

Ярослав Дубик, Ірина Селіверстова, Андрій Богдан

## ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТЬ КОРОТКОГО ТА ДОВГОГО РІШЕНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ДЛЯ АНАЛІЗУ НДС ТРУБОПРОВОДІВ ІЗ КУТОВОЮ НЕСПІВВІСНІСТЮ

**Актуальність теми дослідження.** Секторні згини труб мають широке застосування в промисловості, особливо для трубопроводів великого діаметра, також зварні шви на практиці часто мають куту неспіввісність через технологічний процес стику двох прямих частин труби. Тому важливо забезпечити структурну міцність та надійність таких з'єднань, а також покращити здатність секторних згинів зберігати форму та технічні характеристики під впливом навантажень.

**Постановка проблеми.** Наявні вирази для оцінки напружень у зоні косоного зварного з'єднання отримані на основі узагальнення експериментальних результатів та чисельних розрахунків. Чисельні методи мають значні можливості у вирішенні практичних задач, але не можуть пояснити природу рішення та кількісний ступінь впливу безрозмірних параметрів. Тому важливо розробити аналітичні підходи, що дають гнучкість у аналізі результатів, та виділити найбільш впливові параметри.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Розглянуті сучасні публікації в закордонних та вітчизняних джерелах, які пов'язані з цією науковою проблемою.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Робота є продовженням попередніх досліджень авторів, та удосконалює підхід застосування понять коротких та довгих розв'язків у частині точного рішення системи диференціальних рівнянь четвертого ступеня.

**Постановка завдання.** Отримати аналітичний розв'язок для визначення напруженого стану трубопроводу в зоні кутової неспіввісності зварного шва.

**Виклад основного матеріалу.** Основна ідея роботи полягає в застосуванні понять короткого та довгого розв'язків теорії оболонок, та їх поєднане використання для аналізу напружено-деформованого стану трубопроводів з кутовою неспіввісністю зварних швів.

**Висновки відповідно до статті.** Вводяться поняття короткого та довгого розв'язку, які дають можливість замінити рівняння восьмого порядку теорії оболонок, системою з двох рівнянь четвертого порядку. Ефективність розв'язків продемонстровано для двох випадків навантаження (внутрішній тиск та згинальний момент), аналітичні результати порівнюються з чисельними МСЕ та експериментальними даними.

**Ключові слова:** циліндрична оболонка; кутова неспіввісність; наближений розв'язок, аналітичні рішення; радіальні переміщення.

Рис.: 4. Бібл.: 10.

**Актуальність теми дослідження.** Зазвичай магістральні трубопроводи при проектуванні моделюються як балки, розрахунок яких на міцність виконується методами будівельної механіки [1]. Не є винятком і ділянки, де замість плавних згинів використовуються секторні згини або мають місце недосконалість геометрії, зумовлені наявністю монтажних неспіввісностей зварних швів [2], або діють додаткові навантаження, наприклад, від використання утяжувачів на ділянках баластування трубопроводу тощо. Проте різка зміна осі трубопроводу в секторних згинах або недосконалість зварних з'єднань при зовнішньому навантаженні внутрішнім тиском або за дії глобального згинального моменту викликають локальні згинальні моменти по товщині стінки труби, які не враховуються в балочних моделях. Під час аналізу додаткових навантажень на ділянках баластування трубопроводів вважається, що гранична вага (стримувальна здатність) утяжувачів і відстань між ними в балочних моделях визначаються з умов рівності глобального згинального моменту його критичному значенню [3; 4]. Однак у місцях опирання утяжувачів виникає локальний напружений стан, що характеризується локальними згинальними моментами в трубопроводі при розгляді його як оболонки з відповідною зміною форми поперечного перерізу (овалізацією).

**Постановка проблеми.** Розробка точних аналітичних підходів на основі рівнянь теорії оболонок, що враховують локальні недосконалість геометрії та отримання зрозумілих рішень для визначення концентрації напружень з використанням безрозмірних параметрів залишається актуальною науково-технічною проблемою.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Незважаючи на достатній обсяг закордонних публікацій [5; 6], присвячених вивченню та аналізу напруженого стану труб із

дефектами геометрії типу кутова неспіввісність у вітчизняній нормативно-технічній літературі відсутні як методи, так і рекомендації щодо їх можливого визначення. Вирази для визначення концентрації напружень біля секторного згину в сучасних стандартах часто замінюються відповідними виразами для гладкого згину труб [7].

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Робота є продовженням попередніх досліджень авторів [8] та удосконалює підхід до застосування понять коротких та довгих розв'язків у частині використання точного рішення системи диференціальних рівнянь четвертого ступеня.

**Постановка завдання.** Отримати аналітичний розв'язок для визначення напруженого стану трубопроводу в зоні кутової неспіввісності зварного шва.

**Виклад основного матеріалу. Математичне формулювання.** Рівняння рівноваги циліндричної оболонки є загальновідомими [9]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial L}{R \partial \varphi} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{R \partial \varphi} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{Q_\varphi}{R} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{R \partial \varphi} - \frac{N_\varphi}{R} = 0, \quad (3)$$

де  $N_x, N_\varphi$  – осьова та колова сили;  $L$  – дотична сила,  $Q_x, Q_\varphi$  – поперечні сили. Також нам знадобляться вирази для поперечних сил, представлені через переміщення:

$$Q_x = D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial x \partial \varphi^2} - \frac{(1 + \mu)}{2R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} \right], \quad (4)$$

$$Q_\varphi = D \left[ \frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \varphi^3} - \frac{\partial^2 v}{R^3 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 w}{R \partial x^2 \partial \varphi} - \frac{(1 - \mu) \partial^2 v}{2R \partial x^2} \right]. \quad (5)$$

Зазвичай для розв'язку задач теорії оболонок використовують розклад у ряд Фур'є:

$$\Phi = \left( \sum_{n=0} \varphi_n \cos n\varphi \text{ або } \sum_{n=1} \varphi_n \sin n\varphi \right). \quad (6)$$

Нижче розглянемо поняття короткого та довгого рішень теорії оболонок, скористаємось припущенням, що амплітуда радіальних переміщень  $w > (v, u)$  завжди більша, ніж інші компоненти переміщень.

#### Коротке рішення

Припустимо, що  $d^2 \Phi / dx^2 \gg d^2 \Phi / (R d\varphi)^2$ , тоді, враховуючи (4)–(5)  $Q_\varphi \ll Q_x$ , можемо знехтувати  $Q_\varphi$  у системі (2). Виключаючи  $L$  в (1), ми отримаємо що  $\partial^2 N_\varphi / \partial \varphi^2 \approx \partial^2 N_x / \partial x^2$ . Згідно з нашим припущенням, ми можемо записати  $N_\varphi \gg N_x$ . Таким чином, ми можемо стверджувати, що

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x \approx -\mu \varepsilon_\varphi, \\ N_\varphi &= -H(1 - \mu^2) \varepsilon_\varphi = -Eh \varepsilon_\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (2), отримуємо:

$$E \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{R \partial \varphi} + G \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \varphi} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{R \partial \varphi} (E - \mu G) + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{R^2 \partial \varphi} + \left( \frac{G}{E - \mu G} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Враховуючи характер функції, ми можемо зробити висновок із (8), що  $\partial v / \partial \varphi \ll w$ , та  $\varepsilon_\varphi \approx w / R$ . Тому:

$$N_\varphi = -Ehw / R. \quad (9)$$

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

Підставивши (9) у (3) з врахуванням (4)–(5), нехтуючи кільцевими переміщеннями, ми отримаємо диференційне рівняння 4-го порядку відносно  $w(x, \varphi) = \Phi_n(x) \cdot \cos(n\varphi)$ :

$$\frac{d^4 \Phi_n(x)}{dx^4} - 2A \frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} + B \Phi_n = 0, \text{ де} \tag{10}$$

$$A = \mu \frac{n^2}{R^2}, \quad B = \left(\frac{n}{R}\right)^4 + 12 \frac{(1-\mu^2)}{R^2 h^2}$$

I, нехтуючи зростаючими членами, отримаємо розв'язок (10):

$$\Phi_n(x) = C_1 e^{-c_n x} \cos(d_n x) + C_2 e^{-c_n x} \sin(d_n x), \tag{11}$$

де  $\rho \cos \psi = c_n, \rho \sin \psi = d_n, \rho^2 = \sqrt{A^2 + D^2}, 2\psi = \arctg(D/A)$ . Коротке рішення характеризується чотирма головними параметрами: це радіальне переміщення  $w$ , кут повороту  $\gamma_x$ , осьовий момент  $M_x$  та поперечна сила  $Q_x$ . Для останніх двох параметрів маємо такі вирази:

$$M_x = H\delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} \right); \quad Q_x = D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial x \partial \varphi^2} \right) \tag{12}$$

У кінцевому вигляді короткий розв'язок представимо:

$$w = (C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)) \cos(n\varphi) \tag{13}$$

$$\gamma_x = -(C_1 (-aF_1(x) - bF_2(x)) + C_2 (-aF_2(x) + bF_1(x))) \cos(n\varphi) \tag{14}$$

$$M_x = H\delta \left[ \begin{matrix} C_1 (F_1(x)((a)^2 - (b)^2) + 2abF_2(x) \\ C_2 (F_2(x)((a)^2 - (b)^2) - 2baF_1(x) \end{matrix} \right) - \mu \frac{n^2}{R^2} (C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)) \cos(n\varphi) \tag{15}$$

$$Q_x = D \left[ \begin{matrix} C_1 ((-a)^3 + 3a(b)^2) F_1(x) + ((b)^3 - 3b(a)^2) F_2(x) + \\ C_2 (-a)^3 + 3a(b)^2 F_2(x) + (-b)^3 + 3b(a)^2 F_1(x) - \\ - \frac{n^2}{R^2} (C_1 (-aF_1(x) - bF_2(x)) + C_2 (-aF_2(x) + bF_1(x))) \end{matrix} \right] \cos(n\varphi) \tag{16}$$

$$v(x, \varphi) = \left[ \begin{matrix} \left( \frac{n(2C_2 ab(\mu + 2) + C_1(\mu + 2)(a^2 - b^2))}{R^2(a^2 + b^2)^2} \right) F_1(x) + \\ + \left( -\frac{n(2C_1 ab(\mu + 2) + C_2(\mu + 2)(b^2 - a^2))}{R^2(a^2 + b^2)^2} \right) F_2(x) \end{matrix} \right] \sin(n\varphi) \tag{17}$$

$$u(x, \varphi) = (A_1 F_1(x) + A_2 F_2(x)) \cos(n\varphi) = \left( \frac{\mu(C_1 a + C_2 b)}{R(a^2 + b^2)} F_1(x) - \frac{\mu(C_1 b + C_2 a)}{R(a^2 + b^2)} F_2(x) \right) \cos(n\varphi) \tag{18}$$

$$L(x, \varphi) = [(E_1 C_1 + E_2 C_2) F_1(x) - (E_2 C_1 - E_1 C_2) F_2(x)] \sin(n\varphi)$$

$$E_1 = - \left( \frac{R^4(a^4 - 2a^2 b^2 - 3b^4) - 2R^2 \mu n^2(a^2 + b^2) + 2R^2 \mu(a^2 + b^2) - R^2(a^2 + b^2) + n^4 - n^2}{(a^2 + b^2) R^4} \right) a D n \tag{19}$$

$$E_2 = \left( \frac{R^4(3a^4 + 2a^2 b^2 - b^4) - 2R^2 \mu n^2(a^2 + b^2) + 2R^2 \mu(a^2 + b^2) - R^2(a^2 + b^2) - n^4 + n^2}{(a^2 + b^2) R^4} \right) b D n$$

$$N_x(x, \varphi) = \left[ \begin{matrix} \left( \frac{C_1(E_1 a - E_2 b)n}{(a^2 + b^2)R} + \frac{C_2(E_1 b + E_2 a)n}{(a^2 + b^2)R} \right) F_1(x) + \\ \left( -\frac{C_1(E_1 b + E_2 a)n}{(a^2 + b^2)R} + \frac{C_2(E_1 a - E_2 b)n}{(a^2 + b^2)R} \right) F_2(x) \end{matrix} \right] \cos(n\varphi) \tag{20}$$

Тут введено функції  $F_1(x) = e^{-c_n x} \cos(d_n x)$ ,  $F_2(x) = e^{-c_n x} \sin(d_n x)$ . Крім чотирьох основних параметрів коротке рішення (13)–(16) породжує довге рішення (17)–(20) для визначення: колового переміщення  $v$ , осьового переміщення  $u$ , бічної сили  $L$  та осьової сили  $N_x$ , вирази для яких отримано в явному вигляді.

Зауважимо, що при  $n=0$  коротке рішення – добре відомий вісесиметричний краєвий ефект у циліндричних оболонках, який розглянуто у більшості підручниках з опору матеріалів, при цьому  $L = N_x \equiv 0$ .

### Довге рішення

Припустимо, що  $d^2\Phi/dx^2 \ll d^2\Phi/(Rd\varphi)^2$ , тоді з (3) та (4)–(5) отримаємо, що  $\partial Q_\varphi / \partial \varphi \approx N_\varphi$ . Потім виключаємо дотичну силу з (1) та (2), відповідно отримаємо, що  $\partial^2 N_\varphi / \partial \varphi^2 \approx \partial^2 N_x / \partial x^2$ . Згідно з нашим припущенням,  $N_\varphi \ll N_x$ . Тепер можна стверджувати, що  $\varepsilon_\varphi \approx -\mu\varepsilon_x$ , та:

$$N_x = -H(1 - \mu^2) = -Eh(\partial u / \partial x). \quad (21)$$

Продиференціюємо рівняння (3) відносно кутової координати  $\varphi$  один раз та віднімемо від рівняння (2). Диференціюючи отримане рівняння один раз по координаті  $\varphi$  і замінивши його на співвідношення (1), яке було продиференційовано по координаті  $x$ , отримуємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 Q_x}{\partial \varphi^2 \partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 Q_\varphi}{\partial \varphi^3} = 0. \quad (22)$$

Підставляючи значення поперечних сил (4) та (5) і виражаючи  $N_x$  з (21), рівняння (22) буде записано через функції  $u(x, \varphi)$ ,  $v(x, \varphi)$ ,  $w(x, \varphi)$ . У цьому випадку, згідно з припущеннями  $\frac{\partial v}{\partial \varphi} \approx -w$  та  $\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , вираз (22) можна представити лише через тангенціальні переміщення  $v(x, \varphi, t)$ :

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{R^2 12(1 - \mu^2)}{h^2} v \right) + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( 2 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 v - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{R^4} \left[ \left( \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 v \right] = 0. \quad (23)$$

Представимо переміщення  $v(x, \varphi)$  як  $v(x, \varphi) = \Phi(x) \cdot \sin(n\varphi)$ , тоді рівняння (23) перепишеться:

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - 2A \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + B \Phi(x) = 0, \quad (24)$$

$$\text{де } A = \frac{1}{R^2} \frac{n^6 - n^4 + \frac{n^2(1 - \mu)}{4}}{n^4 + \frac{R^2 12(1 - \mu^2)}{h^2}}; \quad B = \frac{1}{R^4} \frac{n^4(n^2 - 1)^2}{n^4 + \frac{R^2 12(1 - \mu^2)}{h^2}}$$

І, знову нехтуючи зростаючими членами, отримуємо розв'язок:

$$\Phi(x) = C_1 e^{-a_n x} \cos(b_n x) + C_2 e^{-a_n x} \sin(b_n x). \quad (25)$$

де  $\rho \cos \psi = a_n$ ,  $\rho \sin \psi = b_n$ ,  $\rho^2 = \sqrt{A^2 + D^2}$ ,  $2\psi = \arctg(D/A)$ ,  $B - A^2 = D^2$ . Зауважимо, що  $a_n$  та  $b_n$  тотожно дорівнюють нулю при  $n=0,1$ , тому довгий розв'язок існує лише при  $n \geq 2$ .

Довге рішення характеризується чотирма основними змінними -  $v$ ,  $u$ ,  $N_x$  та  $L$ , які з використанням розв'язку (25) представимо таким чином:

$$v = (C_3 F_3(x) + C_4 F_4(x)) \sin(n\varphi) \quad (26)$$

$$u(x, \varphi) = -\frac{R}{n} (C_3 a + C_4 b F_3(x) - (C_3 b + C_4 a) F_4(x)) \cos(n\varphi) \quad (27)$$

$$N_x = (B_3 F_3(x) + B_4 F_4(x)) \cos(n\varphi) = \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{HR}{n} (C_3 \mu^2 (a^2 - b^2) - 2C_4 ab (\mu^2 - 1) - C_3 (a^2 - b^2)) \right) F_3(x) + \\ \left( \frac{HR}{n} (2C_3 ab (\mu^2 - 1) + C_4 \mu^2 (a^2 - b^2) - 2C_4 (a^2 - b^2)) \right) F_4(x) \end{array} \right] \cos(n\varphi) \quad (28)$$

$$L_{x\varphi} = (E_3 F_3(x) + E_4 F_4(x)) \sin(n\varphi) = \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{HR^2}{n^2} (C_3 \mu^2 (a^3 - 3ab^2) + C_4 \mu^2 (b^3 - 3a^2b) + \right. \\ \left. C_3 (3ab^2 - a^3) + C_4 (3a^2b - b^3) \right) F_3(x) + \\ \left( \frac{HR^2}{n^2} (C_3 \mu^2 (3ab^2 - b^3) + C_4 \mu^2 (a^3 - 3ab^2)) \right. \\ \left. + C_3 (b^3 - 3a^2b) + C_4 (3ab^2 - a^3) \right) F_4(x) \end{array} \right] \sin(n\varphi) \quad (29)$$

$$w = -(C_3 F_3(x) + C_4 F_4(x)) \cos(n\varphi) n \quad (30)$$

$$\gamma_x = (F_3(x) (C_4 b - C_3 a) - F_2(x) (C_3 b + C_4 a)) \cos(n\varphi) n \quad (31)$$

$$Q_x = \left[ \frac{H\delta n}{2R^2} \left( F_3(x) C_3 a (2R^2 a^2 - 6R^2 b^2 - 2n^2 + \mu + 1) + F_3(x) C_4 b (2R^2 b^2 - 6R^2 a^2 + 2n^2 - \mu - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. F_4(x) C_3 b (6R^2 a^2 - 2R^2 b^2 - 2n^2 + \mu + 1) + F_4(x) C_4 a (2R^2 a^2 - 6R^2 b^2 - 2n^2 + \mu + 1) \right) \right] \cos(n\varphi) \quad (32)$$

$$M_x = \left[ -\frac{H\delta n}{R^2} \left( F_3(x) (C_3 R^2 a^2 - C_3 R^2 b^2 - C_3 \mu n^2 + C_3 \mu - 2C_4 R^2 ab) + \right. \right. \\ \left. \left. F_4(x) (2C_3 R^2 ab + C_4 R^2 a^2 - C_4 R^2 b^2 - C_4 \mu n^2 + C_4 \mu) \right) \right] \cos(n\varphi) \quad (33)$$

Тут введено функції  $F_n^3(x) = e^{-a_n x} \cos(b_n x)$ ;  $F_n^4(x) = e^{-a_n x} \sin(b_n x)$ . Крім чотирьох основних параметрів, довге рішення (26)–(29) породжує коротке рішення (30)–(33) для радіального переміщення  $w$ , куту нахилу  $\gamma_x$ , поперечної сили  $Q_x$  та моменту  $M_x$ , вирази для яких отримано в явному вигляді.

#### **Аналіз трубопроводу з кутовою неспіввісністю зварного шва.**

Сформулюємо граничні умови для визначення силових та геометричних параметрів для різних типів навантаження. Їх можна отримати шляхом проектування сил з прямого сегмента на сили «косой» ділянки, за малих значень кутової неспіввісності [8]:

$$\begin{aligned} N'_x &= N_x^b \cos \theta + L^b \sin \theta \cos \varphi; \\ L' &= N_\phi^b \cos \varphi \sin \theta - N_x^b \cos \varphi \sin \theta + L^b; \\ Q'_x &= -N_x^b \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

#### **Навантаження внутрішнім тиском**

У цьому випадку тільки дві сили діють на прямій ділянці труби:  $N_x^b = \frac{-pR}{2}$  та  $N_\phi^b = -pR$ . З (34) впливають такі граничні умови:

$$L' \approx \frac{-pR}{2} \sin \theta \cos \varphi; \quad Q' \approx \frac{pR}{2} \sin \theta \sin \varphi. \quad (35)$$

Із урахуванням симетрії задачі також повинна виконуватись гранична умова  $\gamma_x|_{x=0} = 0$ . Розглянемо короткий розв'язок для  $n=0$ , в цьому випадку необхідним є виконання граничних умов для  $\gamma_x, Q_x$ , оскільки в короткому розв'язку вони є головними змінними. Таким чином з (14) та (16) ми знаходимо дві константи  $C_1, C_2$ , та можемо знайти всі інші змінні. Для параметру  $L$  визначальним є вираз (19), який дорівнює граничній умові для  $L'$ , тобто при  $n=0$  рішення врівноважується, та не переходить у довгий розв'язок. На рис. 1

показано розподіл осьових  $\sigma_x$  та колових  $\sigma_\phi$  напружень вздовж осьової координати, за дії внутрішнього тиску 3,8 МПа, та половини кута секторного згину – 2°.

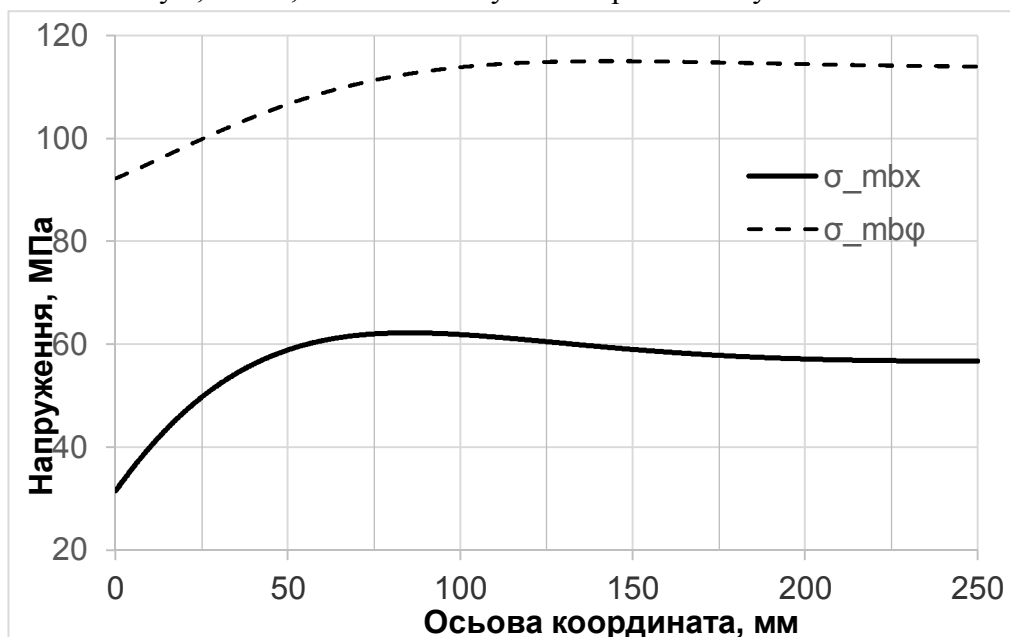


Рис. 1. Осьові та колові напруження для  $R = 381$  мм  $h = 12,7$  мм

За дії внутрішнього тиску аналітичний розв'язок повністю збігається з чисельним, отриманим з використанням МСЕ, тому останній не наведено на рис. 1.

#### Навантаження згинальним моментом

Для прямої ділянки труби  $N_x^b = \sigma_m h \sin \varphi$ , а граничні умови запишуться:

$$L' \approx \frac{1}{2} \sigma_m h \sin \theta \sin 2\phi; \quad Q' \approx \frac{\sigma_m h \sin \theta}{2} (1 - \cos 2\phi). \quad (36)$$

Знову розпочнемо з короткого розв'язку. При  $n=0$  з рівнянь  $\gamma_x|_{x=0} = 0$  та  $Q_x|_{x=0} = \frac{\sigma_m h \sin \theta}{2}$ , знаходимо дві константи  $C_1, C_2$ , і можемо визначити всі інші змінні. Далі розглянемо короткий розв'язок при  $n=2$ . Використовуючи задані граничні умови (36) отримуємо, що розв'язок не врівноважується, оскільки породжує силу  $L$ , яка відмінна від граничної умови. Неврівноважену частину представимо

$L^{long} = L' - L^{short} = \frac{3}{2} \sigma_m h \sin \theta \sin 2\phi$ , яка буде виступати граничною умовою для довгого рішення при  $n=2$ , разом з умовою симетрії  $u^{long} = 0$ . Отримані значення радіальних та колових переміщень, мають проекцію переміщення на  $u$  в косому перерізі

$$u^{obl} = w_2^{long} \sin \phi \sin \theta + v_2^{long} \cos \phi \sin \theta + u^{str} \cos \theta \quad (37)$$

Очевидно, що  $u^{obl} = 0$ , тому вираз  $u^{str} = -(1/2 w_2^{long} + 1/2 v_2^{long}) \tan \theta$  є граничною умовою при  $n=3$  з урахуванням  $L^{long}|_{x=0} = 0$ . Розв'язок при  $n=4$  не розглядаємо через малі значення отриманих сил.

Отримані результати для локальних сил і моментів дозволяють знайти вирази для колових та осьових напружень:

$$\sigma_\phi = \frac{(N_\phi)^{short} + (N_\phi)^{long}}{h} \pm \frac{6 \left( (M_\phi)^{short} + (M_\phi)^{long} + \mu \left( (M_x)^{short} + (M_x)^{long} \right) \right)}{h^2}. \quad (38)$$

$$\sigma_x = \sigma_m \sin \varphi + \frac{(N_x)^{short} + (N_x)^{long}}{h} \pm \frac{6 \left( (M_x)^{short} + (M_x)^{long} + \mu \left( (M_\phi)^{short} + (M_\phi)^{long} \right) \right)}{h^2}. \quad (39)$$

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

Компоненти (38) та (39) описуються відповідними виразами сил та моментів та їх сумою при різних значеннях  $n$ .

Розроблений підхід протестовано для зварного з'єднання труб зі значенням половини кута секторного згину рівного  $2^\circ$ , до якого прикладено згинальний момент 5647 kip·in (рис. 2–3). Представлено також порівняння результатів аналітичного розрахунку з розрахунком за МСЕ [10], експериментальними даними [10] та власним чисельним розрахунком (рис. 4). Видно, що результати мають досить добру збіжність.

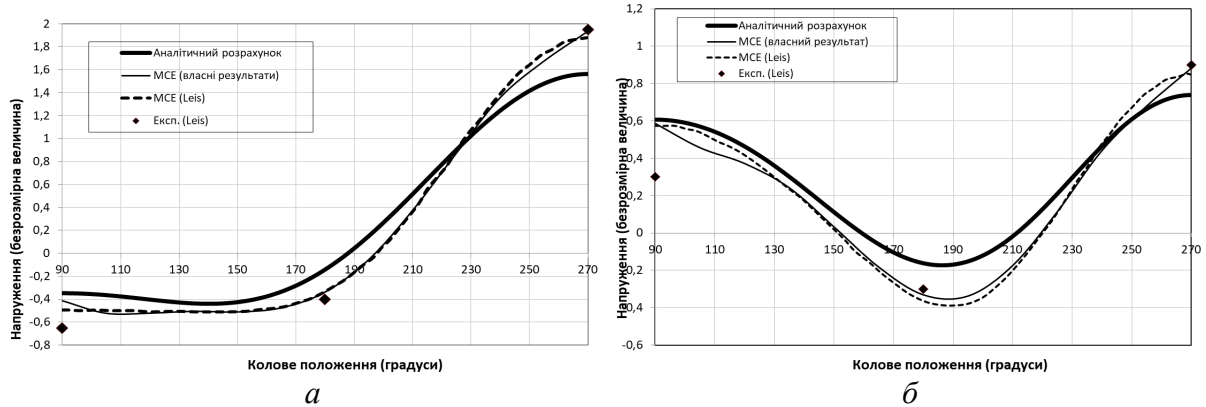


Рис. 2. Розподіл напружень на зовнішній поверхні для труби  $R = 381$  мм:  
а – осьові напруження, б – колові напруження

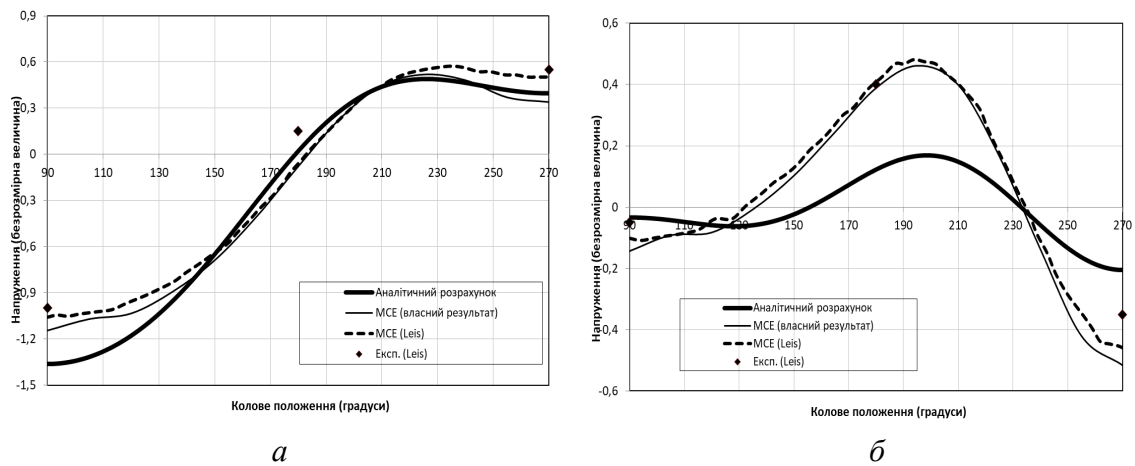


Рис. 3. Розподіл напружень на внутрішній поверхні для труби  
 $R = 381$  мм;  $h = 12,7$ ;  $E = 2e5$  МПа;  $\mu = 0,3$ :  
а – осьові напруження, б – колові напруження

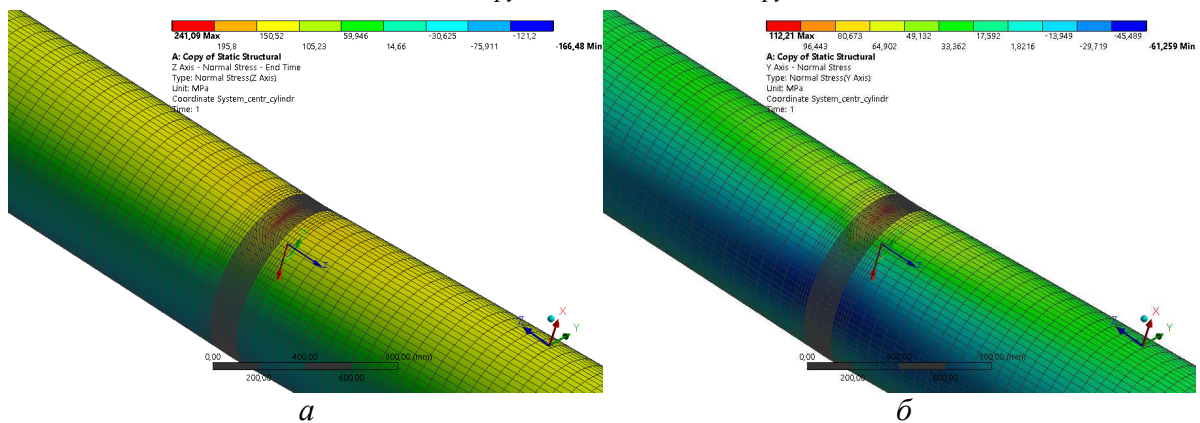


Рис. 4. МСЕ результати:  
а – розподіл осьових напружень; б – розподіл колових напружень

**Висновки відповідно до статті.** У роботі представлено можливість сумісного використання короткого та довгого рішень теорії оболонки, де всі змінні є сумою результатів цих рішень, а необхідність їх поєднання виникає із задоволення граничних умов. Для зручного використання даних рішень, нами отримано в явному вигляді записи для всіх основних змінних: радіального переміщення  $w$ , кута нахилу  $\gamma_x$ , поперечної сили  $Q_x$  та моменту  $M_x$  (головні змінні короткого рішення), а також колового переміщення  $v$ , осевого переміщення  $u$ , бічної сили  $L$  та осевої сили  $N_x$  (головні змінні довгого рішення).

Отримані залежності використано до аналізу НДС трубопроводу з кутовою неспіввісністю. Показано, що в деяких простих випадках навантажень, наприклад за дії на трубопровід з кутовою неспіввісністю лише внутрішнього тиску, можна обмежитись лише коротким розв'язком, що повністю збігається з чисельним аналізом. Для більш складного випадку, наприклад, за дії згинального моменту, для задоволення граничних умов виникає необхідність використання як короткого, так і довгого розв'язків. Отриманий аналітичний розв'язок добре узгоджується з чисельними та експериментальними даними.

Результати даного чисельно-аналітичного дослідження будуть корисні для аналізу за МСЕ, коли при побудові розрахункової моделі важливо знати межі прямих ділянок труб біля секторного згину, які впливають на граничні умови скінченноелементної моделі, а також для оцінки концентрації напружень від наявності кутових неспіввісностей зварних швів, які можуть бути використані в нормативних документах нафто-газової галузі.

#### Список використаних джерел

1. СНиП 2.05.06-85. Магистральные трубопроводы. Строительные нормы и правила. Москва: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. 52 с.
2. ДСТУ-Н Б В.2.3-21:2008. Магістральні трубопроводи. Настанова. Визначення залишкової міцності магістральних трубопроводів з дефектами. Київ. Мінрегіонбуд, 2008. 56 с.
3. Ориняк І., Лохман І., Богдан А. Використання моделі кільця для аналізу напружень у трубопроводах з дефектами форми. *Машинознавство*. 2011. № 9-10. С. 3-13. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/maz\\_2011\\_9-10\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/maz_2011_9-10_3).
4. Лукаевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. Москва: Мир, 1982. 542 с.
5. Zhu X., Leis B., Feier I. Stress analysis of miter joint in pipeline under internal pressure or in-plane bending. *Proceedings of the ASME 2010 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2010-25268* (Bellevue, July 18-22, 2010).
6. Zheng G., Colquhoun I., Paviglianiti J. Integrity of small mitered joints. *Proceedings of the 2016 11<sup>th</sup> International Pipeline Conference IPC2016-64101* (Alberta, September 26-30, 2016).
7. ASME B31.8-2014. Gas Transmission and Distribution Piping Systems. STANDARD by ASME International, 09/30/2014.
8. Orynyak I., Bogdan A., Selivestрова I. The Application of Long and Short Cylindrical Shell Solutions for Stress and Flexibility Determination in a Single Mitred Bend. *Proceedings of the ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2016-63598* (Vancouver, July 17-21, 2016).
9. Orynyak I., Dubyk Y. Approximate Formulas for Cylindrical Shell Free Vibration Based on Vlasov's and Enhanced Vlasov's Semi-Momentless Theory. *Proceedings of the ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2018-84932* (Czech Republic, July, 15-20, 2018). Prague, 2018. P. 10.
10. Feier I. I., Leis B. N., Zhu X. K., Stonesifer R. B., Stavrakas J. S. and D'Eletto D. Experimental strain measurements on large diameter mitred pipe joints. *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Pipeline Conference*, September 27 – October 1, 2010, Calgary, Alberta, Canada, IPC2010-31583.

#### References

1. SNIP 2.05.06-85. *Magistralnye truboprovody. Stroitelnye normy i pravila [Main pipelines. Building regulations]* (1985). Moscow: TsITP Gosstroia SSSR [in Russian].
2. DSTU-N B.2.3.-21:2008. *Mahistralni truboprovody. Nastanova. Vyznachennia zalyshkovoi mitsnosti mahistralnykh truboprovodiv z defektamy [Main pipelines. Attitude. Determination of the residual strength of main pipelines with defects]* (2008). Kyiv. Minrehionbud [in Ukrainian].



## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

3. Oryniak, I. V., Lokhman, I. V., Bohdan, A. V. (2011). Vykorystannia modeli kiltsia dlia analizu napruzhen v truboprovodakh z defektamy formy [Using the ring model to analyze stresses in pipelines with defects in the form]. *Mashinoznavstvo – Machinization*, 9-10, 3-13. Retrieved from [http://nbuv.gov.ua/UJRN/maz\\_2011\\_9-10\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/maz_2011_9-10_3).
4. Lukasevich, S. (1982). *Lokalnye nagruzki v plastinakh i obolochkakh [Local loads in plates and shells]*. Moscow: Mir [in Russian].
5. Zhu, X., Leis, B., Feier, I. (2010). Stress analysis of miter joint in pipeline under internal pressure or in-plane bending. Proceedings of the *ASME 2010 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2010-25268* (Bellevue, July 18-22, 2010) [in English].
6. Zheng, G., Colquhoun, I., Paviglianiti, J. (2016). Integrity of small mitred joints. Proceedings of the *2016 11<sup>th</sup> International Pipeline Conference IPC2016-64101* (Alberta, September 26-30, 2016).
7. *ASME B31.8-2014*. Gas Transmission and Distribution Piping Systems. STANDARD by ASME International, 09/30/2014 [in English].
8. Orynyak, I., Bogdan, A., Selivestrova, I. (2016). The Application of Long and Short Cylindrical Shell Solutions for Stress and Flexibility Determination in a Single Mitred Bend. Proceedings of the *ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2016-63598* (Vancouver, July 17-21, 2016) [in English].
9. Orynyak, I., Dubyk, Y. (2018). Approximate Formulas for Cylindrical Shell Free Vibration Based on Vlasov's and Enhanced Vlasov's Semi-Momentless Theory. Proceedings of the *ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2018-84932* (Czech Republic, July, 15-20, 2018) (pp. 10). Prague [in English].
10. Feier, I. I., Leis, B. N., Zhu, X. K., Stonesifer, R. B., Stavrakas, J. S. and D'Eletto D. (2010). Experimental strain measurements on large diameter mitred pipe joints. Proceedings of the *8<sup>th</sup> International Pipeline Conference*, September 27 – October 1. Calgary, Alberta, Canada, IPC2010-31583 [in English].

UDC 539.4

Yaroslav Dubyk, Iryna Seliverstova, Andrii Bogdan

### APPLICATION OF SHORT AND LONG CYLINDRICAL SHELL SOLUTIONS FOR STRESS-STRAIN STATE ANALYSIS IN PIPES WITH ANGULAR MISALIGNMENT

**Urgency of the research.** Mitred bends of pipes are widely used in industry. However, the weld seam in practice is often slanted due to the process of joining two straight portions of the pipe. Therefore, it is important to provide structural strength and reliability, as well as improve the ability of pipes to maintain shape and performance under the influence of loads.

**Target setting.** Existing expressions for the estimation of stresses in the region of the oblique weld joint mainly derive from the synthesis of experimental results and numerical calculations. Numerical methods have significant capabilities in solving practical problems, but can not explain the nature of the solution and the quantitative degree of influence of dimensionless parameters. Therefore, it is important to develop analytical approaches with easy-to-understand solutions and dimensionless parameters.

**Actual scientific researches and issues analysis.** The modern publications in foreign and domestic sources that are related to this research problem.

**Uninvestigated parts of general matters defining.** The work is a continuation of previous studies authors and application approach improves short and long terms solutions in terms of exact solutions of differential equations of the fourth degree.

**The research objective.** Get the analytical solution for the determination of the stress state of the pipeline in the area of angular misalignment of weld.

**The statement of basic materials.** The main idea of the work is to apply the concepts of short and long solutions of the theory of shells, and their combined use for the analysis of the stress-strain state of pipelines with angular inequilibrium of welds.

**Conclusions.** The concepts of short and long solutions are introduced, which make it possible to replace the equation of the eighth order of the theory of shells, a system of two equations of the fourth order. The efficiency of the solutions is demonstrated for two load cases (internal pressure and bending moment), analytical results are compared with the number of FEM and experimental data.

**Keywords:** cylindrical shell; angle inequality; approximate solution; analytical solutions; radial displacement.

Fig.: 4. References: 10.

**Дубик Ярослав Романович** – кандидат технічних наук, завідувач відділу розрахунків на міцність, ТОВ «ІПП - Центр» (вул. Болсуновська, 8, м. Київ, 01014, Україна).

**Dubyk Yaroslav** – PhD in Technical Sciences, Head of department for strength calculations, LLC IPP Centre (8 Bolsunovska Str., 01014 Kyiv, Ukraine).

**E-mail:** [dubykir@gmail.com](mailto:dubykir@gmail.com).

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4327-412X>

**ResearcherID:** P-2926-2016

**Scopus Author ID:** 56050505200

**Селіверстова Ірина Павлівна** – аспірант, молодший науковий співробітник, Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренко НАН України (вул. Тимірязєвська, 2, м. Київ, 01014, Україна).

**Seliverstova Iryna** – PhD student, Junior Researcher, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine (2 Timiryazevska Str., 01014 Kyiv, Ukraine).

**E-mail:** [seliverstovairyna24@gmail.com](mailto:seliverstovairyna24@gmail.com).

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1166-792X>

**ResearcherID:** F-2267-2019.

**Богдан Андрій Васильович** – кандидат технічних наук, завідувач відділом експертиз та продовження ресурсу, ТОВ «ІПП - Центр» (вул. Болсуновська, 8, м. Київ, 01014, Україна).

**Bogdan Andrii** – PhD in Technical Sciences, Head of department of expertises and operation lifetime prolongation, LLC IPP Centre (8 Bolsunovskaya Str., 01014, Kyiv, Ukraine).

**E-mail:** [bohdan-av@ipp-centre.com.ua](mailto:bohdan-av@ipp-centre.com.ua)

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9795-8319>

**ResearcherID:** F-2406-2019

**Scopus Author ID:** 18041728100