерейних білетів є 10 виграшних. Знайти ймовірність того, що 5 навмання вибраних по одному білетів виявляться виграшними.

5. Прилади виготовляються трьома заводами. Перший завод поставляє 45 % всіх виробів, другий - 30 %, третій - 25 %. Надійність приладу, виготовленого першим заводом, дорівнює 0,8; другим -0,85 і третім - 0,9. Визначити середню надійність приладу, що потрапив на виробництво.

6. Два робітники виготовили по однаковій кількості деталей. Імовірність бракованої продукції, виробленої першим робітником, становить 5 %, другим - 1%. Відділ технічного контролю виявив браковану деталь. Хто з робітників найімовірніше виготовив браковану деталь?

7. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Ймовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому становить 0,7. Знайти найімовірнішу кількість саджанців, які навесні проростуть, й обчислити відповідну ймовірність.

8. а) у перші класи треба прийняти 200 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них буде 100 дівчаток, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

б) ймовірність проростання зернини становить 95 %. Посіяно 2000 зернин. Знайти ймовірність того, що не проросте від 80 до 120 зернин.

9. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти, яке відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності можна очікувати з імовірністю 0,9128 за 5000 випробувань.

10. Середній брак виробництва продукції на підприємстві становить 0,1 %. Перевіряється партія з 1000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованими буде від 2 до 4 деталей?

Варіант 13

1. Задана множина цілих чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Яка ймовірність того, що навмання взяті чотири числа, що розміщені в рядок, утворять число 2125?

2. Із партії 20 радіоприймачів випадковим чином для перевірки підібрано три приймачі. Партія містить п'ять бракованих приймачів. Яка ймовірність того, що відібрано для перевірки тільки браковані приймачі?

3. У коло радіусом R вписано рівносторонній трикутник. Яка ймовірність того, що чотири навмання кинуті в дане коло точки потраплять у трикутник?

4. На ділянці АВ для автогонщика є 9 перепон, ймовірність зупинки на кожній з яких дорівнює 0,2. Ймовірність того, що від пункту В до кінцевого пункту С автогонщик проїде без зупинки, дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що на ділянці АС не буде жодної зупинки.

5. На заводі 40 % усієї продукції виготовляється першим верстатом, решта — другим. У середньому 9 із 1000 деталей, вироблених першим верстатом, виявляються бракованими, для другого верстата цей показник — одна бракована деталь з 250. Визначити ймовірність того, що випадково вибрана з усієї продукції деталь виявилася бракованою.

6. На вхід радіолокаційного пристрою з імовірністю 0,9 надходить корисний сигнал із завадами, та з імовірністю 0,1 — самі лише завали. Коли надходить корисний сигнал із завадами, то пристрій реєструє цей сигнал з імовірністю 0,8; якщо надходять лише завади - з ймовірністю 0,9. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність якогось сигналу. Яка ймовірність того, що це корисний сигнал?

7. Знайти найвірогіднішу кількість зіпсованих деталей, якщо випробують 100 деталей, а ймовірність того, що деталь зіпсована, дорівнює 0,1. Обчислити ймовірність знайденої кількості зіпсованих деталей.

8. а) стрілець влучає в мішень з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що при 400 пострілах стрілець влучить в мішень рівно 80 разів.

б) за даними аеропорту в січні через метеорологічні умови відкладається 10% рейсів. Знайти ймовірність того, що з 300 рейсів, запланованих на січень, будуть відкладені від 30 до 50 рейсів.

9. Ймовірність події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти кількість випробувань, при якому з імовірністю 0,7698 можна очікувати, що відносна частота події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

10. Під час роботи технологічної лінії в середньому за 10 годин відбувається 4 порушення в її роботі. Визначити ймовірність того, що за 30 хвилин роботи лінії не відбудеться жодного порушення.

Варіант 14

1. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що на грані кубика з'явиться число, кратне 3?

2. У лотереї випущено 1000 білетів, з яких половина виграшних. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що один виграшний?

3. У колі радіусом 5*см* розташовано прямокутник зі сторонами 4 і 6*см*. Яка ймовірність того, що навмання вибрана в колі точка лежатиме і в прямокутнику?

4. Для деякої місцевості середня кількість хмарних днів у липні дорівнює шести. Знайти ймовірність того, що 1-го та 2-го липня буде ясна погода.

5. На складання агрегату надходять деталі, які виготовляються двома верстатами-автоматами. Перший верстат виготовляє в середньому 0,2% бракованих деталей, а другий - 0,1%. Знайти ймовірність надходження бракованої деталі на складання, якщо від першого верстата надійшло 200 деталей, а від другого - 300.

6. Екіпажу для безпечного проходження грозового фронту з однаковою ймовірністю може бути задано три напрями: ліворуч, праворуч або над центром грозової активності. Ймовірність успішного проходження літаком грозового фронту ліворуч дорівнює 0,8; праворуч - 0,9; над центром - 0,5. Літак благополучно перетнув грозовий фронт. Знайти ймовірність того, що він обходив фронт над його центром.

7. Подія B настає тільки в тому випадку, коли подія A відбудеться не менше трьох разів. Визначити ймовірність появи події B, якщо ймовірність появи події A при одному досліді дорівнює 0,4 і проведено шість незалежних дослідів.

8. а) фабрика випускає 75% виробів першого сорту. З партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірність того, що виробів першого сорту виявиться 320 штук.

б) ймовірність того, що відвідувачу в їдальні знадобиться перша страва, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 відвідувачів першу страву замовлять не менше 75 і не більше 90 відвідувачів.

9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайдіть кількість деталей, яку потрібно відібрати, щоб з імовірністю 0,9544 можна було стверджувати, що відносна частота появи нестандартних деталей (серед відібраних) відхилиться від сталої ймовірності 0,1 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03.

10. У камері Вільсона в середньому реєструється 15 елементарних частинок за годину. Визначити ймовірність того, що протягом 20 хвилин буде зареєстровано хоча б 2 частинки.

Варіант 15

1. Десять осіб, серед яких є М і К, шикуються в шеренгу в будь-якому порядку. Знайти ймовірність того, що М і К стоятимуть поряд.

2. В касі було 15 квитків, серед яких 6 квитків — до пункту А. До кінця зміни продано 8 квитків. Знайти ймовірність того, що в касі не залишилося квитків до пункту А, якщо ймовірність продажу кожного квитка однакова.

3. На площині проведені паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють почергово 1,5 та 8*см*. На площину кидають навмання круг радіусом 2,5*см*. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих ліній?

4. В упаковці міститься 40 банок кави, серед яких 4 нестандартні. Знайти ймовірність того, що дві навмання взяті одна за однією банки виявляться нестандартними.

5. Вершкове масло фасується на двох технологічних лініях молокозаводу. Ймовірність виходу кондиційної продукції з першої лінії дорівнює 0,88; а з другої -0,95. Визначити ймовірність того, що навмання взятий пакет масла виявиться кондиційним.

6. Пасажир для придбання квитка може звернутись до однієї з чотирьох кас. Відповідні ймовірності дорівнюють 0,2; 0,3; 0,4; 0,1. Ймовірність того, що до моменту появи пасажира в касі буде квиток, дорівнює відповідно 0,6; 0,3; 0,8; 0,5. Пасажир звернувся до однієї з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав в першій касі?

7. До агентства з нерухомості звертаються з приводу оренди квартир з імовірністю 0,32. Яка ймовірність того, що серед 6 довільно вибраних заявок буде не менше 4 щодо оренди квартир?

8. а) ймовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробувану 900 виробів із ладу вийдуть 30 виробів?

б) ймовірність закриття порту на одну добу через метеоумови в зимовий період дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в цей період порт буде закритий не більше 10 діб.

9. Скільки потрібно провести експериментів з підкиданням монети, щоб з імовірністю 0,93 можна було чекати відхилення відносної частоти випадання цифри від теоретичної ймовірності на абсолютну величину, не більшу за 0,02?

10. На факультеті навчається 500 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня день народження у трьох студентів даного факультету?

Варіант 16

1. В урні знаходиться 3 червоні, 9 чорних і 8 синіх куль. Яка ймовірність дістати червону кулю?

2. Серед 25 студентів групи, в якій 10 дівчат, розігрується п'ять квитків. Яка ймовірність того, що серед тих, хто одержав квиток, будуть дві дівчини?

3. На відрізку довжиною 12*см* навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищить 3*см*?

4. Для деякої місцевості середня кількість ясних днів у серпні дорівнює 23. Знайти ймовірність того, що 1-го та 2-го серпня буде хмарна погода.

5. На склад надходить продукція з чотирьох конвеєрних ліній, причому частка кожної з них відповідно дорівнює 40, 30, 20 і 10 %. Відомо, що ймовірність браку для першої лінії становить 0,5%, для другої - 1%, для третьої - 1,5%, для четвертої - 2%. Знайти ймовірність того, що взята навмання одиниця продукції не має браку.

6. Клапани, виготовлені цехом заводу, перевіряють три контролери. Ймовірність того, що клапан потрапить на перевірку до першого контролера, дорівнює 0,3, до другого - 0,5, до третього - 0,2. Ймовірність того, що бракована деталь буде виявлена для першого, другого і третього контролерів, відповідно дорівнює 0,95; 0,9; 0,85. Піц час повторної перевірки деталь виявилася бракованою. Яка Ймовірність того, що цю деталь перевіряв третій контролер?

7. Ймовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює 0,3. Навмання беруть 10 конденсаторів і вмикають паралельно в електричну мережу. Знайти найімовірнішу кількість конденсаторів, які вийдуть з ладу, й обчислити відповідну ймовірність.

8. а) ймовірність появи події A в схемі Бернуллі дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 повтореннях експерименту подія A відбудеться рівно 75 разів?

б) компанія має 120 автомобілів. Імовірність готовності кожного з них до відправки дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що готовими до відправки будуть від 50 до 100 автомобілів.

9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 300 випадково відібраних деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від ймовірності 0,2 за модулем не більше ніж на 0,04.

10. Середня щільність мікробів в одному кубічному метрі повітря становить 100. Беруть на пробу два кубічні дециметри повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

Варіант 17

1. Група, що складається з 8 студентів, займає місця з однієї сторони прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що два певні студенти будуть поряд, якщо кількість місць рівна 8.

2.В урні чотири білі і п'five чорних кульок. Із урни навмання вибирають дві кульки. Знайти ймовірність того, що одна із цих кульок — біла, а друга — чорна.

3. Після бурі на ділянці між 50-м та 90-м кілометрами телефонної мережі стався обрив дроту. Яка ймовірність того, що обрив стався між 60-м і 65-м кілометрами мережі?

4. Студент знає 20 із 25 питань програми. Екзаменатор пропонує три питання по одному. Знайти ймовірність того, що студент знає запропоновані екзаменатором питання.

5. Один з трьох стрілків визивається на лінію вогню і здійснює постріл. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,3; для другого - 0,5; для третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що в мішень влучено одним пострілом.

6. Деталі виробляються на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в 9 разів перевищує об'єм продукції першого. Частка браку на першому заводі 1%, на другому - 2%. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона зроблена на другому заводі?

7. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб найімовірніше число k_0 стандартних деталей дорівнювало 65?

8. а) фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірність того, що виробів 1-го сорту виявиться 300 штук.

б) ймовірність події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що подія станеться не менше 75 разів, якщо кількість випробувань становить 100.

9. В осінньо-зимовий період регулярність польотів становить 90%. Яку кількість рейсів потрібно запланувати на цей період, щоб з імовірністю 0,95 було виконано не менше 1500 рейсів?

10. Локальна мережа складається із 1000 комп'ютерів. Імовірність виникнення збоїв у роботі протягом доби для кожного з них дорівнює 0,002. Яка ймовірність того, що протягом доби збої виникнуть не більше ніж у 3 комп'ютерах?

Варіант 18

1. Знайти ймовірність того, що серед чотирьох вибраних навмання цифр усі цифри різні.

2. У майстерню для ремонту надійшло 15 телевізорів. Відомо, що шість з них потребують регулювання. Майстер вибирає навмання 5 штук. Яка ймовірність того, що 2 з них потребують регулювання?

3. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 5 та 10*см* навмання вибрано точку. Яка ймовірність того, що вона потрапила в коло радіусом 1*м*, розташоване всередині трикутника?

4. Імовірність безвідмовної роботи лінії зв'язку за певний час дорівнює 0,85. Для підвищення якості зв'язку встановлена резервна лінія з надійністю 0,75. Визначити ймовірність безвідмовної роботи зв'язку з резервною лінією.

5. З першого автомата на зборку потрапляє 40%, з другого - 35%, з третього - 25% деталей. Серед деталей першого автомата 0,2% бракованих, другого - 0,3%, з третього - 0,5%. Знайти ймовірність того, що деталь, яка потрапила на зборку, виявилася бракованою.

6. Склад одержує від першого заводу в 4 рази більше агрегатів, ніж від другого. Брак у продукції першого заводу становить 4%, а другого - 8%. Випадковим чином узятий агрегат виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що цей агрегат був виготовлений першим заводом.

7. Ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа.

8. а) фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20% замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 850 клієнтів 150 замовлять візитні картки.

б) ймовірність того, що відвідувачу в їдальні знадобиться перша страва, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що зі 100 відвідувачів першу страву замовлять не менше 75 відвідувачів.

9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти, скільки деталей потрібно відібрати, щоб з імовірністю, рівною 0,9544, можна було стверджувати, що відносна частота появи нестандартних деталей (серед відібраних) відхиляється від сталої ймовірності 0,1 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03.

10. У камері Вільсона в середньому реєструється 15 елементарних частинок за годину. Визначити ймовірність того, що протягом 20 хвилин буде зареєстровано хоча б 4частинки.

Варіант 19

1. Задано множину цілих чисел {1, 2, 3, 4, 5}. Її елементи навмання розставляють у рядок. Обчислити ймовірність того, що розставлені в ряд числа утворюють зростаючу послідовність.

2. З 3 бухгалтерів, 8 менеджерів і 6 наукових співробітників потрібно сформувати комітет з 10 чоловік. Яка ймовірність того, що до комітету ввійдуть 1 бухгалтер, 5 менеджерів і 4 наукові співробітники?

3. До станції метро можна дістатися автобусом за 10 хвилин або пішки за 13 хвилин. Інтервал руху автобусів становить 7 хвилин. Будемо вважати, що варто їхати автобусом, якщо ймовірність випадкової події A={швидше дістатися до метро автобусом, аніж пішки} перевищує 50%. Чи варто чекати автобус?

4. В ящику міститься 50 пляшок мінеральної води, з яких 3 нестандартні. Знайти ймовірність того, що дві навмання взяті пляшки виявляться нестандартними.

5. Перша фабрика виробляє 3000 приладів, друга - 10000, третя - 2000 приладів. Перша фабрика випускає в середньому 1% бракованих приладів, друга - 0,5%, третя - 1,5%. Знайти ймовірність того, що вибраний навмання прилад бракований.

6. Вершкове масло фасується на двох технологічних лініях молокозаводу. Ймовірність виходу кондиційної продукції з першої лінії дорівнює 0,88, а з

другої — 0,95. Навмання взятий пакет масла виявився кондиційним. З якої лінії найімовірніше фасовано цей пакет?

7. Викладач перевіряє контрольні роботи 12 студентів. Імовірність того, що за роботу буде поставлено задовільну оцінку, дорівнює 0,9. Яка найімовірніша кількість робіт, за які буде поставлено задовільну оцінку? Знайти відповідну ймовірність.

8. а) на рейс продано 144 квитки. Ймовірність того, що пасажир відмовиться від рейсу, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що рівно 14 пасажирів відмовляться від рейсу.

б) ймовірність того, що деталь не пройшла контролю якості, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 300 випадково відібраних деталей виявляться неперевіреними від 60 до 90 деталей.

9. Велика партія електроламп містить 1% браку. Скільки ламп потрібно відібрати з партії, щоб імовірність наявності серед них хоча б однієї бракованої була не менше 0,95?

10. Імовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,008. Знайти ймовірність того, що серед 1000 виробів бракованих буде не більше ніж 4.

Варіант 20

1. Монету підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться герб.

2. 12 виробів, серед яких 4 нестандартних, випадковим чином розбивають на дві рівні партії. Знайти ймовірність того, що усі нестандартні вироби будуть в одній партії.

3. У ромбі з бічною стороною 5*см* лежить прямокутник зі сторонами 2 та 3*см*. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана у ромбі точка лежатиме і в прямокутнику.

4. На кожному з трьох верстатів виготовлено по одній деталі. Ймовірність браку на першому верстаті дорівнює 0,05, на другому - 0,07, на третьому - 0,1. Знайти ймовірність того, що серед виготовлених деталей хоча б одна бракована.

5. Деталі потрапляють на підприємство з трьох цехів: 50% - з першого, 30% - з другого і 20% - з третього. При цьому матеріал першого цеху має 8% браку, другого - 6% і третього - 4%. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь не має дефектів.

6. Ймовірність розбивання скляних банок під час транспортування консервів на автомашинах дорівнює 0,01, а в разі транспортування залізницею — у 5 разів менше. Навмання взята банка виявилася розбитою. Відомо, що автомашинами перевезено консервів у 4 рази менше, ніж залізницею. Знайти ймовірність того, що розбиту банку було перевезено залізницею.

7. Імпортер постачає жалюзі для вікон, причому 70% з них - горизонтальні. Яка ймовірність того, що серед 6 відібраних жалюзі буде не менше 4 горизонтальних?

8. а) у партії однотипних деталей стандартні становлять 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде 355?

б) фабрика випускає 75% продукції першим сортом. Знайти ймовірність того, що з 300 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде не більше 200.

9. Ймовірність появи події в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти таке додатне число ε, щоб з імовірністю 0,77 абсолютна величина відхилення частоти появи події від його ймовірності 0,5 не перевищила ε.

10. Протягом місяця інспекторами ДПС проводиться в середньому 4 рейди з перевірки технічного стану автомобілів. Знайти ймовірність того, що протягом 2 тижнів буде проведено не більше 3 рейдів.

<u>**Варіант 21**</u>

1. Чотири грані звичайної гральної кості пофарбовано в червоний колір, а інші дві грані - в зелений. Кость кидають один раз. Яка ймовірність того, що верхня грань буде зеленою?

2. Дев'ять пасажирів навмання розміщуються у трьох вагонах. Обчислити ймовірність того, що у першому вагоні виявиться 4 пасажири, у другому - 3, в третьому — 2 пасажири.

3. На нескінченну шахову дошку зі стороною квадрата 6*см* навмання кинуто монету радіусом 2*см*. Знайти ймовірність того, що монета потрапить повністю всередину одного квадрата.

4. З аеропорту протягом доби виконується 3 рейси. Ймовірність повного завантаження для першого рейсу дорівнює 0,95, для другого - 0,9, для третього - 0,85. Знайти ймовірність того, що з повним завантаженням буде виконано лише один рейс.

5. На заводі «Росинка» встановлено вітчизняний та імпортний автомати розливу води, продуктивність яких відноситься як 4 : 6. Пляшки з водою надходять на загальний конвеєр. Вітчизняний автомат дає в середньому 5% браку, а імпортний - 2%. Знайти ймовірність того, що навмання узята з конвеєра пляшка води виявиться бракованою.

6. 21% яблук надійшов у продаж з складу № 1, з них 90% ящиків стандартних, 35% - з складу № 2, з них 80% - стандартних, 29 % - з складу № 3, з них 70 % - стандартних, 15 % -з складу № 4, з них 60% - стандартних. При відкриванні навмання вибраного ящика яблука визнано стандартними. Визначити ймовірність того, що ці яблука надійшли з складу № 1.

7. Радіостанція посилає 6 повідомлень. Ймовірність прийому кожного з повідомлень дорівнює 0,7. Знайти найбільш імовірну кількість прийнятих повідомлень і відповідну їм ймовірність.

8. а) ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що з 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку 90 покупців?

б) автопарк виконує протягом місяця 400 рейсів. Імовірність повного завантаження кожного рейсу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано не менше 300 рейсів.

9. За масового випуску деякої продукції буває в середньому 2% браку. Визначити ймовірність того, що в партії з 700 одиниць продукції відхилення від вказаного відсотка браку не більше ніж 0,02.

10. Робітник обслуговує 1000 верстатів. Імовірність порушення в роботі одного верстата протягом 1 хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хвилини будуть порушення в роботі 5 верстатів.

Варіант 22

1. Із п'яти карточок А, Б, В, Г, Д навмання одна за одною вибираються три, і розташовані вони в порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «два»?

2. Партія з 50 виробів має 10% браку. З партії випадковим способом відбирають 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед узятих виробів виявиться 2 браковані.

3. У коло з радіусом *R* вписано квадрат. Знайти ймовірність потрапляння довільно кинутої точки у квадрат, якщо ця ймовірність пропорційна площі квадрата.

4. На станції спостереження встановлено 4 радіолокатори різних конструкцій, які виявляють об'єкт незалежно один від одного. Ймовірність виявлення об'єкта першим локатором дорівнює 0,86; другим — 0,9; третім — 0,92; четвертим —- 0,95. Знайти ймовірність виявлення об'єкта тільки одним локатором.

5. У групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів, 4 бігуни. Ймовірність виконати кваліфіковану норму така: для лижника — 0,9; для велосипедиста — 0,8; для бігуна — 0,75. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає норму.

6. На фабриці перша машина виробляє 40%, а друга - 60% усієї продукції. У середньому 9 з 1000 одиниць продукції, що вироблена першою машиною, виявляється браком, а для другої машини брак становить 2 одиниці на 500 одиниць продукції. Деяка одиниця продукції, яка вибрана випадковим способом із даної продукції фабрики, виявилася браком. Знайти ймовірність того, що вона вироблена другою машиною.

7. Що ймовірніше виграти у рівносильного супротивника: не менше трьох з чотирьох чи не менше п'яти партій з восьми? Нічийний результат партії виключається.

8. а) Імовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть рівно 75 випробувань?

б) Імовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку від 100 до 180 покупців?

9. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань порівнює 0,2. Знайти, яке відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності можна очікувати з імовірністю 0,9128 при 5000 випробуваннях.

10. Енергетична компанія обслуговує 800 споживачів електроенергії. Перебої у подачі енергії протягом доби виникають з імовірністю 0,005. Яка ймовірність того, що протягом доби надійде не більше 4, але не менше 9 повідомлень про перебої?

Варіант 23

1. Задано множину цілих чисел {1, 2, 3, 4, 5}. Її елементи навмання розставляються у рядок. Обчислити ймовірність того, що цифри утворять парне п'ятицифрове число.

2. З 8 менеджерів, 6 бухгалтерів і 3 маркетологів потрібно сформувати комітет з 10 чоловік. Яка ймовірність того, що до комітету ввійдуть 2 бухгалтери, 2 маркетологи і 4 менеджери?

3. Відрізок завдовшки l розділили на 3 частини, навмання вибираючи дві точки поділу. Знайти ймовірність того, що з утворених трьох відрізків можна скласти трикутник.

4. У партії міститься 18 однотипних деталей, серед яких 5 бракованих. Деталі вибираються для перевірки по одній без повернення. Так було вийнято 3 деталі. Знайти ймовірність того, що вийняті деталі стандартні.

5. Виробник комп'ютерів отримує комплектуючі деталі від трьох постачальників, частки яких становлять 20%, 45%, 35%. Деталі першого постачальника мають 2% браку, другого - 1,5%, а третього - 3%. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде з браком?

6. Фабрика виготовляє однотипну продукцію на трьох лініях, які мають однакову продуктивність. На першій лінії виробляється продукція тільки першого сорту. На другій лінії продукція першого сорту становить 90%, а на третій — 80%. Випадково узятий виріб виявився першосортним. На якій з трьох ліній найімовірніше було виготовлено цей виріб?

7. Товарознавець перевіряє 24 вироби. Ймовірність того, що виріб буде визнано придатним для продажу, для кожного виробу становить 0,6. Знайти найвірогіднішу кількість виробів, які товарознавець визнає придатним до продажу, й обчислити відповідну ймовірність.

8. а) ймовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Обчислити ймовірність того, що в даних умовах проросте 630 зернин.

б) ймовірність того, що кожен клієнт, який звернувся в касу, замовить квиток до міста N, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що зі 100 клієнтів, що звернулися в касу, замовлять квиток до міста N більше 20 чоловік.

9. Ймовірність появи події A дорівнює 0,7 в кожному із 1200 незалежних дослідів. У яких межах знаходиться відносна частота події A, ймовірність відхилення якої від імовірності 0,7 дорівнює 0, 99.

10. Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,00001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде пошкоджено від 3 до 5 виробів.

Варіант 24

1. Із літер розрізаної абетки складено слово. Потім всі літери перемішують і навмання беруть одну за однією. Знайти ймовірність 11 н о, що буде складено початкове слово «книга».

2. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих деталей будуть дві придатні.

3. У коло радіусом R навмання кинуто точку. Яка ймовірність того, що вона буде знаходитись всередині вписаного в це коло правильного трикутника?

4. На полиці стоїть 15 книжок. Із них 9 з літератури, а решта — з математики. Вибирають по одній книжці без повернення. Так було вибрано три книги. Знайти ймовірність того, що три книги виявляться з математики.

5. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий - з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

6. Податкові декларації робітникам підприємства надходять із двох відділів: 55% з першого, 45% з другого. При цьому декларації з першого відділу містять 3% браку, а з другого відділу - 5% браку. Навмання вибрана декларація виявилася придатною. Знайти ймовірність того, що вона надійшла з другого відділу.

7. Радіостанція посилає 6 повідомлень екіпажу. Ймовірність прийому кожного з повідомлень дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що екіпаж прийме принаймні 4 повідомлення.

8. а) фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірність того, що виробів 1-го сорту виявиться 290 штук.

б) ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що зі 100 пострілів кількість влучень лежить у межах від 75 до 85.

9. Скільки разів треба підкинути монету, щоб з імовірністю 0,7 можна було б очікувати, що відхилення відносної частоти появ герба від імовірності p=0,5 виявиться за абсолютною величиною не більше 0,01 ?

10. Імовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,008. Знайти ймовірність того, що серед 1000 виробів бракованих буде не більше ніж 5.

Варіант 25

1. На картках записані натуральні числа: від 1 до 15. Навмання виймають дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел, що записані на цих картках, дорівнює 10?

2. На складі є 10 кінескопів заводу № 1 і 8 кінескопів заводу № 2. Навмання взято 4 кінескопи. Знайти ймовірність того, що серед них два кінескопи заводу № 1 і два кінескопи заводу № 2.

3. Дві туристичні групи домовилися зустрітися між 12.00 та 13.00 годинами. Група, яка підійшла першою, чекає іншу 20 хвилин, потім залишає місце зустрічі. Яка ймовірність зустрічі цих груп, якщо моменти приходу кожної групи протягом однієї години незалежні один від одного?

4. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більш як в чотири місця.

5. На складі зберігаються комп'ютери, 70% яких зібрано на заводі № 1, а решта - на заводі № 2. Імовірність того, що комп'ютер витримає гарантійний термін, дорівнює 0,9 для заводу № 2 і 0,8 для заводу № 1. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний комп'ютер витримає гарантійний термін.

6. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45%, а другий - 55% деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого - 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Хто з контролерів найімовірніше допустився помилки?

7. Прилад складається з 4 незалежно працюючих модулів. Імовірність безвідмовної роботи кожного модуля протягом певного часу дорівнює 0,87. Знайти ймовірність того, що впродовж цього часу будуть безвідмовно працювати не менше 3 модулів.

8. а) до технічного водопроводу приєднано 100 підприємств, кожне з яких з імовірністю 0,8 у даний момент здійснює забір води з магістралі. Визначити ймовірність того, що в цей момент забір води здійснює 75 підприємств.

б) ймовірність того, що деталь пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що серед 400 навмання відібраних деталей виявиться не перевірених від 70 до 100.

9. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,9. Навмання беруть 800 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,99.

10. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. У даний момент абонент може зателефонувати незалежно від інших з імовірністю 0,005. Знайти ймовірність того, що в даний момент було не більше 7 телефонних викликів.

Варіант 26

1. Серед 10 книжок, що стоять на книжковій полиці, - 3 з математики. Знайти ймовірність того, що всі вони стоять поруч.

2. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих деталей будуть 1 придатна і 1 бракована.

3. Два пароплави повинні причалити до одного причалу. Час прибуття обох пароплавів рівноможливий протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого пароплава дорівнює одній годині, а другого - двом годинам.

4. Студент прийшов на залік, знаючи тільки 34 питання із 40. Яка ймовірність здати залік, якщо після відмови відповісти на питання викладач задає ще одне питання?

5. До магазину електротоварів надходить продукція від двох підприємств. Від першого - 60%, від другого - 40% продукції. Перше піцириємство дає 80% продукції 1-го сорту і 20% - 2-го сорту, а друге - 70% 1-го сорту і 30% - 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання куплена одиниця продукції виявиться 1-го сорту.

6. Робітник обслуговує три автоматичні верстати. Ймовірність виготовлення бракованої деталі на першому верстаті дорівнює 0,02, на другому - 0,05, на третьому - 0,1. Продуктивність першого верстата втричі більша від продуктивності другого, а третього - удвічі менша від продуктивності другого. Уся вироблена продукція надходить в один контейнер. Узята деталь виявилася бракованою. На якому з верстатів вона найімовірніше виготовлена?

7. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки треба зробити пострілів, аби найімовірніша кількість влучень було 20?

8. а) визначити ймовірність одночасної зупинки 30 машин зі 100 працюючих, якщо ймовірність зупинки однієї машини дорівнює 0,2.

б) яка ймовірність того, що в стовпчику із 100 навмання відібраних монет, кількість монет, розташованих гербом угору, буде від 45 до 55?

9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,2. Знайти, скільки деталей потрібно відібрати, щоб з імовірністю 0,9 можна було б стверджувати, що відносна частота появи стандартних деталей (серед відібраних) відхилиться від сталої ймовірності 0,2 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

10. Словник має 1500 сторінок. Імовірність друкарської помилки на одній сторінці дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що в словнику буде хоча б одна помилка.

Варіант 27

1. Підкидається гральний кубик. Знайти ймовірність появи більше трьох очок.

2. В авіакасі заброньовано 8 квитків до пункту M, 5 квитків - до пункту N і 3 - до пункту P. Однак тільки 10 квитків були викуплені. Знайти ймовірність того, що викуплено 6 квитків до пункту M і 4 — до пункту N.

3. Два літаки прибувають в зону аеропорту у випадковий нас між 12:00 і 12:30. Знайти ймовірність того, що літак, який прибув другим, не буде вимушений чекати дозволу на посадку, якщо чергову посадку можна здійснювати не раніше ніж через 10 хвилин після попередньої.

4. Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому доведеться подзвонити не більше ніж у три міста.

5. У цеху працює 20 верстатів. Із них десять марки A, шість марки B і чотири марки C. Ймовірність того, що вироблена деталь відповідає стандарту,

для цих верстатів відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7. Який відсоток стандартних деталей випускає цех у цілому?

6. Вироби перевіряються одним із двох контролерів. Перший встигає перевірити 60% всіх виробів, другий - 40%. Ймовірність того, що перший контролер пропустить нестандартний виріб, дорівнює 0,01, другий - 0,02. Взятий навмання виріб із маркою «стандарт» виявився нестандартним. Яка ймовірність того, що його пропустив другий контролер?

7. У зону аеродрому протягом години прибувають 6 літаків. Імовірність стандартного заходу на посадку дорівнює для кожного літака 0,85. Знайти найбільш імовірну кількість літаків, для посадки яких не потрібно втручання диспетчера, й обчислити відповідну ймовірність.

8. а) знайти ймовірність того, що подія *A* відбудеться рівно 80 разів в 350 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в одному випробуванні дорівнює 0,2.

б) проростання насіння пшениці становить 70%. Знайти ймовірність того, що серед 2100 посіяних зерен пшениці зійде не менше 1470 зерен.

9. Візуально спостерігати в заданому пункті штучний супутник Землі можна з імовірністю 0,1 щоразу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів має пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з імовірністю, не меншою за 0,998, вдалося здійснити принаймні 5 спостережень?

10. Під час роботи технологічної лінії в середньому за 10 годин відбувається 4 порушення в її роботі. Визначити ймовірність того, що за 30 хвилин роботи лінії не відбудеться жодного порушення

Варіант 28

1. Підкидається гральний кубик. Знайти ймовірність появи менше 3-х очок.

2. Із 10 рейсів, які виконуються з міста N протягом доби, 40% виконується власним автопарком. Знайти ймовірність того, що з вибраних випадковим чином 5 рейсів власним парком виконується 3.

3. Всередині прямокутника, обмеженого осями координат і прямими $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що вона лежить нижче лінії $y = \cos x$.

4. Серед 200 лотерейних білетів є 15 виграшних. Знайти ймовірність того, що 4 навмання вибрані один за одним білети виявляться виграшними.

5. До каси підприємства надійшли банкноти у пачках від двох банків: 50 пачок від першого і 70 — від другого. Ймовірність помилки касирів першого банку становить 0,15%, а другого — 0,2%. Яка ймовірність того, що навмання вибрану пачку сформовано без помилок?

6. Ймовірність того, що під час роботи комп'ютера будуть порушення в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті, в пристроях вводу, відносяться як 3:2:5. Виявлення порушень в цих пристроях комп'ютера рівно

можливі. Під час роботи виявлено порушення. Знайти ймовірність того, що це порушення в оперативній пам'яті.

7. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки треба зробити пострілів, аби найімовірніша кількість влучень було 20?

8. а) визначити ймовірність одночасної зупинки 30 машин зі 100 працюючих, якщо ймовірність зупинки однієї машини дорівнює 0,2.

б) яка ймовірність того, що в стовпчику із 100 навмання відібраних монет, кількість монет, розташованих гербом угору, буде від 45 до 55?

9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,2. Знайти, скільки деталей потрібно відібрати, щоб з імовірністю 0,9 можна було б стверджувати, що відносна частота появи стандартних деталей (серед відібраних) відхилиться від сталої ймовірності 0,2 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

10. Словник має 1500 сторінок. Імовірність друкарської помилки на одній сторінці дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що в словнику буде хоча б одна помилка.

Варіант 29

1. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадають на різні місяці року.

2. З десяти потягів, що прибувають в місто протягом доби, 80% мають повне завантаження. Знайти ймовірність того, що серед 5 випадковим чином узятих потягів тільки 4 мають повне завантаження.

3. Два літаки прибувають до аеропорту у випадкові моменти часу від 15:00 до 15:30. Розвантаження обох літаків виконує одна бригада вантажників. Знайти ймовірність того, що літаку, який прибув другим, не доведеться чекати черги, якщо на розвантаження кожного літака потрібно 10 хвилин.

4. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 навмання вибрані один за одним білети виявляться виграшними.

5. На трьох автоматичних верстатах виготовляють однакові деталі. Відомо, що 30% продукції виробляється першим верстатом, 25% - другим і 45% - третім. Імовірність виготовлення деталі, що відповідає стандарту, на першому верстаті дорівнює 0,99, на другому - 0,988 і на третьому - 0,98. Виготовлені деталі не сортуються і відправляються на склад. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана деталь не відповідає стандарту.

6. Уздовж траси з бензоколонкою проїжджає вдвічі більше вантажних автомашин, аніж легкових. Імовірність того, що заправлятися буде вантажівка, дорівнює 0,1, а для легкової автомашини вона становить 0,2. На заправку під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що вона легкова.

7. Оптова база постачає 10 крамниць, від кожної з яких може надходити заявка на черговий день з імовірністю 0,4, незалежно від заявок від інших крамниць. Знайти найбільш імовірну кількість заявок на день і ймовірність одержання цієї кількості заявок.

8. а) ймовірність виходу з ладу за час t одного конденсатора дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за час t із 400 незалежно працюючих конденсаторів вийде з ладу рівно 80.

б) фабрика випускає 75% продукції першим сортом. Знайти ймовірність того, що з 300 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде від 220 до 235.

9. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від імовірності 0,1 за модулем не більше ніж на 0,03.

10. Середня щільність мікробів в одному кубічному метрі повітря становить 100. Беруть на пробу два кубічні дециметри повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

Варіант 30

1. Шість літаків, серед яких два Ан-24, після посадки в аеропорту розташовані випадковим чином в один ряд на шести стоянках. Знайти ймовірність того, що літаки Ан-24 будуть на сусідніх стоянках.

2. Комплект містить 7 виробів 1-го сорту, 6 — 2-го сорту і 2 вироби 3-го сорту. Випадковим чином з комплекту відбирають 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них не виявиться виробів 3-го сорту.

3. У мішень, яка має форму кола, вписано квадрат. По ній зроблено один постріл. Вважається при цьому, що влучення в коло мішені є подією вірогідною. Яка ймовірність того, що куля влучить у квадрат?

4. В урні містяться 4 зелені і 8 червоних кульок. Навмання із урни виймають дві кульки. Знайти ймовірність того, що вийнято кульки одного кольору.

5. Імовірність виходу літака на заданий маршрут на значних висотах дорівнює 0,8; на середніх - 0,9; на малих - 0,6. На значних висотах виконується 20% усіх польотів, на середніх - 10%, на малих - 70%. Знайти ймовірність того, що літак вийшов на заданий маршрут.

6. Три робітники виготовляють однотипні деталі, причому за зміну перший робітник виготовив у 1,5 разу більше, ніж другий, а другий в 1,8 разу менше, ніж третій. У середньому брак становить для першого робітника 4%, для другого і третього -1% і 8% відповідно. Виготовлені деталі розміщують в одному ящику. Навмання взята одна деталь із ящика виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовив другий робітник?

7. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність влучення в який 0,2. Обчислити найбільш імовірну кількість влучень і її ймовірність.

8. а) система складається з 300 працюючих незалежно один від одного елементів. Імовірність виходу з ладу кожного елемента дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що рівно 50 елементів вийде з ладу.

б) Імовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть під 50 до 100 випробувань?

9. Скільки потрібно провести експериментів з підкиданням монети, щоб з імовірністю 0,9216 можна було чекати відхилення відносної частоти випадання герба від теоретичної ймовірності 0,5 за абсолютною величиною, не більше ніж 0,01?

10. Ткаля обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив станеться на 7 веретенах.

Рекомендована література

1. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М., «Наука», 1973, 366с.
2. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі (у 2- х ч.) К., “ Либідь”, 1992, ч.2.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., ВШ, 1977, 479с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., ВШ, 1970, 1975, 1978, 400 с.
5. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика (в 2-х ч.). К., КНЕУ, ч.2, 304с.
6. Збірник задач з теорії ймовірностей. Л., “Львівська політехніка”, 2001,244 с.
7. Мармоза А.Т. Практикум по математической статистике. К., Вища школа, 1990, 190 с.
8. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам вісшей математики (типовые расчеты). М., ВШ, 1983, 112с.
9. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. К., Вища школа, 1977, 1994, 192 с.

Додаток А

Таблиця А.1- значень функції P(*k*;λ)= $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	λ=0,1	λ=0,2	λ=0,3	λ=0,4	λ=0,5	λ=0,6	λ=0,7	λ=0,8	λ=0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k	λ=1	λ=2	λ=3	λ=4	λ=5	λ=6	λ=7	λ=8	λ=9
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0.0126	0,0263	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Додаток Б

Таблиця Б.1 - значень функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3835
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	i 276	1257	1238	1EI9	1200	1182	1163	1145	11 27
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0 154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Додаток В

Таблиця В.1 - значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08318	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22507	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37499	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	4608-	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
20	47725	47778	47831	47822	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861