

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# **Математичне моделювання процесів механічної обробки та металорізальних верстатів**

**Методичні вказівки  
до лабораторних робіт**  
для здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей  
за спеціальністю 133 Галузеве машинобудування  
галузі знань 13 Механічна інженерія

Обговорено і рекомендовано  
на засіданні кафедри АТ та ГМ,  
протокол № 7 від 20.01. 2020р.

Чернігів ЧНТУ 2020

Математичне моделювання процесів механічної обробки та металорізальних верстатів. Методичні вказівки до лабораторних робіт для здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей за спеціальністю № 133 Галузеве машинобудування галузі знань № 13 Механічна інженерія./Укл.: В.І. Кальченко, Г.В. Пасов, В.П. Мурашківська– Чернігів: ЧНТУ, 2020, - 35с.

**Укладачі:** Кальченко Віталій Іванович, професор, доктор технічних наук

Пасов Геннадій Володимирович, доцент, кандидат технічних наук

Мурашківська Віра Петрівна, старший викладач

**Відповідальний за випуск:** Кальченко Віталій Іванович, професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування

**Рецензент:** Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

	ЗМІСТ	Стор
Вступ .....		3
Лабораторна робота № 1 “Матриці планування” .....		5
1.1 Завдання .....		5
Лабораторна робота № 2 “Відкидання помилкових експериментів” .....		6
2.1 Завдання .....		6
2.2 Порядок розрахунку .....		6
Лабораторна робота № 3 “Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Кохрена” .....		9
3.1 Завдання .....		9
3.2 Порядок розрахунку .....		9
Лабораторна робота № 4 “Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Бартлета” .....		12
4.1 Завдання .....		12
4.2 Порядок розрахунку .....		12
Лабораторна робота № 5 “Модель типу $2^2$ та її адекватність” .....		15
5.1 Завдання .....		15
5.2 Порядок розрахунку .....		15
Список рекомендованої літератури.....		21
Додатки .....		22
Додаток А .....		22
Додаток Б .....		24
Додаток В .....		26
Додаток Д .....		33

## Вступ

Дисципліни “ Математичне моделювання процесів механічної обробки та металорізальних верстатів ” є складовою частиною нормативно-методичного забезпечення навчального процесу галузі знань № 13 Механічна інженерія ”. Вони передбачені для підготовки магістрів та аспірантів за спеціальністю № 133 Галузеве машинобудування. Ця дисципліна належить до циклів дисциплін спеціальної підготовки вибіркової групи (цикл дисциплін вільного вибору здобувачів вищої освіти).

Випускник вищого навчального закладу повинен володіти глибокими знаннями в галузі математичного (кібернетичного) опису конкретних технічних систем та процесів (математичних моделей) і сучасними методами оброблення моделей на ЕОМ із застосуванням відповідних програмних продуктів.

Мета дисципліни – ознайомити здобувачів вищої освіти з основами математичного (кібернетичного) моделювання в металообробці й підготувати їх до участі в науково-дослідній роботі.

Під час вивчення дисциплін здобувачі вищої освіти отримують знання з основ математичного планування експерименту, навчаються складати математичні моделі технологічних процесів та обирати їх оптимальні умови за допомогою спеціальних математичних методів.

Після вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти мають знати:

- повний та дробовий факторні експерименти;
- математичне експериментальне планування першого та другого порядку;
- методику проведення експериментів;
- оброблення результатів експериментів та інтерпретацію їх;
- круте сходження по поверхні відгуку;
- оптимізацію математичної моделі;

– симплексний метод планування експерименту.

Здобувачів вищої освіти повинні вміти:

– виконувати на практиці сучасні прийоми та методи планування експерименту;

– проводити дослідження;

– обробляти результати експериментів та інтерпретувати їх.

Дисципліни ґрунтуються на таких курсах, як вища математика, елементи теорії ймовірності, а також суміжних фундаментальних і професійно-орієнтованих дисциплінах.

Знання, набуті в процесі вивчення цієї дисципліни, потрібні для вирішення дослідницьких завдань під час проведення експериментів, вивчення спеціальних дисциплін (“Розрахунок і конструювання верстатів та верстатних комплексів”, “Системи керування верстатів та верстатних комплексів” та ін.), дипломного проектування та дисертаційної роботи.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

## МАТРИЦІ ПЛАНУВАННЯ

### 1.1 Завдання

1. Скласти три приклади по плануванню експерименту (параметр оптимізації та фактори, які на нього впливають).

2. Записати рівняння поліному першого порядку в загальному вигляді для:  $2^2$ ;  $2^3$ ;  $2^4$ ;  $2^5$ .

3. Скласти матриці планування повного факторного експерименту 1-го порядку для:  $2^2$ ;  $2^3$ ;  $2^4$ ;  $2^5$ .

4. Скласти матрицю планування дрібного факторного експерименту  $2^{4-1}$ , якщо:

- |                   |                    |                      |                       |
|-------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|
| 1) $X_4 = X_1X_2$ | 2) $X_4 = -X_1X_2$ | 3) $X_4 = X_2X_3$    | 4) $X_4 = -X_2X_3$    |
| 5) $X_4 = X_1X_3$ | 6) $X_4 = -X_1X_3$ | 7) $X_4 = X_1X_2X_3$ | 8) $X_4 = -X_1X_2X_3$ |

5. Скласти матрицю планування дрібного факторного експерименту  $2^{5-2}$ , якщо:

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| 1) $X_4 = X_1X_2$   | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 2) $X_4 = -X_1X_2$  | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 3) $X_4 = X_1X_2$   | $X_5 = -X_1X_2X_3$ |
| 4) $X_4 = -X_1X_2$  | $X_5 = -X_1X_2X_3$ |
| 5) $X_4 = X_1X_3$   | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 6) $X_4 = -X_1X_3$  | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 7) $X_4 = X_1X_3$   | $X_5 = -X_1X_2X_3$ |
| 8) $X_4 = -X_1X_3$  | $X_5 = -X_1X_2X_3$ |
| 9) $X_4 = X_2X_3$   | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 10) $X_4 = -X_2X_3$ | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 11) $X_4 = X_2X_3$  | $X_5 = X_1X_2X_3$  |
| 12) $X_4 = -X_2X_3$ | $X_5 = X_1X_2X_3$  |

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

### ВІДКИДАННЯ ПОМИЛКОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

#### 2.1 Завдання

Для запропонованого ряду значень параметру оптимізації (після реалізації дослідів) відповідно до матриці планування відкинути помилкові експерименти. Варіанти завдань наведено у додатку А, таблиця А.1.

#### 2.2 Порядок розрахунку

Для відкидання помилкових експериментів використовують критерій Стьюдента:

$$t_p = \frac{|y - \bar{y}|}{S}, \quad (2.1)$$

де  $t_p$  – розраховане (експериментальне) значення критерію Стьюдента;

$y$  – результат паралельного експерименту, який поставлено під сумнів;

$\bar{y}$  – середнє арифметичне паралельних експериментів без урахування результату помилкового експерименту;

$S$  – помилка паралельних експериментів без урахування результату помилкового експерименту.

Середнє арифметичне паралельних експериментів визначається за формулою:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad (2.2)$$

де  $y_i$  – значення параметра оптимізації в  $i$ -тому паралельному експерименті;

$i$  – номер паралельного експерименту;

$n$  – кількість паралельних експериментів.

Помилка експерименту (середнє квадратичне відхилення) визначається за формулою:

$$S = +\sqrt{S^2}, \quad (2.3)$$

де  $S^2$  – дисперсія паралельних експериментів.

Дисперсію паралельних експериментів визначають за формулою:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}, \quad (2.4)$$

де  $y_i$  – значення параметру оптимізації в  $i$ -тому паралельному експерименті;

$i$  – номер паралельного експерименту;

$\bar{y}$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації у паралельних експериментах;

$n$  – кількість паралельних експериментів.

Значення  $t_p$  порівнюють з табличним значенням критерію Стюдента  $t_{табл.}$  (дивись додаток А, таблиця А.2). Якщо при цьому виявиться, що  $t_p > t_{табл.}$ , то цей експеримент вважають помилковим (бракованим) та навпаки, якщо  $t_p < t_{табл.}$ , то експеримент вважають правильним.

Процедура порівняння розрахованої характеристики з табличним її значенням називається перевіркою гіпотези. Використання додатку А потребує деяких коментувань. Вхідними параметрами в цю таблицю є: кількість ступенів свободи  $f$  та рівень значимості  $\alpha$ .

Поняття “кількість ступенів свободи” буде багатократно зустрічатися, і воно буде в подальшому уточнюватись. В даному випадку:

$$f = n - 1, \quad (2.5)$$

де  $n$  – кількість паралельних експериментів без урахування помилкового експерименту.

Рівень значимості – міра наших вимог до відповіді. Як правило при вирішенні інженерних задач рівень значимості приймають рівним 0,05. Таке значення, яке називається ще 5%-вим рівнем ризику, відповідає ймовірності вірної відповіді при перевірці нашої гіпотези  $P=1 - 0,05$ , або 95%. При цьому кажуть, що в середньому тільки у 5% випадків перевірки гіпотези в аналогічних ситуаціях можлива помилка.

Дослідник завжди вільний у виборі рівня значимості і можливі ситуації, в яких потрібна більша надійність відповіді.

Результати розрахунків можна звести до таблиці 1.

Таблиця 1 – Результати розрахунків помилкових експериментів

№ експерименту	Перевіряємо значення $y$	$\bar{y}$	$S^2$	$S$	$t_p$	$t_{табл.} =$
1						+ або –
2						

Примітка. Експеримент, який вірний позначимо – “+”.

Експеримент, який є бракованим позначимо – “–”.

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3**  
**ПЕРЕВІРКА ОДНОРІДНОСТІ ДИСПРСІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ**  
**КОХРЕНА**

**3.1 Завдання**

Обчислити дисперсію параметрів оптимізації (при однаковій кількості паралельних експериментів у кожному експерименті матриці) та перевірити їх однорідність за критерієм Кохрена. Варіанти завдань наведено у додатку Б, таблиця Б.1.

**3.2 Порядок розрахунку**

Обчислити середнє арифметичне значення параметру оптимізації в кожному експерименті матриці за формулою:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ij}}{n}, \quad (3.1)$$

де  $\bar{y}_j$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації в паралельних експериментах  $j$  - того експерименту матриці;

$y_{ij}$  –  $i$  - те значення параметру оптимізації в паралельних експериментах  $j$  - того експерименту матриці;

$n$  – кількість паралельних експериментів.

Дисперсію у  $j$  - тому експерименті матриці можна обчислити за формулою:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{n - 1}, \quad (3.2)$$

де  $S_j^2$  – дисперсія параметру оптимізації в  $j$  - тому експерименті матриці;

$y_{ij}$  – значення параметру оптимізації в  $j$  - тому паралельному експерименті матриці;

$y_i$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації в паралельних експериментах  $j$  - того експерименту матриці;

$n$  – кількість паралельних експериментів.

Однорідність ряду дисперсій за критерієм Кохрена обчислюють за формулою:

$$G_p = \frac{S_{max}^2}{\sum_{j=1}^N S_j^2}, \quad (3.3)$$

де  $S_{max}^2$  – максимальна дисперсія в ряду;

$S_j^2$  – дисперсія параметру оптимізації в  $j$  - тому експерименті матриці;

$N$  – кількість дисперсій (кількість незалежних експериментів у матриці).

Гіпотеза про однорідність дисперсій підтверджується, якщо  $G_p < G_{табл.}$  (дивись додаток Б, таблиця Б.2). Якщо розрахункове значення критерію Кохрена більше ніж табличне  $G_p > G_{табл.}$ , то дисперсії неоднорідні.

В таблицю Б.2 додатку Б вхідними параметрами являються  $\alpha$ ,  $N$ ,  $f$ . Під  $\alpha$  – розуміють рівень значимості. Під  $N$  розуміють кількість порівнюємих дисперсій. Під  $f$  кількість ступенів свободи, яка дорівнює:

$$f = n - 1, \quad (3.4)$$

де  $n$  – кількість паралельних експериментів.

Дисперсію всього експерименту або дисперсію параметру оптимізації визначають за формулою:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{j=1}^N S_j^2}{N}, \quad (3.5)$$

де  $j$  – номер експерименту у матриці планування;

$S_j^2$  – дисперсія  $j$  - того експерименту матриці;

$N$  – кількість експериментів у матриці планування.

Формулою (3.5) для визначення дисперсії параметру оптимізації користуються при однаковій кількості паралельних експериментів по всій матриці, а також при однорідності дисперсій в кожному експерименті.

Результати розрахунків можна звести до таблиці 2.

Таблиця 2 – Результати розрахунків дисперсії при однаковій кількості паралельних експериментів

№ експ.	$y_I$	$y_{II}$	$y_{III}$	$\bar{y}$	$S^2$
1					
2					
3					
4					
$G_P =$			$G_{табл.} =$		
+ або –			$S_y^2 =$		

Примітка. Дисперсії однорідні позначимо – “+”.

Дисперсії неоднорідні позначимо – “–”.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

## ПЕРЕВІРКА ОДНОРІДНОСТІ ДИСПЕРСІЙ ЗА КРИТЕРІЄМ БАРТЛЕТА

### 4.1 Завдання

Обчислити дисперсію параметра оптимізації при різній кількості паралельних експериментів в кожній точці матриці планування та перевірити однорідність дисперсії параметру оптимізації за критерієм Бартлета.

Варіанти завдань наведено у додатку В, таблиця В.1.

### 4.2 Порядок розрахунку

При неоднаковій кількості паралельних експериментів однорідність ряду дисперсій перевіряється за допомогою критерію Бартлета.

Обчислити середнє арифметичне значення параметра оптимізації в кожному експерименті за формулою:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{n_j}, \quad (4.1)$$

де  $\bar{y}_j$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації в  $j$ -му експерименті;

$y_{ij}$  –  $i$ -те значення параметру оптимізації в  $j$ -му експерименті;

$n_j$  – кількість паралельних експериментів в  $j$ -му експерименті.

Дисперсію в  $j$ -му експерименті обчислити за формулою:

$$S_{yj}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{n_j - 1}, \quad (4.2)$$

де  $S_{yj}^2$  – дисперсія в  $j$ -му експерименті;

$y_{ij}$  –  $i$ -те значення параметру оптимізації в  $j$ -му експерименті;

$\bar{y}_j$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації в  $j$ -му експерименті;

$n_j$  – кількість паралельних експериментів в  $j$ -му експерименті.

Дисперсію параметра оптимізації обчислюємо за формулою:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N S_{yj}^2 \cdot f_j}{\sum_{j=1}^N f_j}, \quad (4.3)$$

де  $S_y^2$  – дисперсія параметру оптимізації;

$S_{yj}^2$  – дисперсія  $j$ -го експерименту;

$N$  – кількість експериментів у матриці (або кількість порівнюємих дисперсій).

$f_j$  – кількість ступенів свободи в  $j$ -му експерименті, яка дорівнює кількості паралельних експериментів мінус 1 тобто:

$$f_j = n_j - 1, \quad (4.4)$$

Потім обчислити величину:

$$\chi_P^2 = \frac{1}{c} \left( f \cdot \lg S_y^2 - \sum_{j=1}^N f_j \cdot \lg S_j^2 \right), \quad (4.5)$$

де

$$c = 0.4343 \left[ 1 + \frac{1}{3 \cdot (N - 1)} \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j} - \frac{1}{f} \right) \right], \quad (4.6)$$

$$f = \sum_{j=1}^N f_j, \quad (4.7)$$

де  $N$  – кількість експериментів у матриці (або кількість порівнюємих експериментів);

$f_j$  – кількість ступенів свободи в  $j$ -му експерименті ;

$S_{yj}^2$  – дисперсія  $j$ -го експерименту;

$S_y^2$  – дисперсія параметру оптимізації.

Якщо  $\chi_P^2$  більш ніж  $\chi_{талб.}^2$  (дивись додаток В, таблиця В.2) для даної кількості ступенів свободи та прийнятого рівня значимості, то дисперсії неоднорідні та навпаки.

В таблицю В.2 додатку В вхідним параметром є кількість ступенів свободи:  $f_I = N - 1$ , (4.8)

де  $f_I$  – кількість ступенів свободи;

$N$  – кількість порівнюємих дисперсій. При плануванні експерименту типу  $2^k$ ,  $N$  дорівнює кількості експериментів у матриці.

Результати розрахунків можна ввести до таблиці 3.

Таблиця 3 – Результати розрахунків дисперсій при неоднаковій кількості паралельних експериментів

№ експер.	$y_I$	$y_{II}$	$y_{III}$	$y_{IV}$	$\bar{y}$	$S^2$
1						
2						
3						
4						
$\chi_P^2 =$		$S_y^2 =$		$\chi_{талб.}^2 =$		
$+ або -$				$S_y^2 =$		

Примітка. Дисперсії однорідні позначимо – “+”.

Дисперсії неоднорідні позначимо – “-”.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

### МОДЕЛЬ ТИПУ 2<sup>2</sup> ТА ЇЇ АДЕКВАТНІСТЬ

#### 5.1 Завдання

Обчислити рівняння моделі 2<sup>2</sup> та перевірити її адекватність.

Варіанти завдань наведено у додатку Г, таблиця Г.1.

#### 5.2 Порядок розрахунку

Обчислити середнє арифметичне значення параметра оптимізації в кожному експерименті матриці планування за формулою:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ij}}{n}, \quad (5.1)$$

де  $\bar{y}_j$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації в паралельних експериментах  $j$  - того експерименту матриці;

$y_{ij}$  –  $i$  - те значення параметру оптимізації в паралельних експериментах  $j$  - того експерименту матриці;

$n$  – кількість паралельних експериментів.

В загальному випадку коефіцієнти моделі визначаються за формулою:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N \bar{y}_j \cdot x_{ij}}{N}, \quad (5.2)$$

де  $i$  – номер фактора ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ), (нуль записано для  $b_0$ );

$j$  – номер експерименту;

$\bar{y}_j$  – середнє арифметичне значення параметру оптимізації в  $j$  - тому експерименті матриці;

$N$  – кількість коефіцієнтів моделі (у нашому випадку 4);

$x_{ij}$  – кодове значення ( $\pm 1$ ) фактору  $i$  (або ефекту взаємодії факторів) в

$j$  - тому експерименті.

Записати рівняння моделі з числовим значенням коефіцієнтів:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_{12} \cdot x_{12}$$

Перевірити значимість коефіцієнтів вирахованої моделі. Така перевірка для кожного коефіцієнта проводиться незалежно. Вона здійснюється побудовою довірчого інтервалу:

$$\Delta b = t \cdot S_{bi}, \quad (5.3)$$

де  $\Delta b$  – довірчий інтервал;

$t$  – табличне значення критерію Стьюдента (дивись додаток А, таблиця А.2) при вибраному рівні значимості (як правило  $\alpha = 0.05$ ) та кількості ступенів свободи, за якими визначалась дисперсія;

$S_{bi}$  – квадратична похибка  $i$  - того коефіцієнту.

Квадратична похибка  $i$  - того коефіцієнту дорівнює:

$$S_{bi} = +\sqrt{S_{bi}^2}, \quad (5.4)$$

де  $S_{bi}$  – квадратична похибка  $i$  - того коефіцієнту;

$S_{bi}^2$  – дисперсія  $i$  - того коефіцієнту.

Дисперсію  $i$  - того коефіцієнту можна обчислити за формулою:

$$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{N}, \quad (5.5)$$

де  $S_{bi}^2$  – дисперсія  $i$  - того коефіцієнту;

$S_y^2$  – дисперсія параметра оптимізації;

$N$  – кількість незалежних експериментів у матриці.

Дисперсію параметру оптимізації вираховують за формулами, які наведені у практичних роботах № 3 та № 4 – (3.5), (4.3).

Коефіцієнт моделі вважають значимим, якщо його абсолютна величина більша ніж довірчий інтервал, тобто:

$$|b_i| > \Delta b_i \quad (5.6)$$

Перевірка адекватності моделі, яка отримана, здійснюється за критерієм Фішера (F – критерій):

$$F_P = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2}, \quad (5.7)$$

де  $F_P$  – розрахункове значення критерію Фішера;

$S_y^2$  – дисперсія параметра оптимізації зі своєю кількістю ступенів свободи  $f_y = f_2$ ;

$S_{ad}^2$  – дисперсія адекватності зі своєю кількістю ступенів свободи  $f_{ad} = f_1$ .

Модель вважають адекватною з відповідною довірчою імовірністю, якщо розрахункове значення критерію  $F_P$  менш ніж табличне  $F_m$  (дивись додаток Г, таблиця Г.2) для відповідної кількості ступенів свободи та навпаки.

Дисперсію параметру оптимізації  $S_y^2$  розраховано за формулами наведеними у практичних роботах № 3 та № 4 – (3.5), (4.3).

Кількість ступенів свободи для  $S_y^2$  дорівнює:

1) У випадку нерівномірного дублювання:

$$f_y = \sum_{j=1}^N (n_j - 1), \quad (5.8)$$

де  $N$  – кількість експериментів у матриці планування;

$j$  – номер експерименту, або точка матриці планування;

$n_j$  – кількість паралельних експериментів у  $j$ -тій точці матриці планування.

2) У випадку рівномірного дублювання:

$$f_y = N \cdot (n - 1), \quad (5.9)$$

де  $n$  – однакова для всіх рядків матриці планування кількість паралельних експериментів;

$N$  – кількість експериментів у матриці планування.

Дисперсію адекватності моделі  $S_{ad}^2$ , яку отримано, можна вирахувати за наступними формулами:

1) У випадку нерівномірного дублювання:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N n_j \left( \bar{y}_j - \hat{y}_j \right)^2}{f_{ad}}, \quad (5.10)$$

де  $S_{ad}^2$  – дисперсія адекватності;

$N$  – кількість експериментів у матриці планування;

$j$  – номер експерименту;

$\bar{y}_j$  – експериментальне (середнє) значення параметру оптимізації в

$j$  - тому експерименті;

$\hat{y}_j$  – значення параметру оптимізації в  $j$  - тому експерименті, яке розраховано за моделлю;

$f_{ad}$  – кількість ступенів свободи для  $S_{ad}^2$ ;

$n_j$  – кількість паралельних експериментів у  $j$  - тій точці матриці планування;

2) У випадку рівномірного дублювання:

$$S_{ad}^2 = \frac{n \cdot \sum_{j=1}^N \left( \bar{y}_j - \hat{y}_j \right)^2}{f_{ad}}, \quad (5.11)$$

де  $S_{ad}^2$  – дисперсія адекватності;

$N$  – кількість експериментів у матриці планування;

$j$  – номер експерименту;

$\bar{y}_j$  – експериментальне (середнє) значення параметру оптимізації в  $j$ -тому експерименті;

$\hat{y}_j$  – значення параметра оптимізації в  $j$ -тому експерименті, вираховано за моделлю;

$f_{ad}$  – кількість ступенів свободи для  $S_{ad}^2$ ;

$n_j$  – кількість паралельних експериментів у  $j$ -тій точці матриці планування.

Кількість ступенів свободи для  $S_{ad}^2$  розраховують за формулою:

$$f_{ad} = N - (k + 1), \quad (5.12)$$

де  $N$  – кількість експериментів у матриці;

$k$  – кількість факторів.

Результати розрахунків можна звести до таблиці 4.

Таблиця 4 – Результати розрахунків рівняння моделі

№	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\bar{y}$	$S^2$
1					
2					
3					
4					
$S_y^2 =$		$\Delta b =$			
$b_0 =$	$b_1 =$	$b_2 =$	$b_{12} =$		
$y =$					
$S_{ad}^2 =$		$F_p =$		$F_m =$	

## Список рекомендованой літератури

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий – М.: Наука, 1971. – 28 с.
2. Белый И.В. и др. Основы научных исследований и технического творчества / И.В. Белый, К.П. Власов, В.Б. Клепиков. – Х.: Выща шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1989. – 200 с.
3. Душинський В.В. Основы научных досліджень. Теорія та практикум з програмним забезпеченням: Навч. посібник – К.: НТУУ “КПІ”, 1998. – 408 с.
4. Кане М.М. Основы научных исследований в технологии машиностроения: Учеб. пособие для вузов. – Мн.: Выш. шк., 1987. – 231 с.
5. Лудченко А.А., Лудченко Я.А., Примак Т.А. Основы научных исследований: Учеб пособие / Под ред А.А. Лудченко. – К.: О-во “Знання”, КОО, 2000. – 114 с.
6. Математическое планирование эксперимента. Методические указания для студентов спец. 05.01. Составитель Полозок Н.Д. – К.: КПИ, 1981. – 55 с.
7. Новик Ф.С. Планирование экспериментов в металловедении – М.: Машиностроение, 1974. – 40 с.
8. Оптимизация технологических процессов в машиностроении. Душинский В.В., Пуховский Е.С., Радченко С.Г. / Под общей редакцией С.Э. Таурита – К.: Техника, 1977. – 176 с.
9. Чкалова О.Н. Основы научных исследований – К.: Вища школа, 1978. – 120 с.
10. Радченко С.Г. Математичне моделювання та оптимізація технологічних систем: Навчально-методичний посібник. – К.: Політехніка, 2002. – 88 с.

## Додатки

Додаток А

Таблиця А.1 – Варіанти завдань до лабораторної роботи № 2

№ варіанта	У1	У2	У3	У4	У5	У6	У7	У8
1	20	19	18	21	22	23	17	30
2	40	38	41	45	47	39	50	42
3	34	38	31	32	33	40	35	36
4	100	101	98	105	110	102	99	103
5	150	151	152	160	149	148	153	147
6	98	100	90	114	101	99	104	103
7	11	19	12	13	10	9	14	8
8	25	14	17	13	15	11	12	10
9	40	50	41	42	39	38	51	37
10	529	500	527	531	534	530	508	525
11	160	149	120	147	151	152	148	150
12	731	728	729	730	699	732	709	727
13	64	63	62	61	90	60	65	70
14	100	110	130	105	108	99	98	110
15	68	70	100	71	69	72	67	73
16	113	114	150	111	112	105	100	109
17	641	631	635	700	634	636	633	632
18	700	650	701	703	660	698	699	702
19	99	98	90	93	91	97	100	101
20	111	112	110	80	125	114	109	107
21	33	34	32	38	25	70	51	15
22	555	553	600	550	560	531	551	552
23	314	308	310	313	340	316	312	311
24	270	300	301	330	302	313	316	312
25	876	875	879	874	878	880	900	860
26	300	301	302	299	325	303	299	298
27	415	414	440	413	411	420	430	410
28	526	527	528	600	725	700	701	703
29	637	636	635	638	690	634	600	630
30	748	749	750	747	748	700	747	746

Таблиця А.2 – Значення  $t_{табл.}$  – критерію Стьюдента

Кількість степенів волі $f$	Рівень значимості $\alpha$				
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	636.600
2	2.920	4.303	6.965	9.925	31.600
3	2.353	3.182	4.541	5.841	12.922
4	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.603	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.849
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.704
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	1.658	1.980	2.358	2.617	3.374
$\infty$	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291



## Додаток Б

№	Y1			Y2			Y3			Y4		
	Y11	Y12	Y13	Y21	Y22	Y23	Y31	Y32	Y33	Y41	Y42	Y43
1	200	201	202	300	298	297	198	201	200	150	149	148
2	23	24	22	23	28	26	42	41	43	11	12	11
3	98	99	97	64	67	59	91	89	94	70	73	71
4	100	101	102	105	109	99	200	197	204	411	416	413
5	102	103	104	110	115	103	220	219	218	412	419	415
6	105	106	103	120	126	112	240	236	246	513	522	517
7	100	99	98	130	137	121	360	355	365	514	512	511
8	110	111	112	140	148	130	380	374	383	615	616	610
9	130	129	128	150	159	141	400	393	406	616	619	612
10	170	171	172	160	162	158	520	512	521	717	722	714
11	200	199	198	270	271	268	540	531	545	718	725	716
12	310	311	312	280	282	277	560	550	564	819	828	818
13	680	679	678	290	293	286	680	679	685	820	821	810
14	999	1000	1001	300	304	295	700	698	706	921	924	916
15	1000	999	998	410	415	404	720	719	718	922	927	928
16	2150	2151	2152	420	426	413	740	737	744	1023	1030	1031
17	3121	3120	3119	430	437	422	860	856	865	1024	1023	1021
18	6429	6430	6431	540	548	531	880	875	883	1125	1126	1128
19	555	554	553	550	559	540	900	894	906	1128	1124	1127
20	411	412	413	560	558	557	930	923	931	1327	1330	1334
21	713	712	711	670	671	668	550	542	554	1228	1232	1237
22	690	691	692	680	682	677	1000	1051	1066	1329	1335	1336
23	324	323	322	690	693	686	1080	1070	1083	1330	1329	1331
24	116	117	118	800	804	795	1120	1119	1125	1431	1429	1430
25	913	912	910	810	815	806	1140	1139	1138	1432	1430	1426
26	666	667	668	820	826	817	1160	1158	1164	1533	1538	1535
27	444	442	441	930	937	922	1270	1267	1276	1534	1532	1531
28	321	322	323	110	118	101	220	216	223	412	411	416
29	432	431	429	160	169	150	380	375	385	514	520	515
30	543	542	541	140	138	137	240	234	241	513	510	514

Таблиця Б.1 – Варіанти завдань до лабораторної роботи № 3

		Рівень значимості $\alpha = 0.05$ .														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	$\infty$	
N		Кількість ступенів волі $f$														
	2	.999	0.939	0.906	0.906	0.877	0.853	0.833	0.816	0.801	0.788	0.734	0.660	0.581	0.500	
	3	0.967	0.798	0.746	0.746	0.707	0.677	0.653	0.633	0.617	0.603	0.547	0.475	0.403	0.333	
	4	0.907	0.684	0.629	0.629	0.590	0.560	0.537	0.518	0.502	0.488	0.437	0.372	0.309	0.250	
	5	0.841	0.598	0.544	0.544	0.507	0.478	0.456	0.439	0.424	0.412	0.365	0.307	0.251	0.200	
	6	0.781	0.532	0.480	0.480	0.445	0.418	0.398	0.382	0.368	0.357	0.314	0.261	0.212	0.167	
	7	0.727	0.480	0.431	0.431	0.397	0.373	0.354	0.338	0.326	0.315	0.276	0.228	0.183	0.143	
	8	0.680	0.438	0.391	0.391	0.360	0.336	0.319	0.304	0.293	0.283	0.246	0.202	0.162	0.125	
	9	0.639	0.403	0.358	0.358	0.329	0.307	0.290	0.277	0.266	0.257	0.223	0.182	0.145	0.111	
	10	0.602	0.373	0.331	0.331	0.303	0.282	0.267	0.254	0.244	0.235	0.203	0.166	0.131	0.100	
	12	0.541	0.326	0.288	0.288	0.262	0.244	0.230	0.219	0.210	0.202	0.174	0.140	0.110	0.083	
	15	0.471	0.276	0.242	0.242	0.220	0.203	0.191	0.182	0.174	0.167	0.143	0.141	0.089	0.067	
	20	0.389	0.221	0.192	0.192	0.174	0.160	0.150	0.142	0.136	0.130	0.111	0.088	0.068	0.050	
	24	0.343	0.191	0.166	0.166	0.149	0.137	0.129	0.122	0.116	0.111	0.094	0.074	0.057	0.042	
	30	0.293	0.159	0.138	0.138	0.124	0.114	0.106	0.100	0.096	0.092	0.077	0.060	0.046	0.033	
	40	0.237	0.126	0.108	0.108	0.097	0.089	0.083	0.078	0.075	0.071	0.060	0.046	0.035	0.025	
60	0.174	0.090	0.077	0.077	0.068	0.062	0.058	0.055	0.052	0.050	0.041	0.032	0.023	0.017		
120	0.100	0.050	0.042	0.042	0.037	0.034	0.031	0.029	0.028	0.027	0.022	0.017	0.012	0.008		
$\infty$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000		

Продовження таблиці Б.2

Рівень значимості $\alpha = 0.01$ .														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	$\infty$
<i>N</i>	Кількість ступенів волі <i>f</i>													
2	1.000	0.995	0.979	0.958	0.937	0.917	0.900	0.882	0.867	0.854	0.795	0.707	0.606	0.500
3	0.993	0.942	0.883	0.834	0.793	0.761	0.734	0.711	0.691	0.674	0.606	0.515	0.423	0.333
4	0.968	0.864	0.781	0.721	0.676	0.641	0.613	0.590	0.570	0.554	0.488	0.406	0.325	0.250
5	0.928	0.789	0.697	0.633	0.588	0.553	0.526	0.504	0.483	0.470	0.409	0.335	0.264	0.200
6	0.883	0.722	0.626	0.564	0.520	0.487	0.461	0.440	0.442	0.408	0.353	0.286	0.223	0.167
7	0.838	0.664	0.569	0.508	0.466	0.435	0.411	0.391	0.375	0.362	0.311	0.249	0.193	0.143
8	0.795	0.615	0.521	0.463	0.423	0.393	0.370	0.352	0.337	0.343	0.278	0.221	0.170	0.125
9	0.754	0.573	0.481	0.425	0.387	0.359	0.338	0.321	0.307	0.295	0.251	0.199	0.152	0.111
10	0.718	0.536	0.447	0.393	0.357	0.331	0.311	0.295	0.281	0.270	0.230	0.181	0.138	0.100
12	0.653	0.475	0.392	0.343	0.310	0.286	0.254	0.242	0.242	0.232	0.196	0.154	0.116	0.083
15	0.575	0.407	0.332	0.288	0.259	0.239	0.223	0.210	0.200	0.192	0.161	0.125	0.093	0.067
20	0.480	0.330	0.265	0.229	0.205	0.188	0.175	0.165	0.157	0.150	0.125	0.096	0.071	0.050
24	0.425	0.287	0.230	0.197	0.176	0.161	0.150	0.141	0.134	0.128	0.106	0.081	0.060	0.042
30	0.363	0.241	0.191	0.164	0.145	0.133	0.123	0.116	0.110	0.105	0.087	0.066	0.048	0.033
40	0.294	0.192	0.151	0.128	0.114	0.103	0.096	0.090	0.085	0.082	0.067	0.050	0.036	0.025
60	0.215	0.137	0.107	0.090	0.080	0.072	0.067	0.063	0.059	0.057	0.046	0.034	0.025	0.017
120	0.123	0.076	0.059	0.049	0.043	0.039	0.036	0.033	0.032	0.031	0.024	0.018	0.013	0.008
$\infty$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблиця В.1 – Варіанти завдань до лабораторної роботи № 4

№	Y1				Y2			Y3			Y4			
	Y11	Y12	Y13	Y14	Y21	Y22	Y23	Y31	Y32	Y33	Y41	Y42	Y43	Y44
1	20	19	18	17	40	42	43	50	51	53	100	101	99	98
2	444	442	441	442	930	931	933	1270	1269	1267	1534	1532	1531	1532
3	666	667	668	667	820	819	822	1160	1161	1163	1533	1535	1536	1535
4	913	912	910	908	810	812	814	1140	1139	1138	1432	1431	1429	1431
5	116	117	118	119	800	798	797	1120	1121	1122	1431	1432	1434	1433
6	324	323	322	321	690	691	693	1080	1081	1079	1330	1328	1327	1328
7	690	691	692	690	680	682	679	1060	1059	1057	1329	1331	1332	1331
8	713	712	711	712	670	672	674	550	551	553	1228	1227	1225	1224
9	411	412	413	412	560	558	557	930	929	928	1227	1228	1230	1232
10	555	554	553	551	550	551	553	900	901	902	1126	1124	1123	1124
11	6429	6430	6431	6432	540	541	538	880	881	879	1125	1127	1128	1127
12	3121	3120	3119	3118	430	432	434	860	859	857	1024	1023	1021	1022
13	2150	2151	2152	2150	420	418	419	740	741	743	1023	1024	1025	1027
14	1000	999	998	999	410	411	413	720	719	718	922	920	919	920
15	999	1000	1001	1000	300	298	301	701	702	700	921	923	924	923

Продовження таблиці В.1

№	Y1				Y2			Y3			Y4			
	Y11	Y12	Y13	Y14	Y21	Y22	Y23	Y31	Y32	Y33	Y41	Y42	Y43	Y44
16	680	679	678	676	290	292	294	680	681	679	820	819	817	818
17	310	311	312	313	280	278	277	560	559	557	819	520	822	824
18	200	199	198	197	270	271	274	540	541	543	718	716	715	716
19	170	171	172	170	160	162	158	520	519	518	717	719	720	719
20	130	129	128	129	150	152	153	400	401	402	616	615	613	614
21	110	111	112	111	140	138	137	380	379	377	615	616	618	620
22	100	99	98	96	130	132	135	360	359	358	514	512	511	512
23	105	106	103	104	120	119	117	240	241	243	513	515	516	515
24	102	103	104	103	110	112	113	220	219	218	412	411	409	410
25	100	101	102	100	105	103	106	200	201	202	411	412	414	416
26	98	99	97	98	64	63	51	91	92	93	70	71	69	70
27	23	24	22	21	23	28	26	42	44	40	11	12	13	12
28	200	201	202	200	300	298	297	198	201	200	150	149	148	149
29	543	542	541	542	560	558	557	950	951	953	1228	1227	1225	1227
30	432	431	429	428	430	432	434		859	857	1024	1023	1021	1022

Таблиця В.2 – Значення  $\chi^2_{\text{таб.}}$  – критерію Бартлета

Кількість ступенів волі f	Ймовірність						
	0.99	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
1	0.0016	0.0039	0.016	0.064	0.148	0.455	1.07
2	0.020	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41
3	0.115	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.66
4	0.30	0.71	1.06	1.65	2.19	3.36	4.9
5	0.55	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.1
6	0.87	1.63	2.2	3.07	3.83	5.35	7.2
7	1.24	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.4
8	1.65	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.5
9	2.09	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.7
10	2.56	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.8
11	3.1	4.6	5.6	7.0	8.1	10.3	12.9
12	3.6	5.2	6.3	7.8	9.0	11.3	14.0
13	4.1	5.9	7.0	8.6	9.9	12.3	16.1
14	4.7	6.6	7.8	9.5	10.8	13.3	16.2
15	5.2	7.3	8.5	10.3	11.7	14.3	17.3
16	5.8	8.0	9.3	11.2	12.6	15.3	18.4
17	6.4	8.4	10.1	12.0	13.5	16.3	19.5
18	7.0	9.4	10.9	12.9	14.4	17.3	20.6
19	7.6	10.1	11.7	13.7	15.4	18.3	21.7
20	8.3	10.9	12.4	14.6	16.3	19.3	22.8
21	8.9	11.6	13.2	15.4	17.2	20.3	23.9
22	9.5	12.3	14.0	16.3	18.1	21.3	24.9
23	10.2	13.1	14.8	17.2	19.0	22.3	26.0
24	10.9	13.8	15.7	18.1	19.9	23.3	27.1
25	11.5	14.6	16.5	18.9	20.9	24.3	28.2
26	12.2	15.4	17.3	19.8	21.8	25.3	29.3
27	12.9	16.2	18.1	20.7	22.7	26.3	30.3
28	13.6	16.9	18.9	21.6	23.6	27.3	31.4
29	14.2	17.7	19.8	22.5	24.6	28.3	32.5
30	15.0	18.5	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5

Таблиця Д.1 – Варіанти завдань до лабораторної роботи № 5

№	Y1			Y2			Y3			Y4		
	Y11	Y12	Y13	Y21	Y22	Y23	Y31	Y32	Y33	Y41	Y42	Y43
1	200	201	202	300	298	297	198	201	200	150	149	148
2	23	24	22	23	28	26	42	41	43	11	12	11
3	98	99	97	64	67	59	91	89	94	70	73	71
4	100	101	102	105	109	99	200	197	204	411	416	413
5	102	103	104	110	115	103	220	219	218	412	419	415
6	105	106	103	120	126	112	240	236	246	513	522	517
7	100	99	98	130	137	121	360	355	365	514	512	511
8	110	111	112	140	148	130	380	374	383	615	616	610
9	130	129	128	150	159	141	400	393	406	616	619	612
10	170	171	172	160	162	158	520	512	521	717	722	714
11	200	199	198	270	271	268	540	531	545	718	725	716
12	310	311	312	280	282	277	560	550	564	819	828	818
13	680	679	678	290	293	286	680	679	683	820	821	810
14	999	1000	1001	300	304	295	700	698	706	921	924	916
15	1000	999	998	410	415	404	720	719	718	922	927	928
16	2150	2151	2152	420	426	413	740	737	744	1023	1030	1031
17	3121	3120	3119	430	437	422	860	856	865	1024	1023	1021
18	6429	6430	6431	540	548	531	880	875	883	1125	1126	1128
19	555	554	553	550	559	540	900	894	906	1128	1124	1127
20	411	412	413	560	558	557	930	923	931	1327	1330	1334
21	713	712	711	670	671	668	550	542	554	1228	1232	1237
22	690	691	692	680	682	677	1060	1051	1066	1329	1335	1336
23	324	323	322	690	693	686	1080	1070	1083	1330	1329	1331
24	116	117	118	800	804	795	1120	1119	1125	1431	1429	1430
25	913	912	910	810	815	806	1140	1139	1138	1432	1430	1426
26	666	667	668	820	826	617	1160	1158	1164	1533	1538	1535
27	444	442	441	930	937	922	1270	1267	1276	1534	1532	1531
28	321	322	323	110	118	101	220	216	223	412	411	416
29	432	431	429	160	169	150	380	375	385	514	520	515
30	543	542	541	140	138	137	240	234	241	513	510	514

Таблиця Д.2 – Значення  $F_{табл.}$  – критерію Фішера

№	1	2	3	4	5	6	7	8
	Рівень значимості $\alpha = 0.05$ .							
1	161.450	199.500	215.710	224.580	230.160	233.990	236.770	238.880
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041
5	6.608	5.786	5.410	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147
7	5.591	4.737	4.342	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.501	3.438
9	5.117	4.257	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.136	3.072
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.791	2.707	2.641
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.421
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397
23	4.279	3.422	3.028	2.795	2.640	2.528	2.442	2.375
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266
40	4.085	3.231	2.839	2.606	2.450	2.336	2.249	2.180
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016
$\infty$	3.842	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938

Продовження таблиці Д.2

9	10	12	15	20	24	30	40	$\infty$
Рівень значимості $\alpha = 0.05$								
240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	254.32
19.385	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.496
8.812	8.786	8.745	8.703	8.660	8.639	8.617	8.594	8.527
5.999	5.964	5.912	5.858	5.803	5.774	5.746	5.717	5.628
4.773	4.735	4.678	4.619	4.558	4.527	4.496	4.464	4.365
4.099	4.060	4.000	3.938	3.874	3.842	3.808	3.774	3.669
3.677	3.637	3.575	3.511	3.445	3.411	3.376	3.340	3.330
3.388	3.347	3.284	3.218	3.150	3.115	3.079	3.043	2.928
3.179	3.137	3.073	3.006	2.937	2.901	2.864	2.826	2.707
3.020	2.978	2.913	2.845	2.774	2.737	2.700	2.661	2.538
2.896	2.854	2.788	2.719	2.646	2.609	2.571	2.531	2.405
2.796	2.753	2.687	2.617	2.544	2.506	2.466	2.426	2.296
2.714	2.671	2.604	2.533	2.459	2.420	2.380	2.339	2.206
2.646	2.602	2.534	2.463	2.388	2.349	2.308	2.266	2.131
2.588	2.544	2.475	2.404	2.328	2.288	2.247	2.204	2.066
2.538	2.494	2.425	2.352	2.276	2.235	2.194	2.151	2.010
2.494	2.450	2.381	2.308	2.230	2.190	2.148	2.104	1.960
2.456	2.412	2.342	2.269	2.191	2.150	2.107	2.063	1.917
2.423	2.378	2.308	2.234	2.156	2.114	2.071	2.026	1.878
2.393	2.348	2.278	2.203	2.124	2.083	2.039	1.994	1.843
2.366	2.321	2.250	2.176	2.096	2.054	2.010	1.965	1.812
2.342	2.297	2.226	2.151	2.071	2.028	1.984	1.938	1.783
2.320	2.275	2.204	2.128	2.048	2.005	1.961	1.914	1.757
2.300	2.255	2.183	2.108	2.027	1.984	1.939	1.892	1.733
2.282	2.237	2.165	2.089	2.007	1.964	1.919	1.872	1.711
2.266	2.220	2.148	2.072	1.990	1.946	1.901	1.853	1.691
2.250	2.204	2.132	2.056	1.974	1.930	1.884	1.836	1.672
2.236	2.190	2.118	2.041	1.959	1.915	1.869	1.820	1.654
2.223	2.177	2.105	2.028	1.945	1.901	1.854	1.806	1.638
2.211	2.165	2.092	2.015	1.932	1.887	1.841	1.792	1.622
2.124	2.077	2.004	1.925	1.839	1.793	1.744	1.693	1.509
2.040	1.993	1.917	1.836	1.748	1.700	1.649	1.594	1.389
1.959	1.911	1.834	1.751	1.659	1.608	1.554	1.429	1.254
1.880	1.831	1.752	1.666	1.571	1.517	1.459	1.394	1.000

Продовження таблиці Д.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8
	Рівень значимості $\alpha = 0.01$							
1	4052.20	4999.50	5403.30	5624.60	5763.70	5859.00	5928.30	5981.10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.332	99.356	99.374
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489
4	21.198	18.000	16.694	15.978	15.522	15.207	14.976	14.799
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	4.200	5.057
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.745
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.861	4.620	4.441	4.302
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.005
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363
25	7.770	5.563	4.676	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288
27	7.677	5.448	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226
29	7.598	5.421	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198
40	7.563	5.390	4.510	4.018	3.699	3.474	3.305	3.173
60	7.314	5.178	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993
100	7.077	4.977	3.126	3.649	3.339	3.119	2.954	2.823
220	6.851	4.786	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663
$\infty$	6.835	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511

Продовження таблиці Д.2

9	10	12	15	20	24	30	40	$\infty$
Рівень значимості $\alpha = 0.01$								
6022.50	6055.80	6106.30	6157.30	6208.70	6234.60	6260.70	6286.80	6366.00
99.388	99.399	99.416	99.432	99.449	99.458	99.466	99.474	99.499
27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.125
14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.463
10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.467	9.379	9.291	9.020
7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.228	7.143	6.880
6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.650
5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	4.859
5.351	5.527	5.111	4.962	4.808	4.279	4.649	4.567	4.311
4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	3.909
4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.603
4.387	4.296	4.155	4.010	3.858	3.781	3.701	3.619	3.361
4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.165
4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.004
3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	2.868
3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.753
3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.921	2.653
3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.566
3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.489
3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.779	2.695	2.421
3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.360
3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.668	2.583	2.306
3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.536	2.256
3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.211
3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.169
3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.132
3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.097
3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.064
3.092	3.005	2.869	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.034
3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.006
2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	1.805
2.719	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.029	1.936	1.601
2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.850	1.860	1.763	1.381
2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.000