МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

методичні вказівки та завдання до самостійної роботи
з дисципліни "Вища математика"
для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 7 від 18.02.2019р.

Чернігів ЧНТУ 2019

Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів інженерних спеціальностей. / Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська — Чернігів: ЧНТУ, 2019, — 68с.

Укладачі:

Мурашковська Віра Петрівна, ст. викл.
Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович — доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Лінійна алгебра та аналітична геометрія є одним із базових розділів курсу "Вища математика "що розрахований на студентів інженерних спеціальностей.

Ці методичні вказівки укладені у відповідності з навчальною програмою з вищої математики для інженерних спеціальностей ЧНТУ. Даний збірник призначений для студентів, які вивчають лінійну алгебру та аналітичну геометрію і містить індивідуальні розрахункові завдання, а також приклади розв'язання типових задач.

Основна мета цих методичних вказівок — надати студентам практичну допомогу в самостійній роботі по вивченню розділу лінійної алгебри та аналітичної геометрії, сприяти організації самостійної роботи студентів. Засвоєння на достатньому рівні основних понять і вмінь дасть змогу успішно оволодівати послідуючими математичними курсами і застосовувати одержані вміння при вивченні дисциплін з вибраного фаху.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 + 3x + 8.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$*;* *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$*, якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 5 & -3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(2;-4;-3)$, $M_2(5;-6;0)$, $M_3(-1;3;-3)$, $M_4(-10;-8;7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(4;0;1)$, $\overrightarrow{b}=(3;1;-1)$, $\overrightarrow{c}=(0;-2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(0;-8;9)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=1$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-4)$, $B(-4;3)$, $C(2;2)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння медіани AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(2;-4;-3)$, $M_2(5;-6;0)$, $M_3(-1;3;-3)$, $M_4(-10;-8;7)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(4;1;5)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0};\quad l_2:\quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho=2\sin 3\varphi;\quad б)\ \ \rho=3(1-\cos\varphi).$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $z=x^2+2y^2-2$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $z=xy,\ \ x^2+y^2=16,(x,y,z\geq 0)$.

Варіант 2

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 9 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 + 3x + 12.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$*; б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$*, якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-3;-5;6)$, $M_2(2;1;-4)$, $M_3(0;-3;-1)$, $M_4(-5;2;-8)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;0;5)$, $\overrightarrow{b}=(3;2;7)$, $\overrightarrow{c}=(5;0;9)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(-4;2;-12)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=5\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=3$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(2;5)$, $B(5;2)$, $C(-3;-3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння медіани AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-3;-5;6)$, $M_2(2;1;-4)$, $M_3(0;-3;-1)$, $M_4(-5;2;-8)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(3;2;0)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1};\quad l_2:\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{-3}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$\textit{а)}\ \ \rho=\sin 6\varphi;\quad \textit{б)}\ \ \rho=2(1+\cos\varphi).$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $x^2-y^2+z^2+4=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$, $z=0$.

Варіант 3

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 4x + 2.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$*; б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$*, якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$a)\ \ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix}; \quad б)\ \ A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXA = B$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x - y + z = 8, \\ x - 3y - 5z = 6, \\ 3x + y - 7z = -4, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$, $M_4(3;4;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;0;2)$, $\overrightarrow{b}=(0;1;1)$, $\overrightarrow{c}=(2;-1;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(3;-3;4)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=3\overrightarrow{p}+5\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=4$, $|\overrightarrow{q}|=2$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{4}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-1)$, $B(1;-6)$, $C(9;3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння медіани AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$, $M_4(3;4;5)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(3;4;10)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}; \quad l_2: \quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=2\sin 4\varphi$; *б)* $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $4x^2+3y^2-24z=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=9, \quad y=x, \quad y=2x, \quad z=0, \quad (x\geq 0, y\geq 0).$$

Варіант 4

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 6 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 3x^2 - x + 3.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXC = B$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + y - 5z = -12, \\ 2x + 4y + z = 13, \\ 3x + y - 3z = -4, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 21x_4 = -2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2)$, $M_3(-2;-6;-3)$, $M_4(-2;2;-1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1;0;2)$, $\overrightarrow{b} = (0;1;1)$, $\overrightarrow{c} = (2;-1;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (3;-3;4)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 3$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{4}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-4)$, $B(-4;3)$, $C(2;2)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння медіани AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2)$, $M_3(-2;-6;-3)$, $M_4(-2;2;-1)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(1;-1;1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-13}{1}; \quad l_2: \quad \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 2\cos 3\varphi$; *б)* $\rho = \frac{3}{(1+\sin\varphi)}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $z = 9 - y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $(z \geq 0)$.

Варіант 5

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а)}\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}; \quad \text{б)}\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXC = B$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}. C = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + y + 4z = 11, \\ 4x + 2y + 4z = 14, \\ 3x - y + 5z = 12, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (0;1;1)$, $\overrightarrow{b} = (-2;0;1)$, $\overrightarrow{c} = (3;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (-19;-1;7)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 4$, $|\overrightarrow{q}| = 3$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{6}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB, BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(1;4;0)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}; \quad l_2: \quad \frac{x}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$\textit{а)}\ \ \rho = 2\sin 3\varphi; \quad \textit{б)}\ \ \rho = 4(1 - \sin\varphi).$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $3x^2 + 4y^2 - 12z = 0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2x = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2y, \quad z = x + 2y, \quad z = 0.$$

Варіант 6

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 4x^2 + 3x + 2.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \\ 6 & -4 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) \; A = \begin{Vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix}; \quad б) \; A = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXC = B$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$ $.C = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + z = 5, \\ x + y - 3z = -7, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;0;3)$, $M_3(2;1;-1)$, $M_4(2;-2;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;0;5)$, $\overrightarrow{b}=(-1;3;12)$, $\overrightarrow{c}=(0;-1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(5;15;0)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{p}-5\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=3$, $|\overrightarrow{q}|=1$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(0;5)$, $B(2;2)$, $C(4;6)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;0;3)$, $M_3(2;1;-1)$, $M_4(2;-2;-4)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(0;0;-5)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3};\quad l_2:\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{2}.$$

а) Ссклaсти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$\text{а)}\ \ \rho=3\sin 4\varphi;\quad \text{б)}\ \ \rho=4(1-\cos\varphi).$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $3x^2-4y^2+z=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $z=x^2+y^2$, $\quad z=x+2y$, $\ z=0$.

Варіант 7

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 + 5x + 4.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 8 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x - 4y + z = 10, \\ 3x - y + 4z = 20, \\ x - 2y - 2z = -5, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 5. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_4(-4;8;-12)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;0;4)$, $\overrightarrow{b}=(-1;1;3)$, $\overrightarrow{c}=(1;-2;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(6;-1;7)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{p}+4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=3$, $|\overrightarrow{q}|=1$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{2\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-1;-1)$, $B(-2;2)$, $C(3;5)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB, BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_4(-4;8;-12)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(0;1;-1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho=5\sin 3\varphi; \quad б)\ \ \rho=2(1-2\cos\varphi).$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $2x^2-4y^2+3z^2+16=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $9=x^2+y^2$, $\ 3z=18+x^2+y^2$, $\ z=0$.

Варіант 8

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 + 5x + 4.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -7 & -1 & 8 \\ 0 & -4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -6 & 0 & 7 \\ 7 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 2y + z = -1, \\ x - 3y + 2z = -1, \\ 3x + y + z = 2, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 5. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;0;-2)$, $M_2(3;-6;-3)$, $M_3(2;-5;3)$, $M_4(4;-8;-2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(2;1;0)$, $\overrightarrow{b}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{c}=(3;7;-7)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(2;2;-1)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$*, який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$*, якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{p}+4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=3$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{4\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-3)$, $B(2;2)$, $C(-3;4)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;0;-2)$, $M_2(3;-6;-3)$, $M_3(2;-5;3)$, $M_4(4;-8;-2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(-1;3;3)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1};\quad l_2:\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=4\cos 3\varphi$; *б)* $\rho=\frac{3}{1+2\cos\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $2x^2-4y^2-z=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2+y^2-6y=0,\quad x^2+y^2=9,\quad z=0,\quad z=x.$$

Варіант 9

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 2 & -4 & 5 \\ 4 & -2 & -5 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & -9 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$a)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{Vmatrix}. C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}.$

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 4y + z = 8, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 2x + 3y - 3z = 2, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(3;0;-2)$, $M_2(2;-6;4)$, $M_3(0;-5;3)$, $M_4(4;8;-2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (-1;2;4)$, $\overrightarrow{b} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{c} = (0;1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (-2;4;7)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = -4\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}}) = \frac{5\pi}{6}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-3)$, $B(0;5)$, $C(3;1)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(3;0;-2)$, $M_2(2;-6;4)$, $M_3(0;-5;3)$, $M_4(4;8;-2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(0;3;-1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2}; \quad l_2: \quad \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 4\cos 2\varphi$; *б)* $\rho = \frac{3}{1+2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $24x^2 + y^2 + 3z^2 = 12$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = z, \quad 3(x^2 + y^2) = z, \quad y^2 = x, \quad y = x.$$

Варіант 10

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{matrix} \right\|; \quad f(x) = 7x^2 + 5x + 6.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \left\| \begin{matrix} -5 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{matrix} \right\|; \quad B = \left\| \begin{matrix} -1 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{matrix} \right\|; \quad C = \left\| \begin{matrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а)} \;\; A = \left\| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{matrix} \right\|; \quad \text{б)} \;\; A = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{matrix} \right\|.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \left\| \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\|; \quad B = \left\| \begin{matrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \end{matrix} \right\| .C = \left\| \begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\|.$

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 9, \\ 3x - 2y + z = 6, \\ x - 4y + 2z = 2, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 50. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(3;2;6)$, $M_2(-2;1;0)$, $M_3(0;-5;1)$, $M_4(4;-1;3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1;-1;1)$, $\overrightarrow{b} = (2;1;-1)$, $\overrightarrow{c} = (0;3;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (1;-4;4)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 3$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-1)$, $B(1;-6)$, $C(9;3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(3;2;6)$, $M_2(-2;1;0)$, $M_3(0;-5;1)$, $M_4(4;-1;3)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(3;2;6)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1};\quad l_2:\quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho = 4\cos 4\varphi;\quad б)\ \ \rho = \frac{2}{1 - 2\sin\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $22x^2 + 7y^2 + 4z^2 = 28y$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $z = 0$, $x + z = 6$.

Варіант 11

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 4x^2 + 5x + 3.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -6 \\ -5 & 2 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & -9 \\ 4 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x - 2y + 3z = 5, \\ 3x + 2y + z = 4, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-3;2;5)$, $M_2(2;-1;0)$, $M_3(0;5;1)$, $M_4(3;1;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(4;1;0)$, $\overrightarrow{b}=(3;-1;1)$, $\overrightarrow{c}=(0;1;-2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(-5;9;-13)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=3$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;1)$, $B(1;6)$, $C(6;2)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-3;2;5)$, $M_2(2;-1;0)$, $M_3(0;5;1)$, $M_4(3;1;4)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(-1;0;1)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1};\quad l_2:\quad \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=4\sin 4\varphi$; *б)* $\rho=\frac{4}{1+2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $2x^2+3y^2+4z^2=8x$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2=x,\quad z^2=4x,\quad z=0,\quad x+y=8.$$

Варіант 12

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 3x^2 + 4x + 3.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) \ A = \begin{Vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix}; \quad б) \ A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -6 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + y - 5z = -12, \\ 2x + 4y + z = 13, \\ 3x + y - 3z = -4, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-4;2;5)$, $M_2(3;2;1)$, $M_3(1;2;-1)$, $M_4(2;-1;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1;6;3)$, $\overrightarrow{b} = (6;3;1)$, $\overrightarrow{c} = (3;-1;-6)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (8;34;22)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} - 6\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{4}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-4;2;5)$, $M_2(3;2;1)$, $M_3(1;2;-1)$, $M_4(2;-1;2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(3;0;2)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{0}; \quad l_2: \quad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 4\sin 3\varphi$; *б)* $\rho = \frac{3}{1-2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $x^2 - 9y^2 - z^2 + 9 = 0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 = 2y$, $y^2 = 4 - z$, $z = 0$.

Варіант 13

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 3.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 1 & -9 & 8 \\ 7 & -1 & -2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -3 & 8 \\ -4 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а)}\ A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \text{б)}\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -6 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + 3y - 4z = 3, \\ 2x + y - z = 3, \\ x + y + 3z = 6, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(3;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1;2;1)$, $\overrightarrow{b} = (2;2;-3)$, $\overrightarrow{c} = (-1;1;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (-3;-2;2)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 3$, $|\overrightarrow{q}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(0;-1)$, $B(-2;5)$, $C(3;2)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB, BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(3;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(-1;3;1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}; \quad l_2: \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$\text{а)}\ \ \rho = 4\sin 6\varphi; \quad \text{б)}\ \ \rho = \frac{5}{1 - 2\cos\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 + y^2 = z^2$, $\ y^2 + x^2 - 4x = 0$.

Варіант 14

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 3x^2 + 4x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 4 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\textit{а)}\ \ A = \begin{Vmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \textit{б)}\ \ A = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -6 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 8x_1 - 4x_2 + 20x_3 - 45x_4 = 28. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;2;-4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(2;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2;0;-1)$, $\overrightarrow{b} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{c} = (0;1;3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (3;1;8)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 6\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{6}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(0;3)$, $B(-2;-1)$, $C(0;-3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;2;-4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(2;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(1;0;-1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{0}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2;
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho = 2\sin 2\varphi; \quad б)\ \ \rho = \frac{5}{\sqrt{3} - 2\cos\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $x^2 - y^2 + z^2 = 9$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 = y$, $\ y = z$, $\ z + y = 4$.

Варіант 15

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 4x^2 + 3x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ \ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{Vmatrix}; \quad б)\ \ A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}.C = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1, \\ 2x - 3y + 4z = 13, \\ 3x + y + z = 10, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(3;1;2)$, $\overrightarrow{b}=(2;2;-1)$, $\overrightarrow{c}=(-1;-3;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(-10;-14;-3)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=5\overrightarrow{p}+4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}+4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=1$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(3;-2)$, $B(1;5)$, $C(-4;3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(-1;0;-6)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1};\quad l_2:\quad \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho=2\sin 4\varphi;\quad б)\ \ \rho=\frac{2}{\sqrt{3}-2\cos\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $12x^2-2y-5z^2=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2+y^2+z^2=9$, $y^2+x^2-6z=0$.

Варіант 16

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 + 3x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & -1 & 8 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 8 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а)}\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{Vmatrix}; \quad \text{б)}\ A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} -5 & 4 \\ 5 & -5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 6, \\ 4x + 3y - 2z = 5, \\ x - 3y + z = -1, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 5, \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (3;1;2)$, $\overrightarrow{b} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{c} = (-1;2;5)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (1;2;3)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 3$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{2\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-1;-1)$, $B(2;-1)$, $C(0;4)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB, BC, *медіани* AM;
б) рівняння висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(0;3;0)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$\text{а)}\ \ \rho = 3\cos 3\varphi; \quad \text{б)}\ \ \rho = \frac{2}{\sqrt{2} - 2\cos\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $9x^2 - y^2 - z^2 = 9$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 + y^2 = z$, $\ y = x^2$, $\ y = 1$, $\ z = 0$.

Варіант 17

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 8x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -8 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 4y - z = 5, \\ x - 2y + 3z = 2, \\ 5x - y + 4z = 8, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;2;3)$, $\overrightarrow{b}=(1;-3;-1)$, $\overrightarrow{c}=(-4;2;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(1;2;6)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{p}+2\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=3$, $|\overrightarrow{q}|=2$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{4}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;2)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(1;0;-1)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1};\quad l_2:\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{0}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=3\cos 4\varphi$; *б)* $\rho=\frac{2}{\sqrt{3}+2\cos\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $4x^2+z^2=9+y$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$4x^2=y,\quad y=x^2,\quad y+z=4,\quad z=0.$$

Варіант 18

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 8x + 12.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & -6 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -7 \\ -1 & -5 & 0 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 7 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) \ A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{Vmatrix}; \quad б) \ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 19, \\ x - 3y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = 15, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 13x_4 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 20x_4 = 37, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 19. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_4(-4;8;-12)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;2;3)$, $\overrightarrow{b}=(-4;1;-2)$, $\overrightarrow{c}=(2;-3;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(5;-6;-2)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$*, який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$*, якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{p}-4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=3$, $|\overrightarrow{q}|=1$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(3;1)$, $B(5;4)$, $C(1;3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC*, медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_4(-4;8;-12)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H*, проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(0;3;1)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3};\quad l_2:\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=3(\cos\varphi+1)$; *б)* $\rho=\frac{2}{\sqrt{2}+2\cos\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $x^2+4y^2-16y+z^2+2x+13=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2+y^2+z^2=9$, $y^2+x^2=9-6z$, $z\geq 0$.

Варіант 19

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 3x^2 - 5x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ 9 & -2 & 2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & -6 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -7 & 3 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$a)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 12, \\ -2x + 3y + z = 2, \\ x + 2y + 2z = 5, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-1;3;-4)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$, $M_4(3;4;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2;4;3)$, $\overrightarrow{b} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{c} = (4;4;5)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (11;14;12)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{5\pi}{6}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-1;3;-4)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$, $M_4(3;4;5)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(3;0;1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{3}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 3\cos 3\varphi$; *б)* $\rho = \frac{2}{\sqrt{2}-2\cos\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $9x^2 + y^2 + 9z^2 = 9$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z^2 = y^2 + x^2$.

Варіант 20

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 8x + 12.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 5x + 4y - z = 16, \\ x + 3y + 2z = 12, \\ 4x - y + 3z = 12, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 10, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;0;-2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(2;-2;1)$, $M_4(2;1;0)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (4;1;1)$, $\overrightarrow{b} = (2;0;-3)$, $\overrightarrow{c} = (-1;2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (-9;5;5)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;0;-2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(2;-2;1)$, $M_4(2;1;0)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(1;-3;1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-13}{1}; \quad l_2: \quad \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 3\cos 3\varphi$; *б)* $\rho = \frac{4}{\sqrt{3-2\sin\varphi}}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $9x^2 - 16y^2 - z^2 = 9$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$4 - y^2 = z, \quad z = y^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 2.$$

Варіант 21

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 2x^2 - 6x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 3 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0, \\ x + 2y - 3z = 3, \\ 4x + 3y + 4z = 18, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1;2;-3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-2;-1;6)$, $M_4(0;-5;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (3;0;2)$, $\overrightarrow{b} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{c} = (-1;1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (8;1;12)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 4$, $|\overrightarrow{q}| = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-3;-2)$, $B(2;0)$, $C(-1;1)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;2;-3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-2;-1;6)$, $M_4(0;-5;-4)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(-1;3;0)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}; \quad l_2: \quad \frac{x}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho = 1 + \cos 2\varphi; \quad б)\ \ \rho = \frac{3}{\sqrt{3} + 2\sin\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $9x^2 + y^2 + 4z^2 = 2y$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x = y$, $\ x + y = 2$, $\ y = z^2$.

Варіант 22

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 8x + 12.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 9 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 5 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & 4 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 13, \\ x - 3y + z = -2, \\ 2x + 5y + 3z = 19, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(3;9;-1)$, $M_2(-3;4;-6)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(2;3;3)$, $\overrightarrow{b}=(-3;4;2)$, $\overrightarrow{c}=(1;-2;-3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(-1;5;-2)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=1$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{2\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-1;-3)$, $B(2;4)$, $C(3;-1)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(3;9;-1)$, $M_2(-3;4;-6)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(2;3;5)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1};\quad l_2:\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві:

$$а)\ \ \rho=1+\cos 2\varphi;\quad б)\ \ \rho=\frac{2}{\sqrt{3}-2\sin\varphi}.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $9x^2+y^2+4z^2=8z$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x=y,\ \ x+y=2,\ \ y=z^2$.

Варіант 23

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 2x^2 - 6x + 1.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 7 \\ -5 & -3 & 4 \\ 8 & -4 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$a) \ A = \begin{Vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}; \quad б) \ A = \begin{Vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 11, \\ 3x + y + z = 6, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(3;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(0;4;1)$, $\overrightarrow{b}=(1;3;-1)$, $\overrightarrow{c}=(-2;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(-5;-5;5)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=5\overrightarrow{p}-6\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=4$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(3;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-7}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2};\quad l_2:\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а* $\rho=1+\cos\varphi$; *б)* $\rho=\frac{2}{\sqrt{2}-2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $12x^2+3y^2-4z^2+24=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x=y,\quad x=1,\quad z=x^2+3y^2,\quad z=0,\quad y=0.$$

Варіант 24

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 8x + 12.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$*; б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$*, якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 3 \\ -3 & 4 & 8 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; C = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}.$

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 5y - z = 16, \\ x + 2y - z = 5, \\ x - 3y + 4z = 5, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-3;-2;-2)$, $M_2(1;4;3)$, $M_3(4;2;-3)$, $M_4(-3;8;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(0;4;1)$, $\overrightarrow{b}=(1;3;-1)$, $\overrightarrow{c}=(-2;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(-5;-5;5)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=5\overrightarrow{p}-6\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=2$, $|\overrightarrow{q}|=4$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-3;-2;-2)$, $M_2(1;4;3)$, $M_3(4;2;-3)$, $M_4(-3;8;4)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x-7}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2};\quad l_2:\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=1+\cos\varphi$; *б)* $\rho=\frac{2}{\sqrt{2}-2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $12x^2+3y^2-4z^2+24=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x=y,\quad x=1,\quad z=x^2+3y^2,\quad z=0,\quad y=0.$$

Варіант 25

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 3x^2 + 5x + 2.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & -1 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \\ -5 & 1 & 3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}; \quad б)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 2 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix}$; $C = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 3x + 2y - z = 6, \\ x + 3y + 4z = 13, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(2;0;2)$, $M_2(-1;1;4)$, $M_3(3;2;0)$, $M_4(3;-1;-3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(4;2;3)$, $\overrightarrow{b}=(-3;5;2)$, $\overrightarrow{c}=(2;-1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d}=(5;9;8)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{p}-4\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{p}-4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}|=3$, $|\overrightarrow{q}|=5$, $(\widehat{\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}})=\frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(-2;-1)$, $B(2;-1)$, $C(0;3)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(2;0;2)$, $M_2(-1;1;4)$, $M_3(3;2;0)$, $M_4(3;-1;-3)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(1;1;-1)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho=1+\cos\varphi$; *б)* $\rho=\frac{2}{\sqrt{2}-2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $4x^2-3y^2+6z^2-18=0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x=y, \quad x=1, \quad z=x^2+y^2, \quad z=0, \quad y=0.$$

Варіант 26

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \left\|\begin{matrix} 2 & 5 \\ 4 & 5 \end{matrix}\right\|; \quad f(x) = x^2 + 5x + 12.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \left\|\begin{matrix} -2 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{matrix}\right\|; \quad B = \left\|\begin{matrix} -1 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \end{matrix}\right\|; \quad C = \left\|\begin{matrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \left\|\begin{matrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{matrix}\right\|; \quad б)\ A = \left\|\begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \left\|\begin{matrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{matrix}\right\|$; $B = \left\|\begin{matrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}\right\|$.$C = \left\|\begin{matrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{matrix}\right\|$.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 6, \\ x + 3y + 4z = 8, \\ 2x + 4y - z = 5, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(-3;-1;-5)$, $M_2(-2;6;0)$, $M_3(3;-9;-5)$, $M_4(0;-5;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (0;4;1)$, $\overrightarrow{b} = (1;3;-1)$, $\overrightarrow{c} = (-2;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (-5;-5;5)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} - 6\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD;
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(-3;-1;-5)$, $M_2(-2;6;0)$, $M_3(3;-9;-5)$, $M_4(0;-5;5)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{2}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 1 + \cos\varphi$; *б)* $\rho = \frac{2}{\sqrt{2} - 2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x = y, \quad x = 1, \quad z = x^2 + 3y^2, \quad z = 0, \quad y = 0.$$

Варіант 27

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = 4x^2 + 3x + 2.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$, *якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 & 8 \\ -1 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\textit{а)}\ \ A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{Vmatrix}; \quad \textit{б)}\ \ A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$.$C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{Vmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь: \$ $\begin{cases} 7x - 2y - z = 1, \\ x + 3y + 2z = 11, \\ 2x + 4y + 3z = 16, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(1; 5; -7)$, $M_2(-3; 6; 3)$, $M_3(-2; 7; 3)$, $M_4(-4; 8; -12)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\, M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (0;4;1)$, $\overrightarrow{b} = (1;3;-1)$, $\overrightarrow{c} = (-2;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (-5;-5;5)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{p} - 6\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У $\triangle\, ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_4(-4;8;-12)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1: \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{2}; \quad l_2: \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1;
б) з'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2;
в) скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = 1 + \cos\varphi$; *б)* $\rho = \frac{2}{\sqrt{2} - 2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x = y, \quad x = 2, \quad z = 3x^2 + 2y^2, \quad z = 0, \quad y = 0.$$

Варіант 28

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладу за елементами деякого рядка;
б) методом розкладу за елементами деякого стовпчика;
в) зведенням до трикутного вигляду.

2. Дано матрицю A. Знайти $f(A)$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{Vmatrix}; \quad f(x) = x^2 - 7x - 2.$$

3. Для матриць A, B, C знайти: *а) матрицю* $2A + 3B$; *б) матриці* $A \cdot B$ *та* $C \cdot B$*, якщо*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -3 \\ -1 & -4 & 0 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{Vmatrix}$$

4. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) \;\; A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}; \quad б) \;\; A = \begin{Vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо $A = \begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}.$

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x - 4y + 2z = 5, \\ 2x + y - 3z = -6, \\ 3x - 2y - z = -2, \end{cases}$

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричним методом.

7. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язок системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

8. Дано координати точок $M_1(3;4;1)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(4;1;5)$, $M_4(7;-3;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\triangle\ M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H.

9. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (0;1;5)$, $\overrightarrow{b} = (3;-1;2)$, $\overrightarrow{c} = (-1;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\overrightarrow{d} = (8;-7;-13)$ *в цьому базисі*;
б) одиничний вектор $\overrightarrow{x}$, *який ортогональний до векторів* $\overrightarrow{a}$ *та* $\overrightarrow{b}$, *якщо вектор* $\overrightarrow{x}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

10. Дано вектори $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 3$, $|\overrightarrow{q}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{2}$. Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

11. Дано точки $A(4;7)$, $B(-3;8)$, $C(-5;4)$. У $\triangle\ ABC$ знайти:
а) рівняння сторін AB,BC, *медіани* AM;
б) рівняння і довжину висоти CD;
в) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно* CD.
г) кут між висотою і медіаною;
д) площу трикутника.

12. Дано координати точок $M_1(3;4;1)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(4;1;5)$, $M_4(7;-3;2)$. Знайти:
а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
б) довжину і рівняння перпендикуляра M_4H, *проведеного з точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;
в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;
г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;
д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$.

13. Задано точку $M_0(-1;1;-3)$ та прямі

$$l_1:\quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2};\quad l_2:\quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 *та пряму* l_1.
б) З'ясувати взаємне розташування прямих l_1 *та* l_2.
в) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *паралельно* l_2.

14. У полярній системі координат побудувати криві: *а)* $\rho = \cos 2\varphi$; *б)* $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}-2\sin\varphi}$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню: $4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0$.

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x = y,\quad x = 1,\quad z = 2x^2 + 2y^2,\quad z = 0,\quad y = 0.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1. *Знайти значення матричного многочлену $f(A)$ для квадратної матриці* $A = \left\|\begin{matrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{matrix}\right\|$, *якщо* $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$. *Обчислюємо*

$$A^2 = \left\|\begin{matrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{matrix}\right\|$$

Тоді

$$f(x) = 3A^2 + 4A - 2 = 3\left\|\begin{matrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{matrix}\right\| + 4\left\|\begin{matrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}\right\| - 2\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 37 & -4 \\ -8 & 29 \end{matrix}\right\|$$

Приклад 2. *Для матриць* $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, *та* $B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 & 0\cdot(-1) + 1\cdot(-5) \\ -2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & -2\cdot 1 + 3\cdot 0 & -2\cdot 2 + 3\cdot 7 & -2\cdot(-1) + 3\cdot(-5) \\ 10\cdot 3 + 9\cdot(-1) & 10\cdot 1 + 9\cdot 0 & 10\cdot 2 + 9\cdot 7 & 10\cdot(-1) + 9\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & -5 \\ -9 & -2 & 17 & -13 \\ 21 & 10 & 83 & -55 \end{pmatrix} = C_{3\times 4}.$$

Приклад 3. *Обчислити визначник за допомогою теореми Лапласа:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 9 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 121 + 0 + 62 + 36 = 219.$$

Приклад 4. *Обчислити визначник шляхом зведення його до трикутного вигляду:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи властивості визначників, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} \cdot 2 & \cdot 9 \\ \leftarrow + & | \\ & \leftarrow + \\ & \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 19 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} & \\ \cdot(-5) & \cdot 1 \\ \leftarrow + & | \\ & \leftarrow + \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -21 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 1 \\ \leftarrow + \end{array} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-7) \\ \leftarrow + \end{array} =$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -73 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-73) = 219.$$

Приклад 5. *Знайти матрицю, обернену до матриці* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо визначник матриці: $\det A = 3 \neq 0$. *Отже,* A^{-1} *існує. Окремо обчислюємо алгебраїчні доповнення до елементів* A*:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Підставляємо отримані значення у формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. *Розв'язати СЛАР методом Гауса:* $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$

Переставимо місцями перше та друге рівняння системи, випишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-7) \\ \leftarrow + \\ \quad \leftarrow + \\ \qquad \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1)\cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \quad \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4 = n$. *Таким чином, дана СЛАР є сумісною і невизначеною. Оберемо в якості головних змінних* (x_1, x_2). *Дійсно, відповідний мінор* $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. *Випишемо перетворену систему та знайдемо її загаль ний розв'язок:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Перенесемо у праві частини рівнянь вільні змінні (x_3, x_4)*:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Звідси $x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4$, *та* $x_1 = 2 + 5x_3 + x_2 = -1 - 8x_3 + 5x_4$. *Тоді загальний розв'язок системи:* $X_{з.р.} = \begin{pmatrix} -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ -3 - 13x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. *Якщо покласти, наприклад,* $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, *отримаємо частинний розв'язок:* $X_{ч.р.} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 7. *Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$ *і* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, *якщо* $|\overrightarrow{p}| = 1$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$, *утворюють вектори* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$ *?* $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}$.

Знайдемо спочатку $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2$. *Використовуючи властивість скалярного добутку, отримаємо*

$$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2 = \left(3\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}\right)^2 = 9\left(\overrightarrow{p}^2 + 2\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} + \overrightarrow{q}^2\right) =$$

$$= 9\Big(|\overrightarrow{p}|^2 + 2|\overrightarrow{p}|\cdot|\overrightarrow{q}|\cdot\cos\varphi + |\overrightarrow{q}|^2\Big) = 9\Big(1 + 2\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 4\Big) = 63,$$

звідки $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Аналогічно,

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = \Big(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\Big)^2 = \Big(\overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}\Big)^2 = \Big(\overrightarrow{p}^2 - 10\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} + 25\overrightarrow{q}^2\Big) =$$

$$= \Big(|\overrightarrow{p}|^2 - 10|\overrightarrow{p}|\cdot|\overrightarrow{q}|\cdot\cos\varphi + 25|\overrightarrow{q}|^2\Big) = \Big(1 - 10\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 25\Big) = 91,$$

звідки $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = \sqrt{91}$.

Приклад 8. *Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$ *і* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, *якщо* $|\overrightarrow{p}| = 1$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

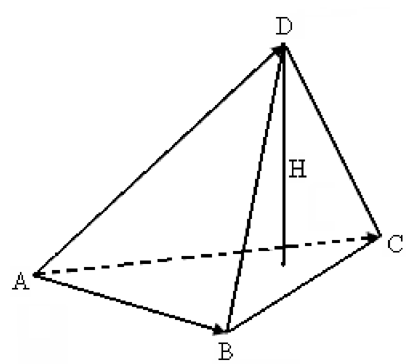
Скористуємось означенням та властивостями векторного добутку:

$$S = \Big|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\Big| = \Big|(2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}) \times (\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q})\Big| = \Big|8(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) - \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{p}\Big| = \Big|9(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})\Big| =$$

$$= 9\cdot|\overrightarrow{p}|\cdot|\overrightarrow{q}|\cdot|\sin\varphi| = 9\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3}.$$

Приклад 9. *Знайти площу основи* ABC, *об'єм та довжину висоти трикутної піраміди, вершинами якої є точки* $A(1,2,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(2,5,2)$, $D(3,0,-2)$.

Складемо три вектори, які мають спільний початок (наприклад, у вершині A*):* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (-1,-3,-2)$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC} = (1,3,-1)$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD} = (2,-2,-5)$.



Тоді з властивостей векторного добутку матимемо, що

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

Знайдемо окремо

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = 9\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}.$$

Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$.

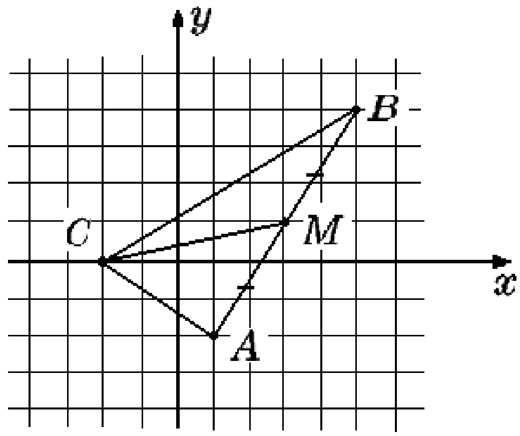
Об'єм піраміди:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$$

Знайдемо висоту піраміди, опущеної з вершини D:

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{3}{2}\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Приклад 10. *Дано вершини трикутника ABC: $A(1,-2)$, $B(5,4)$, $C(-2,0)$. Скласти рівняння сторони AB трикутника, рівняння бісектриси AL, рівняння висоти BN, рівняння медіани CM, рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно AB. Знайти довжину висоти BN.*



Складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона трикутника AB, як рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$$AB: \quad \frac{x-1}{5-1} = \frac{y+2}{4+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{6},$$

звідки

$$AB: \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

Складемо рівняння бісектриси AL. Для цього знайдемо координати точки L, використовуючи властивість бісектриси трикутника: $\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Оскільки $|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52}$, і $|AC| = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$, то $\lambda = \frac{|BL|}{|LC|} = 2$. За формулою поділу відрізка у заданному відношенні:

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{1}{3}, \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{4}{3},$$

звідки $L(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Таким чином, рівняння прямої, на якій лежить бісектриса внутрішнього кута при вершині A трикутника ABC:

$$AL: \quad \frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \quad \Leftrightarrow \quad 5x + y - 3 = 0.$$

Перед тим, як скласти рівняння висоти BN, складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона AC, як рівняння прямої, що проходить черз дві точки:

$$AC: \quad \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{0+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{2},$$

звідки

$$AC: \quad 2x + 3y + 4 = 0.$$

Тепер складемо рівняння прямої, на якій лежить висота BN, як рівняння прямої, перпендикулярної AC, що проходить через точку B. Оскільки вектор $\overrightarrow{n} = (2,3)$ — нормальний вектор прямої AC, то він є напрямним вектором прямої BN. Тому шукане рівняння висоти

$$BN: \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

Виявляється, що пряма, на якій лежить висота BN, співпадає з прямою, на якій лежить сторона AB. Таким чином, точка N співпадає з точкою A, а кут при вершині A — прямий.

Обчислимо довжину висоти BN за формулою відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{\left|2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

Для того, щоб скласти рівняння прямої, на якій лежить медіана CM знайдемо координати точки M за формулами середини відрізка AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Тому рівняння медіана

$$CM: \quad \frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{5} = \frac{y}{1},$$

звідки

$$CM: \quad x - 5y + 2 = 0.$$

Нарешті, складемо рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB. Оскільки паралельні прямі мають колінеарні нормальні вектори, то нормальний венктор $\overrightarrow{n} = (3,-2)$ прямої AB можна вважати також нормальним вектором шуканої прямої. Тоді за рівнянням прямої, що проходить через задану точку $C(-2,0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (3,-2)$, рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$3(x+2) - 2(y-0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y + 6 = 0.$$

Приклад 11. *Знайти точку, симетричну точці $M(3,4,5)$ відносно площини $x-2y+z-6 = 0$.*

Спочатку складемо рівняння прямої L, що проходить через точку $M(3,4,5)$ перпендикулярно до площини Q: $x-2y+z-6 = 0$. Оскільки нормальний вектор площини $\overrightarrow{n} = (1,-2,1)$ є паралельним шуканій прямій, то можна вважати, що вектор $\overrightarrow{S} = (1,-2,1)$ є напрямним векторм прямої L. Підставляючи координати точки $M(3,4,5)$ та координати напрямного вектора $\overrightarrow{S}$ у канонічне рівняння прямої, отримаємо

$$L: \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} = t.$$

Знайдемо точку O перетину прмої L з площиною Q. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 5 + t, \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останне рівняння системи, матимемо

$$3 + t - 2(4 - 2t) + 5 + t - 6 = 0.$$

Звідси $t = 1$, а отже, $x = 3 + 1 = 4$, $y = 4 - 2 = 2$, $z = 5 + 1 = 6$. Таким чином, $O(4, 2, 6)$ — точка перетину прямої L з площиною Q.

Нарешті, знайдемо координати точки $N(x_N, y_N, z_N)$, симетричної точці M відносно площини Q. Оскільки точка O є серединою відрізка MN, то

$$x_O = \frac{x_M + x_N}{2}, \quad y_O = \frac{y_M + y_N}{2}, \quad z_O = \frac{z_M + z_N}{2},$$

звідки

$$x_N = 2x_O - x_M = 5, \quad y_N = 2y_O - y_M = 0, \quad z_N = 2z_O - z_M = 7.$$

Остаточно, $N(5, 0, 7)$ — точка, симетрична M відносно площини Q.

Приклад 12. *Знайти проекцію точки $M(2, 8, 0)$ на пряму L:*

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Спочатку складемо рівняння площини P, що проходить через точку $M(2, 8, 0)$ перпендикулярно до прямої L. Очевидно, напрямний вектор $\overrightarrow{S} = (-3, 1, -1)$ прямої L є нормальним вектором шуканої площини P. Тому запишемо загальне рівняння площини P.

$$P: \quad -3(x - 2) + 1(y - 8) - 1(z - 0) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y + z + 2 = 0.$$

Знайдемо точку O перетину прмої L з площиною Q. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - t, \\ 3x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останнє рівняння системи, матимемо

$$3(1 - 3t) - (-3 + t) + (3 - t) + 2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad 11t = 11.$$

Звідси $t = 1$, а отже, $x = 1 - 3 = -2$, $y = -3 + 1 = -2$, $z = 3 - 1 = 2$. Таким чином, $O(-2, -2, 2)$ — точка перетину прямої L з площиною P. Ця точка і є проекцією точки $M(2, 8, 0)$ на пряму L.

Список рекомендованої літератури

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*, - М.: Наука, 1988.
2. Воеводин В.В. *Линейная алгебра*, - М.: Наука, 1980.
3. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*, - М.: Физматгиз, 2010.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, - К.: Вища школа, 1998.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов*, 6-е изд., стер., - М.:Физматгиз, 2004.
6. Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 1 часть. - М.: Айрис Пресс, 2006.
7. Постников М.М. *Аналитическая геометрия*, - М.: Наука, 1979.
8. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре*, - М.: Наука, 1966.
9. Фаддеев Д.К. *Лекции по алгебре*, - М.: Наука, 1984.
10. Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*, - М.: Физматгиз, 1998.
11. Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, - Спб,: Лань, 2003.
12. *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа*, под редакцией Ефимова Н.В., Демидовича В.П. - М.: Наука, 1981.
13. *Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1*, Под редакцией Рябушко А.П. - Мн.: Высшая школа, 1990.