УДК 51-75, 519.21
DOI: 10.25140/2411-5363-2018-3(13)-105-113

Андрій Ільєнко, Людмила Руновська

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ВИРОДЖЕННЯ В МОДЕЛІ КРАМЕРА-ЛУНДБЕРГА

Актуальність теми дослідження. *Останнім часом стрімко зростає інтерес до комп'ютерних технологій прогнозування у страховій справі. Таке прогнозування може бути використано, зокрема, для визначення цінової політики страхових компаній.*

Постановка проблеми. *Наразі виникає необхідність розробки простих та точних чисельних алгоритмів оцінювання ймовірності банкрутства, які можуть бути ефективно реалізовані комп'ютерними програмними засобами.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. *На сьогодні накопичений великий інструментарій чисельних методів оцінювання різних характеристик процесу страхового ризику – ймовірностей банкрутства на скінченному та нескінченному часових горизонтах, математичного сподівання та дисперсії часу банкрутства тощо.*

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. *Наявні методи або є занадто складними в реалізації, або демонструють недостатню точність оцінювання.*

Постановка завдання. *Розробка чисельного алгоритму, що уточнює класичну апроксимацію де Вілдера для оцінювання ймовірності банкрутства на нескінченному часовому горизонті у страховій моделі Крамера-Лундберга, а також дослідження точності роботи цього алгоритму на основі формули Беєкмана.*

Виклад основного матеріалу. *У статті розроблено новий метод наближеного знаходження ймовірності виродження процесу страхового ризику Крамера-Лундберга на нескінченному часовому горизонті. Цей метод уточнює апроксимацію, запропоновану Ф. де Вілдером, шляхом заміни еталонного експоненціального розподілу страхових виплат на суміш двох експоненціальних. Комп'ютерне моделювання показує істотно вищу точність запропонованого алгоритму в порівнянні з підходом де Вілдера.*

Висновки відповідно до статті. *Запропонований у роботі алгоритм дозволяє оцінювати ймовірність банкрутства страхової компанії в моделі Крамера-Лундберга. Метод заснований на заміні процесу страхового ризику іншим процесом ризику, для якого страхові виплати розподілені за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів. Перевагою розробленого методу є його істотно вища точність у порівнянні з апроксимацією де Вілдера. Особливостями методу є вища складність реалізації внаслідок необхідності наближеного розв'язання системи нелінійних рівнянь, а також те, що ця система має придатні розв'язки не для будь-якого розподілу страхових виплат.*

Ключові слова: *страхова модель Крамера-Лундберга; процес страхового ризику; ймовірність банкрутства; апроксимація де Вілдера; точність апроксимації.*
Табл.: 6. Рис.: 1. Бібл.: 11.

Актуальність теми дослідження та постановка проблеми. Згідно з класичною моделлю Крамера-Лундберга величина капіталу страхової компанії $U(t)$ в момент часу $t \geq 0$ може бути записана в такому вигляді:

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \qquad (1)$$

де u_0 – величина початкового капіталу; c – сумарна величина страхових внесків від усіх клієнтів компанії за одиницю часу; $N = (N(t), t \geq 0)$ – однорідний процес Пуассона інтенсивності $\lambda > 0$, що описує кількість страхових подій з усіма клієнтами до моменту t, та $X_k, k \in \mathbb{N}$ – страхові виплати, які вважаються незалежними однаково розподіленими невід'ємними випадковими величинами зі спільною функцією розподілу F та скінченним математичним сподіванням $\mu = \int_0^{\infty} x \,\mathrm{d}F(x)$. Процес N та випадкова послідовність $(X_k, k \in \mathbb{N})$ також є незалежними.

Модель Крамера-Лундберга є класичною у страховій математиці та успішно застосовується в тих випадках, коли кількість клієнтів компанії є сталою, а потік страхових подій може вважатися пуассонівським.

Як добре відомо з теорії пуассонівських процесів, за вищезазначених умов часові проміжки між страховими подіями є незалежними випадковими величинами, розподіленими за експоненціальним законом із параметром λ. Графік типової реалізації процесу страхового ризику (1) зображений на рисунку.

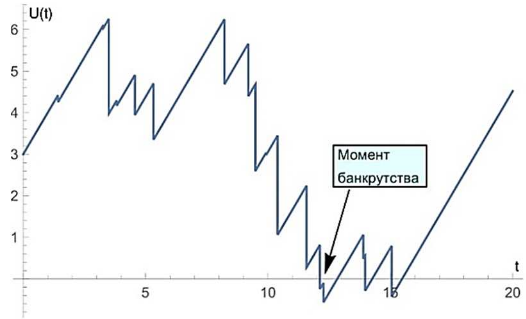

Рис. Типова реалізація процесу страхового ризику

Банкрутством страхової компанії називають випадкову подію $\{\exists t > 0 : U(t) < 0\}$, а моментом банкрутства – випадкову величину $\tau = \min\{t > 0 : U(t) < 0\}$. Ймовірність банкрутства $\psi(u_0) = \mathbb{P}\{\tau < \infty \,|\, U(0) = u_0\}$ та ймовірність небанкрутства $\varphi(u_0) = 1 - \psi(u_0) = \mathbb{P}\{\tau = \infty \,|\, U(0) = u_0\}$ як функції величини початкового капіталу u_0 є важливими характеристиками процесу ризику. Їх знання дозволяє визначати цінову політику компанії.

Якщо виконується умова $c > \lambda\mu$, яку в англомовній літературі називають умовою NPC (net profit condition), дохід компанії за одиницю часу перевищує її середні витрати, і тому за будь-якої величини початкового капіталу $u_0 \ge 0$ існує ненульова ймовірність небанкрутства впродовж нескінченного часу: $\forall u_0 \ge 0 : \varphi(u_0) > 0.$ У цьому випадку функція φ задовольняє інтегральне рівняння Вольтерра [1, с. 162–163]

$$\varphi(u_0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^{u_0} (1 - F(y))\varphi(u_0 - y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Якщо ж умову NPC не виконано, то $\varphi(u_0) = 0$ для будь-якого u_0, і компанія приречена на банкрутство незалежно від величини її початкового капіталу.

На жаль, рівняння (2) може бути розв'язане аналітично лише в рідкісних випадках. Зокрема, якщо страхові виплати X_k мають експоненціальний розподіл, тобто $F(x) = 1 - e^{-x/\mu},\ x \ge 0,$ то, як добре відомо [1, с. 167],

$$\varphi(u_0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)u_0}, \qquad u_0 \ge 0. \tag{3}$$

Цей розв'язок може бути легко одержаний із рівняння (2) шляхом застосування перетворення Лапласа. Якщо розподіл X_k є сумішшю двох експоненціальних законів, явний вигляд ймовірності банкрутства знайдений у монографії [2], то застосовується теорема 2, що наведена нижче. У випадку страхових виплат, що мають гама-розподіл, ймовірність банкрутства досліджувалася в роботах [3] та [4]. У цій ситуації значення ймовірності знайдено неявно – отримані формули містять інтеграли або суми рядів, які не можуть бути виражені в аналітичній формі.

Наведені міркування обґрунтовують необхідність розробки наближених методів знаходження ймовірності банкрутства.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні у страховій математиці накопичений великий інструментарій різноманітних наближених методів оцінювання характеристик процесу страхового ризику – ймовірностей банкрутства на скінченному та нескінченному часових горизонтах, математичного сподівання та дисперсії часу банкрутства тощо (див., напр., монографії [5] та [6], роботи [7] – [10], а також посилання в них). Одним із найбільш простих та природних методів є апроксимація де Вілдера [9], запропонована ще у 1978 р. Ідея цього методу полягає в заміні процесу страхового ризику іншим, але в певному сенсі близьким процесом ризику з експоненціально розподіленими виплатами. Ймовірність небанкрутства для останнього може бути знайдена за формулою (3), що є хорошою оцінкою цієї ймовірності також для початкового процесу.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. При всій своїй простоті апроксимація де Вілдера дає досить точні оцінки ймовірності банкрутства. Але в деяких ситуаціях ця точність усе ж таки виявляється недостатньою. Водночас ці оцінки можуть бути зроблені ще точнішими, якщо замість еталонного експоненціального розподілу використовувати інший розподіл із більшою кількістю параметрів. Це дозволило б підібрати еталонний процес ризику ще більш близьким до початкового, що збільшило б якість апроксимації.

Постановка завдання. Метою роботи є розробка чисельного алгоритму, що уточнює класичну апроксимацію де Вілдера для наближеного знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії на нескінченному часовому горизонті в моделі Крамера-Лундберга. Уточнення полягає у використанні еталонного процесу ризику, що побудований за страховими виплатами, розподіл яких є сумішшю двох експоненціальних законів. Такий розподіл має три незалежних параметри, які разом з інтенсивністю пуассонівського потоку страхових подій та величиною страхових внесків за одиницю часу утворюють п’ять важелів, за оптимального підбору яких початковий процес за своїми характеристиками буде дуже близьким до еталонного. Іншим завданням роботи є дослідження точності роботи цього алгоритму за допомогою комп’ютерної симуляції на основі формули Беєкмана [11].

Виклад основного матеріалу. Разом із процесом страхового ризику (1) розглянемо інший процес $\tilde{U} = \left(\tilde{U}(t), t \ge 0\right)$, заданий формулою

$$\tilde{U}(t) = u_0 + \tilde{c}t - \sum_{k=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_k,$$

де $\tilde{N}$ – процес Пуассона інтенсивності $\tilde{\lambda}$, а еталонні страхові виплати $\tilde{X}_k, k \in \mathbb{N}$, мають розподіл, що є сумішшю двох експоненціальних. Іншими словами, їх (спільна для всіх k) функція розподілу має вигляд

$$\tilde{F}(x) = \tilde{q}(1-e^{-\tilde{\alpha}x}) + (1-\tilde{q})(1-e^{-\tilde{\beta}x}), \qquad x \ge 0, \tag{4}$$

де $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ – параметри експоненціальних компонент суміші, а $\tilde{q} \in [0,1]$ – ваговий коефіцієнт самої суміші.

Таким чином, еталонний процес $\tilde{U}$ має п’ять незалежних параметрів: $\tilde{c}, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{q}$, які можна регулювати для його “підгонки” під процес U. Таку “підгонку” природно здійснювати шляхом прирівнювання перших п’яти моментів обох процесів:

$$\mathbb{E}U^k(t) = \mathbb{E}\tilde{U}^k(t), \quad k = 1,\dots,5. \tag{5}$$

Моменти старших порядків процесів U та $\tilde{U}$ мають досить складну форму. Тому замість (5) будемо прирівнювати відповідні кумулянти. Нагадаємо, що кумулянтом k-го порядку випадкової величини ξ з характеристичною функцією χ_ξ називають число

$$\varkappa_k(\xi) = \frac{1}{i^k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \operatorname{Ln} \chi_\xi(s)\Big|_{s=0}, \tag{6}$$

де Ln – головне значення логарифму. Еквівалентність прирівнювання моментів і кумулянтів випливає з формул Леонова-Ширяєва. Для реалізації такого прирівнювання нам буде потрібне таке твердження.

Лема 1. Кумулянт k-го порядку величини $U(t)$ має вигляд

$$\varkappa_k(U(t)) = (u_0 + ct) \cdot \mathbf{1}\{k=1\} + (-1)^k \lambda t \cdot \mathbb{E}X_1^k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

де $\mathbf{1}\{k=1\}$ позначає індикатор події $\{k=1\}$ і дорівнює 1 при $k=1$ та 0 в інших випадках.

Доведення. Оскільки випадкова величина $N(t)$ розподілена за законом Пуассона з параметром λt, її твірна функція має вигляд $G_{N(t)}(z)=e^{\lambda t(z-1)}$. Тому характеристична функція величини $U(t)$ може бути записана у формі

$$\chi_{U(t)}(s)=\mathbb{E}e^{isU(t)}=e^{is(u_0+ct)}\cdot\mathbb{E}\exp\Big(-is\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\Big)=$$
$$=e^{is(u_0+ct)}G_{N(t)}(\chi_X(-s))=e^{is(u_0+ct)+\lambda t(\chi_X(-s)-1)},$$

де через χ_X позначено спільну характеристичну функцію випадкових величин X_k. Отже, з формули (6) маємо:

$$\varkappa_k(U(t))=\frac{1}{i^k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\mathrm{Ln}\,\chi_{U(t)}(s)\Big|_{s=0}=\frac{1}{i^k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\Big(is(u_0+ct)+\lambda t(\chi_X(-s)-1)\Big)\Big|_{s=0}=$$
$$=\big(u_0+ct\big)\cdot\mathbf{1}\{k=1\}+(-1)^k\lambda t\cdot\frac{1}{i^k}\chi_X^{(k)}(0)=\big(u_0+ct\big)\cdot\mathbf{1}\{k=1\}+(-1)^k\lambda t\cdot\mathbb{E}X_1^k,$$

де в останній рівності використана формула зв'язку між моментами випадкової величини та значеннями похідних її характеристичної функції в нулі.

З вигляду спільної функції розподілу випадкових величин $\tilde{X}_k$ (4) легко одержати значення їх моментів: $\mathbb{E}X_1^k=k!\left(\frac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha}^k}+\frac{1-\tilde{q}}{\tilde{\beta}^k}\right)$. Тому наступне твердження є безпосереднім наслідком леми 1.

Теорема 1. Нехай набір параметрів $\tilde{c},\tilde{\lambda},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{q}$ є розв'язком системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} c-\lambda\mathbb{E}X_1=\tilde{c}-\tilde{\lambda}\left(\dfrac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha}}+\dfrac{1-\tilde{q}}{\tilde{\beta}}\right), \\ \lambda\mathbb{E}X_1^k=\tilde{\lambda}k!\left(\dfrac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha}^k}+\dfrac{1-\tilde{q}}{\tilde{\beta}^k}\right), \qquad k=2,\ldots,5. \end{cases} \tag{7}$$

Тоді перші п'ять моментів процесу U збігаються з відповідними моментами процесу $\tilde{U}$.

Отже, наближенням до ймовірності банкрутства для процесу ризику U може служити така ймовірність для процесу ризику $\tilde{U}$, набір параметрів якого є розв'язком системи рівнянь (7). Оскільки розподіл $\tilde{X}_k$ є сумішшю двох експоненціальних законів, ймовірність банкрутства для процесу $\tilde{U}$ може бути знайдена з наступної теореми [2].

Теорема 2. Нехай спільна функція розподілу страхових виплат має вигляд (4). Тоді ймовірність банкрутства при початковому капіталі u_0 становить

$$\psi(u_0)=\frac{(\rho-r_1)e^{-r_1u_0}+(r_2-\rho)e^{-r_2u_0}}{(1+\theta)(r_2-r_1)},$$

де позначено

$$r_{1,2}=\frac{\rho+\theta(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\mp\sqrt{(\rho+\theta(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}))^2-4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\theta(1+\theta)}}{2(1+\theta)},$$

$$\rho=\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{q}}{\mu}\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}-1\right),\qquad \theta=\frac{\tilde{c}}{\tilde{\lambda}\mu}-1,\qquad \mu=\frac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha}}+\frac{(1-\tilde{q})}{\tilde{\beta}}.$$

Перейдемо тепер до дослідження якості розробленого алгоритму. Для цього ми будемо використовувати формулу Беєкмана для ймовірності небанкрутства [11]. Розглянемо послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин $Y_k, k \in \mathbb{Z}$, зі спільною функцією розподілу

$$F_Y(y) = \mu^{-1} \int_0^y (1 - F(x))\, \mathrm{d}x, \qquad y \geq 0. \tag{8}$$

Тоді за умови NPC ймовірність небанкрутства $\varphi(u_0)$ при початковому капіталі u_0 може бути знайдена за формулою

$$\varphi(u_0) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^k \mathbb{P}\left\{Y_1 + \ldots + Y_k \leq u_0\right\}\right].$$

Формула Беєкмана допускає таку інтерпретацію: нехай випадкова величина ν має геометричний розподіл з параметром $1 - \dfrac{\lambda\mu}{c}$ і є незалежною від усіх Y_k. Тоді

$$\varphi(u_0) = \mathbb{P}\left\{Y_1 + \ldots + Y_\nu \leq u_0\right\}.$$

Ймовірність у правій частині можна знайти шляхом комп'ютерного моделювання з достатньо великою кількістю реалізацій *N*. Для цього необхідно змоделювати *N* незалежних копій величини ν – позначимо їх $\nu_1, \ldots, \nu_N$ – а також незалежні однаково розподілені випадкові величини

$$Y_1^1, Y_2^1, \ldots, Y_{\nu_1}^1; \quad Y_1^2, Y_2^2, \ldots, Y_{\nu_2}^2; \quad \ldots\ldots\ldots; \quad Y_1^N, Y_2^N, \ldots, Y_{\nu_N}^N \tag{9}$$

зі спільною функцією розподілу вигляду (8). Нехай *M* позначає кількість серій в (9), для яких сума величин у серії не перевищує u_0. Тоді згідно з законом великих чисел $\varphi(u_0) \approx \dfrac{M}{N}$ для великих *N*.

Перейдемо до результатів перевірки якості апроксимації[1]. Спочатку розглянемо процес ризику, побудований за страховими виплатами, розподіленими за законом, що є сумішшю трьох експоненціальних розподілів із ваговими коефіцієнтами 0,1; 0,2; 0,7 та параметрами експоненціальних компонент 1; 0,1; 0,2. Іншими словами, функція розподілу страхових виплат має вигляд

$$F(x) = 0{,}1(1 - e^{-x}) + 0{,}2(1 - e^{-0.1x}) + 0{,}7(1 - e^{-0.2x}), \qquad x \geq 0.$$

Покладемо $\lambda = 1$, $c = 15$. Результати перевірки якості наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати перевірки якості запропонованої апроксимації

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Уточнена апроксимація на основі теореми 1	Результат моделювання за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера, %	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 1, %
10	0.85447	0,85959	0,85960	0,60	0,001
20	0.93832	0,94148	0,94205	0,40	0,06
30	0.97386	0,97434	0,97446	0,06	0,01
40	0.98892	0,98847	0,98830	0,06	0,02
50	0.99531	0,99477	0,99476	0,06	0,001

[1] Автори вдячні І. Ю. Федчишиній за проведення комп'ютерного моделювання.

Тепер розглянемо процес ризику, побудований за такими ж страховими виплатами, але покладемо $\lambda = 1$, $c = 30$. Результати перевірки якості наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Результати перевірки якості запропонованої апроксимації

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Уточнена апроксимація на основі теореми 1	Результат моделювання за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера, %	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 1, %
10	0,94352	0,94699	0,94667	0,33	0,03
20	0,98098	0,98225	0,98220	0,13	0,005
30	0,99359	0,99346	0,99303	0,06	0,04
40	0,99784	0,99748	0,99759	0,03	0,01
50	0,99927	0,99901	0,99895	0,03	0,01

Нехай тепер процес ризику побудований за страховими виплатами, розподіленими за законом, що є сумішшю чотирьох експоненціальних розподілів із ваговими коефіцієнтами 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 та параметрами експоненціальних компонент 1; 0,1; 0,2; 0,3. Іншими словами, функція розподілу страхових виплат має вигляд

$$F(x) = 0,1(1 - e^{-x}) + 0,2(1 - e^{-0.1x}) + 0,3(1 - e^{-0.2x}) + 0,4(1 - e^{-0.3x}), \qquad x \geq 0.$$

Покладемо $\lambda = 1$, $c = 8$. Результати перевірки якості наведені в табл. 3.

Таблиця 3

Результати перевірки якості запропонованої апроксимації

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Уточнена апроксимація на основі теореми 1	Результат моделювання за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера, %	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 1, %
10	0,66961	0,67529	0,67753	1,17	0,33
20	0,80855	0,81448	0,81315	0,57	0,16
30	0,88906	0,89158	0,89291	0,43	0,15
40	0,93572	0,93623	0,93670	0,10	0,05
50	0,96275	0,96242	0,96238	0,04	0,004

Тепер розглянемо процес ризику, побудований за такими ж страховими виплатами, але покладемо $\lambda = 2$, $c = 15$. Результати перевірки якості наведені в табл. 4.

Таблиця 4

Результати перевірки якості запропонованої апроксимації

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Уточнена апроксимація на основі теореми 1	Результат моделювання за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера, %	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 1, %
10	0,62479	0,62957	0,63174	1,10	0,34
20	0,77039	0,77631	0,77663	0,80	0,04
30	0,85949	0,86238	0,86328	0,44	0,10
40	0,91402	0,91490	0,91560	0,17	0,08
50	0,94738	0,94731	0,94827	0,10	0,09

Нехай тепер процес ризику побудований за страховими виплатами, розподіленими за законом, що є сумішшю експоненціального розподілу з параметром 0,1 та рівномірного розподілу на відрізку [0,10] з ваговими коефіцієнтами 0,5; 0,5. Іншими словами, функція розподілу страхових виплат має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0,5 \cdot (1 - e^{-0.1x}) + 0,5 \cdot x/10, & x \in [0,10]. \\ 0,5 \cdot (1 - e^{-0.1x}) + 0,5, & x > 10. \end{cases}$$

Покладемо $\lambda = 1$, $c = 12$. Результати перевірки якості наведені в табл. 5.

Таблиця 5

Результати перевірки якості запропонованої апроксимації

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Уточнена апроксимація на основі теореми 1	Результат моделювання за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера, %	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 1, %
10	0,62499	0,63126	0,63255	1,20	0,20
20	0,76250	0,76727	0,76717	0,61	0,01
30	0,84959	0,85166	0,85090	0,15	0,09
40	0,90475	0,90535	0,90522	0,05	0,01
50	0,93967	0,93961	0,93982	0,02	0,02

Тепер розглянемо процес ризику, побудований за такими ж страховими виплатами, але покладемо $\lambda = 2$, $c = 20$. Результати перевірки якості наведені в табл. 6.

Таблиця 6

Результати перевірки якості запропонованої апроксимації

Величина початкового капіталу u_0	Апроксимація де Вілдера	Уточнена апроксимація на основі теореми 1	Результат моделювання за формулою Беєкмана	Відносна похибка апроксимації де Вілдера, %	Відносна похибка апроксимації на основі теореми 1, %
10	0,46952	0,47295	0,47533	1,22	0,50
20	0,61090	0,61491	0,61588	0,81	0,16
30	0,71461	0,71708	0,71594	0,19	0,16
40	0,79067	0,79203	0,79149	0,10	0,07
50	0,84646	0,84712	0,84702	0,07	0,01

З табл. 1–6 бачимо, що відносна похибка запропонованого методу апроксимації майже завжди виявляється істотно нижчою, ніж відносна похибка апроксимації де Вілдера.

Висновки відповідно до статті. У роботі запропоновано новий метод наближеного знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії в моделі Крамера-Лундберга, який уточнює класичну апроксимацію де Вілдера. Метод заснований на заміні процесу страхового ризику іншим процесом ризику, для якого страхові виплати розподілені за законом, що є сумішшю двох експоненціальних розподілів. Перевагою розробленого методу є його істотно більша точність у порівнянні з апроксимацією де Вілдера. Особливостями методу є вища складність реалізації внаслідок необхідності наближеного розв’язання системи нелінійних рівнянь, а також те, що ця система має придатні розв’язки не для будь-якого розподілу страхових виплат.

Список використаних джерел

1. *Mikosch T.* Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process / T. Mikosch. – Springer Science & Business Media, 2009. – 432 p.

2. *Panjer H. H.* Insurance risk models / H. H. Panjer, G. E. Willmot. – Society of Actuaries, 1992. – 442 p.

3. *Thorin O.* The ruin problem in case the tail of the claim distribution is completely monotone / O. Thorin // Scandinavian Actuarial Journal. – 1973. – № 2. – P. 100–119.

4. *Constantinescu C.* Ruin probabilities in classical risk models with gamma claims [Electronic resource] / C. Constantinescu, G. Samorodnitsky, W. Zhu // Scandinavian Actuarial Journal. – 2017. – Mode of access : https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03461238.2017.1402817.

5. *Asmussen S.* Ruin probabilities / S. Asmussen, H. Albrecher. – Singapore : World Scientific, 2010. – 620 p.

6. *Grandell J.* Aspects of risk theory / J. Grandell. – New York : Springer-Verlag, 1991. – 175 p.

7. *Burnecki K.* Ruin probabilities in finite and infinite time / K. Burnecki, P. Miśta, A. Weron // Čížek P., Weron R., Härdle W., Statistical tools for finance and insurance. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2005. – P. 341–379.

8. *Burnecki K.* What is the best approximation of ruin probability in infinite time? / K. Burnecki, P. Miśta, A. Weron // Applicationes Mathematicae. – 2005. – № 2 (32). – P. 155–176.

9. *De Vylder F.* A practical solution to the problem of ultimate ruin probability / F. de Vylder // Scandinavian Actuarial Journal. – 1978. – № 2. – P. 114–119.

10. *Grandell J.* Simple approximations of ruin probabilities / J. Grandell // Insurance: Mathematics and Economics. – 2000. – № 26 (2–3). – P. 157–173.

11. *Beekman J. A.* A series for infinite time ruin probabilities / J. A. Beekman // Insurance: Mathematics and Economics. – 1985. – № 4 (2). – P. 129–134.

References

1. Mikosch, T. (2009). *Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process.* Springer Science & Business Media [in English].

2. Panjer, H. H. & Willmot, G. E. (1992). *Insurance risk models*. Society of Actuaries [in English].

3. Thorin, O. (1973). The ruin problem in case the tail of the claim distribution is completely monotone. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2, 100–119 [in English].

4. Constantinescu, C., Samorodnitsky, G. & Zhu, W. (2017). Ruin probabilities in classical risk models with gamma claims. Scandinavian Actuarial Journal. *tandfonline.com.* Retrieved from https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03461238.2017.1402817 [in English].

5. Asmussen, S. (2010). *Ruin probabilities*. Singapore: World Scientific [in English].

6. Grandell, J. (1991). *Aspects of risk theory*. New York: Springer-Verlag [in English].

7. Burnecki, K., Miśta, P. & Weron, A. (2005). Ruin probabilities in finite and infinite time. *Statistical tools for finance and insurance* (pp. 341–379). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag [in English].

8. Burnecki, K., Miśta, P. & Weron, A. (2005). What is the best approximation of ruin probability in infinite time? *Applicationes Mathematicae, 32* (2), 155–176 [in English].

9. De Vylder, F. (1978). A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2, 114–119 [in English].

10. Grandell, J. (2000). Simple approximations of ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics, 26* (2–3), 157–173 [in English].

11. Beekman, J. A. (1985). A series for infinite time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics, 4* (2), 129–134 [in English].

UDC 51-75, 519.21

Andrii Ilienko, Ludmyla Runovska

A NUMERICAL ALGORITHM FOR FINDING THE RUIN PROBABILITY IN THE CRAMÉR-LUNDBERG MODEL

Urgency of the research. *Recently, there has been a rapid increase in interest in computer techniques of forecasting in the insurance business. Such forecasting can be used, in particular, to determine the pricing policy of insurance companies.*

Target setting. *Currently, there arises the need to develop simple and precise numerical algorithms for estimating the probability of ruin, which can be effectively implemented by computer software.*

Actual scientific researches and issues analysis. *At the moment, an extensive toolkit of numerical methods for evaluating various characteristics of insurance risk processes (ruin probabilities in the finite and infinite time horizons, expectation and variance of the time of ruin, etc.) has been accumulated.*

Uninvestigated parts of general matters defining. *Existing techniques are either too complicated to implement, or demonstrate an insufficient accuracy of estimation.*

The research objective. *The development of a numerical algorithm which refines the classical de Vylder approximation for estimating the ruin probability on the infinite time horizon in the Cramér-Lundberg insurance risk model, as well as the study of the accuracy of this algorithm based on Beekman's formula.*

The statement of basic materials. *In the article, we develop a new method for approximate determination of the probability of degeneration of the Cramér-Lundberg insurance risk process on the infinite time horizon. This method refines the approximation proposed by F. de Vylder, by replacing the reference exponential distribution of insurance payments by a mixture of two exponential ones. Computer simulation shows a much higher accuracy of the proposed algorithm compared with the de Vylder's approach.*

Conclusions. *The proposed algorithm allows to estimate the ruin probability of an insurance company in the Cramér-Lundberg model. The method is based on replacing the insurance risk process with another risk process, for which insurance* *payments are distributed according to the law, which is a mixture of two exponential distributions. The advantages of the developed method include its much higher accuracy in comparison with the de Vylder approximation. The features of the method are the higher complexity of implementation due to the need for an approximate solution of a system of nonlinear equations, and also that this system has suitable solutions not for any distribution of insurance payments.*

Keywords: *Cramér-Lundberg insurance risk model; insurance risk process; ruin probability; de Vylder approximation; accuracy of approximation.*

Table: 6. Fig.: 1. References: 11.

Ільєнко Андрій Борисович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна).

Ilienko Andrii – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» (Peremohy prosp., 37, Kyiv, 03056, Ukraine).

E-mail: ilienko@matan.kpi.ua

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4828-0788

ResearcherID: J-1266-2017

Scopus Author ID: 56158332600

Руновська Людмила Анатоліївна – старший викладач кафедри технологій машинобудування та деревообробки, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14035, Україна).

Runovska Ludmyla – Senior Lecturer of the Engineering and Wood Technology Department, Chernihiv National University of Technology (Shevchenko Str., 95, Chernihiv, 14035, Ukraine).

E-mail: ludmila2211@ukr.net

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6075-2552

Ільєнко А. Чисельний алгоритм для знаходження ймовірності виродження в моделі Крамера-Лундберга / А. Ільєнко, Л. Руновська // Технічні науки та технології. – 2018. – № 3 (13). – С. 105–113.