МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Завдання та методичні вказівки до виконання
розрахунково-графічних робіт
для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри кібербезпеки
та математичного моделювання
Протокол № 10 від 28 січня 2020 р

Чернігів ЧНТУ 2020

Числові та функціональні ряди. Завдання та методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт / Укл.: Балюнов О.О., Синенко М.А. – Чернігів: ЧНТУ, 2020.- 38 с.

Укладачі: Балюнов Олексій Олександрович-доцент кафедри кібербезпеки та математичного моделювання;

Синенко Марина Анатоліївна - доцент кафедри кібербезпеки та математичного модедювання

Рецензент: Акименкок.А.М. ф.-м.н., доцент кафедри інформаційних та комп’ютерних систем

Відповідальний за випуск: Ткач Ю.М. доктор пед.наук

ЗМІСТ

1. ПЕРЕДМОВА……………………………………………………………...4
2. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ………………………………………………5
3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ РГР……………………………………………………29
4. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА……………………………………38

ПЕРЕДМОВА

Числові та функціональні ряди – це простий і разом з тим досконалий аппарат математичного аналізу, який дозволяє більш глибоко вивчати властивості функцій, обчислювати їх значення, а також використовується для наближеного обчислення інтегралів та розв'язання диференціальних рівнянь. Числові та функціональні ряди займають помітне місце не тільки в математиці. Вони необхідні при вивченні природничих наук, інженерії, криптографії, економіки, тому знайомство з числовими та функціональними рядами є невід'ємною частиною освіти майбутніх інженерів та економістів.

Дані методичні вказівки містять розгорнуті теоретичні відомості та підбірку задач із розділу «Числові та функціональні ряди». У посібнику поданий детальний розбір розв'язання значної кількості типових задач, а також розроблені задачі, які можуть бути використані як завдання для розрахунково-графічних робіт та організації самостійної роботи студентів.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Числові ряди. Основні означення та теореми

Розглянемо довільну числову послідовність $\{a_n\},\ n = 1,2,\dots$

Означення. Числовим рядом називається нескінченна сума виду

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Числа $a_1,\ a_2, \dots a_n -$ членами числового ряду; $a_n - \ n$ *–м,* або загальним членом числового ряду. Загальний член числового ряду, взагалі кажучи, є функцією натурального аргумента $n.$

Сума виду

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

називається частковою сумою числового ряду.

Будемо говорити, що числовий ряд є *збіжним* (збігається), якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

У цьому вирпдку значення границі , число $S,$ називається сумою числового ряду. Якщо границя послідовності часткових сум не існує, або дорівнює нескінченності, то говорять, що числовий ряд *розбігається.*

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} bq^i = b + bq + bq^2 + \cdots$$

Неважко бачити, що члени даного ряду утворюють геометричну прогресію з першим членом b і знаменником $q,$ тому

$$S_n = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}.$$

(Ми використали формулу n перших членів геометричної прогресії.)

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$; і $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, при $|q| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{b}{1-q}, |q| < 1 \\ \infty, \qquad |q| \geq 1 \end{cases}$$

Таким чином, при $|q| < 1$ ряд збігається, а його сума дорівнює

$$\frac{b}{1-q}$$

(сума нескінченно спадної геометричної прогресії), при $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{n^2 + n - 2}.$$

Загальний член ряду зручно записати у вигляді:

$$a_n = \frac{9}{n^2 + n - 2} = 3\frac{(n+2)-(n-1)}{(n-1)(n+2)} = 3\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Тоді

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} 3\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2}\right) = 3\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right)$$

$$= 3\left(\frac{11}{6} + \sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Тепер легко бачити, що

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{11}{2} = 5{,}5.$$

Отже, ряд збігається до суми $S = 5{,}5$.

Приклад 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Перепишемо загальний член ряду у вигляді:

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

Тоді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + .. + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

тобто ряд розбігається.

Дослідження питання збіжності – важлива задача теорії числових рядів, яку не завжди можна розв'язати, спираючись лише на означення. Тому далі розглянемо ознаки збіжності числових рядів.

Необхідна ознака збіжності числових рядів

Якщо числовий ряд збігається, то його загальний член прямує до нуля, тобто виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Відмітимо, що загальний член ряду, розглянутого нами у прикладі 3, прямує до нуля при n прямуючому до нескінченності, але ряд при цьому розбігається, тобто виконання умови $a_n \to 0$, при $n \to \infty$ще не гарантує збіжності ряду. Однак, якщо необхідна умова збіжності не виконується, ряд однозначно розбігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{450n-30}$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності числових рядів.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{450n-30} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n\left(450-\frac{30}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{450+\frac{30}{n}} = \frac{1}{225} \neq 0.$$

Необхідна ознака збіжності числових рядів не виконується, отже, ряд розбігається.

Ряд виду

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

називається залишком числового ряду. Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n.$$

Має місце **теорема**:

Числовий ряд збігається тоді і тільки тоді,коли $\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$

Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатніми членами

Далі будемо розглядати числові ряди, члени яких додатні.

Ознака порівняння числових рядів.

Розглянемо два числових ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \ , \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i,$$

члени яких задовільняють нерівність $0 < a_i \leq b_i, \forall\, i$. Справедливі наступні твердження.

Якщо ряд $\sum b_i$ *збігається, то ряд* $\sum a_i$ *також буде збігатись. Якщо ряд* $\sum a_i$ *розбігається, то розбігатись буде також і ряд* $\sum b_i$.

Як правило при дослідженні на збіжність числові ряди порівнюють з узагальнено-гармонічними рядами, або нескінченно спадною геометричною прогресією. Узагальнено-гармонічним називається ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

який збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$. (Далі ми доведемо це тведження за допомогою інтегральної ознаки збіжності.) Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

називається гармонічним рядом. Як слідує з попереднього, гармонічний ряд розбігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{1+n^5}}.$$

Розглянемо загальний член даного числового ряду та знайдемо еквівалентний йому член узагальнено- гармонічного ряду.

$$a_n = \sqrt[3]{\frac{n}{1+n^5}} = \left(\frac{n}{n^5\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}\right)^{1/3} = \frac{1}{n^{4/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}}} \sim \frac{1}{n^{4/3}}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}}} < 1,$$

то справедлива оцінка

$$a_n < \frac{1}{n^{4/3}},$$

Але ряд з загальним членом $\frac{1}{n^{4/3}}$ збігається ($4/3 > 1$), тому в силу ознаки порівняння буде збігатись даний числовий ряд.

Приклад 6. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1,5}}.$$

Відмітимо, що логарифмічна функція зростає досить повільно, тому для будь-якого додатнього α, починаючи з деякого номера n, справедлива нерівність:

$$\ln n < n^{\alpha}.$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0.$$

Отже, $\ln n$ можна оцінити, наприклад, за допомогою степеневої функції $x^{0,25}$.

Таким чином,

$$\frac{\ln n}{n^{1,5}} < \frac{n^{0,25}}{n^{1,5}} = \frac{1}{n^{1,25}}.$$

Числовий ряд збігається в силу ознаки порівняння.

У деяких задачах зручно використовувти ознаку порівняння в граничній формі.

Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \quad 0 < a_n \le b_n$$

- *числові ряди. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \ \ (K \ne 0, \qquad K \ne \infty),$$

то числові ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Приклад 7. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 20n - 13}{(2n^2 - 1)^2}.$$

У даному випадку оцінити безпосередньо загальний член числового ряду – досить громіздка задача, тому застосуємо ознаку порівняння у граничній формі. Спочатку помічаємо, що при $n \to \infty$

$$\frac{n^3+20n-13}{(2n^2-1)^2} = \frac{n^3+20n-13}{4n^4-4n^2+1} \sim \frac{n^3}{4n^4} = \frac{1}{4n},$$

Тому будемо порівнювати даний числовий ряд з гармонічним рядом. Позначимо a_n загальний член даного ряду і, відповідно, $b_n -$ загальний член гармонічного ряду.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+20n-13}{4n^4-4n^2+1}\cdot\frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+20n^2-13n}{4n^4-4n^2+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(1+20\frac{1}{n^2}-13\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(4-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки гармонічний ряд розбігається, то і даний ряд є розбіжним.

Ознака д’Аламбера.

Нехай існує границя виду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d,$$

де a_n, $a_{n+1} -$ *відповідно* $n -$*ий та* $n+1 -$*ий члени числового ряду. Тоді якщо* $d < 1$, *то числовий ряд збігається, якщо* $d > 1$, *то числовий ряд розбігається.*

(Якщо $d = 1$, то для дослідження ряду слід вибирати іншу ознаку.)

Приклад 8. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$$

Скористаємось ознакою д’Аламбера.

$$a_n = \frac{n^n}{2^n n!};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{n!\,(n+1)}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Отже, числовий ряд розбігається.

Ознака Коші

Нехай існує границя виду

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r,$$

де $a_n - n -$*ий член числового ряду. Тоді якщо* $r < 1$, *то ряд збігається, якщо* $r > 1$, *то ряд розбігається. (При* $r = 1$ *ознака не дає відповіді на питання).*

Приклад 9. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-4}{7n+2}\right)^{2n}.$$

Скористаємося ознакою Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-4}{7n+2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-4}{7n+2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{4}{n}}{7+\frac{2}{n}}\right)^2 = \frac{25}{49} < 1.$$

Ряд збігається.

Інтегральна ознака збіжності числових рядів

Нехай члени a_n *числового ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

мають вигляд $a_n = f(n)$, *і функція* $f(n)$ *невід'ємна та монотонно спадна на інтервалі* $[1;\ +\infty)$, *тоді числовий ряд і невласний інтеграл*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

У деяких випадках дослідити на збіжність невласний інтеграл простіше, ніж числовий ряд.

Приклад 10 Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Скористаємося інтегральною ознакою збіжності і дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty} \int_2^{A} (\ln x)^{-0,5}\, d(\ln x) = \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_2^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} 2\left(\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln 2}\right) = \infty.$$

Отже, інтеграл, як і ряд розбігаються.

Дослідимо на збіжність за допомогою інтегральної ознаки узагальнено-гармонічні числові ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Для цього обчислимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} x^{-\alpha} dx = \lim_{A\to\infty} \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^A, \alpha \neq 1 \\ \ln x\,\Big|_1^A, \alpha = 1 \end{cases} = \lim_{A\to\infty} \begin{cases} \dfrac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \\ \ln A, \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty, \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, \alpha > 1 \end{cases}$$

Таким чином, ми показали, що узагальнено-гармонічні числові ряди збігаються при $\alpha > 1$ і розбігаються при $\alpha \leq 1$.

Знакозмінні числові ряди

Числовий ряд називається знакозмінним, якщо він містить нескінченну кількість як додатніх так і від'ємних членів. Для знакозмінних числових рядів уводять поняття абсолютної збіжності.

Говорять, що закозмінний ряд абсолютно збіжний, якщо збігається ряд, утворений модулями членів даного знакозмінного ряду,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Відмітимо, що якщо ряд, утворений модулями знакозмінного ряду збігається, то буде збігатись і сам знакозмінний ряд (це тведження легко отримати як наслідок з критерію збіжності Коші), тобто абсолютна збіжність знакозмінного ряду означанє збіжність двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Знакозмінний ряд називається умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд, утворений його модулями, розбігається.

Розглянемо ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n, \quad c_n > 0.$$

Цей ряд називається знакопочереженим, і є частинним випадком знакозмінного ряду.

Ознака Лейбніца

Нехай маємо знакопочережений ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \;, \qquad c_n > 0.$$

Якщо послідовність $\{c_n\}$ монотонно спадна, і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то знакопочережений ряд збігається.

Приклад 11. Дослідити на абсолютну збіжність числові ряди

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right); \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Спочатку дослідимо на абсолютну збіжність перший числовий ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Оскільки $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

і, отже, перший ряд абсолютно збіжний.

Виконаємо деякі перетворення загального члена другого ряду. Скориставшись формулами пониження степеня, маємо:

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 2sin^2\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{n}.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = 2\sum_{n=1}^{\infty}sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Легко бачити, що $sin^2\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}$, тобто загальний член останнього ряду еквівалентний загальгому члену гармонічного ряду, а, отже, розбігається.

Для дослідження збіжності знакопочереженого ряду скористаємось ознакою Лейбніца.

$$c_n = \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Відмітимо, що послідовність аргументів косинуса $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ є спадною і належить інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, на якому функція $\cos x$ також спадає. Тому послідовність $\left\{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ є зростаючою, а послідовність $\left\{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$ – знову спадною. Крім того,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0.$$

Ряд збігається за ознакою Лейбніца. Ряд (b) – умовно збіжний.

Функціональні ряди

Нехай $\{u_n(x)\}$ – функціональна послідовність, кожен член якої – функція, визначена на деякій множині $X,\ x\epsilon X$, і залежна як від змінної x, так і від номера n.

Функціональним рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,;$$

Сума виду

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} u_i(x)$$

називається n –ою частковою сумою функціонального ряду;

ряд виду

$$r_n=\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$$

називається залишком функціонального ряду.

При будь-якому конкретному значенню $x_0\epsilon\, X$ функціональний ряд перетворюється у числовий

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

Якщо останній збігається, то говорять, що функціональний ряд збігається в точці x_0.

Сукупність усіх значень $x \epsilon X$, при яких функціональний ряд збігається утворює область збіжності функціонального ряду. Далі область збіжності функціонального ряду будемо позначати D.

Сумою фунціонального ряду називається функція

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \ \ x \epsilon D.$$

*Приклад 12.*Знайти область збіжності функцінального ряду

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}\ 5^n}; \quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(x^2-2x+3)^n}; \quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{-0,5x+1}}.$$

Для кожного ряду спочатку знайдемо область, де ряд збігається абсолютно, а потім дослідимо поведінку ряду на межі області. Для визначення області абсолютної збіжності ряду (*a)* доцільно застосувати ознаку д' Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{n+1}}{\sqrt{n+1}\,5^{n+1}}\cdot\frac{5^n\sqrt{n}}{(x-4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot|x-4| =$$

$$= \frac{|x-4|}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x-4|}{5}.$$

За ознакою д'Аламбера ряд збігається, якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1,$$

Отже, залишається розв'язати нерівність $\frac{|x-4|}{5} < 1.$

$$\frac{|x-4|}{5} < 1 \Leftrightarrow |x-4| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 < 5 \\ x-4 > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \epsilon (-1; 9),$$

тобто, даний ряд абсолютно збігається на інтервалі $(-1; 9)$ і розбігається при $x \epsilon (-\infty;\ -1) \cup (9;\ \infty)$. Залишається дослідити поведінку ряду в точках $x = -1;\ \ x = 9$. Для цього підставимо відповідні значення змінної x у функціональний ряд. При $x = 9$ маємо розбіжний узагальнено-гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ \left(\alpha = \frac{1}{2}\right).$$

При $x = -1$ отримаємо знакопочережений числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

який збігається за ознакою Лейбніца. Отже, область збіжності функціонального ряду: $D = [-1; 9)$.

Для дослідження ряду (b) на абсолютну збіжність скористаємося ознакою Коші.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(x^2 - 2x + 3)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(x^2 - 2x + 3)} = \frac{3}{(x^2 - 2x + 3)}.$$

Далі розв’язуємо нерівність:

$$\frac{3}{x^2 - 2x + 3} < 1.$$

$$\frac{3}{x^2 - 2x + 3} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{3} > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) > 0.$$

Методом інтервалів знайдемо множину розв’язків нерівності:

$$x \epsilon (-\infty; 0) \cup (2; \infty),$$

яка і є областю абсолютної збіжності функціонального ряду. За межами області ряд розбігається. (У даному випадку ми опустили модуль, оскільки квадратний трьохчлен у знаменнику приймає додатні значення при будь-яких x).

Перепишемо загальний член ряду (c) у вигляді

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{n^{-0,5x+1}} = \frac{1}{n^{-0,5x+0,5}}.$$

Цей ряд збігається, якщо виконується умова:

$$-0{,}5x + 0{,}5 > 1 \Leftrightarrow -0{,}5x > 0{,}5 \Leftrightarrow x < -1.$$

Отже, область збіжності ряду (с): $(-\infty;\ -1)$.

Рівномірна збіжність функціональних рядів

Говорять, що функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

рівномірно збігається до функції $S(x)$ *на області* D, *якщо для будь-якого додатнього* $\varepsilon, (\varepsilon > 0)$ *існує такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що для усіх* $n > N$ *і для усіх* $x \epsilon D$ *виконується нерівність* $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

(Тут суттєвим є те, що номер N є спільним для усіх $x \epsilon D$, тобто N залежить тільки від вибраного ε і не залежить від $x \in D$).

Рівномірна збіжність відіграє важливу роль в теорії функціональних рядів, оскільки сума рівномірно збіжного ряду наслідує властивості членів цього ряду.

Для дослідження рівномірної збіжності функціональних рядів будемо користуватися наступними критеріями.

Критерій Коші

Для того, щоб функціональний ряд рівномірно збігався на області D *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого додатнього* ε *існував номер* $N = N(\varepsilon)$, *такий що для будь-якого* $n > N$ *і для будь-якого натурального* $p > 0$ *виконувалась нерівність*

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)\right| < \varepsilon,\ \ \forall\ x \epsilon D.$$

Критерій Вейєрштрасса

Якщо існує збіжний числовий ряд з додатніми членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

такий, що для усіх n *і для усіх* $x \in D$ *виконується нерівність* $|u_n(x)| \le a_n$, *то функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

збігаться абсолютно і рівномірно на області D.

Числовий ряд $\sum a_n$ називається мажорантним рядом для функціонального ряду $\sum u_n(x)$.

Приклад 13. Дослідити на рівномірну збіжність функціональні ряди

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^4x^2}, \quad x \in R; \quad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x}, x \in [0;\ \infty).$$

Щоб для функціонального ряду (a) побудувати мажорантний ряд знайдемо максимум функції

$$u_n(x) = \frac{x^2}{1+n^4x^4}.$$

$$u_n{}'(x) = \frac{(2x(1+n^4x^4) - 4n^4x^5)}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{2x(1-n^4x^4)}{(1+n^4x^2)^2};$$

$$u_n{}'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{1}{n}; \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Визначимо як змінюється знак похідної при переході через критичні точки:

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{n}\right)$	$-\frac{1}{n}$	$\left(-\frac{1}{n}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{1}{n}; \infty\right)$
$u_n{}^{(x)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Як бачимо, $x = \pm\frac{1}{n}$ – точки максимуму функції,

$$u_n(x) \le u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

Таким чином, збіжний узагальнено-гармонічний ряд є мажорантним для даного функціонального ряду, і функціональний ряд рівномірно збігається на R.

Розглянемо ряд (b). Оскільки

$$\frac{x^2}{1+n^2x} \le \frac{x^2}{n^2x} = \frac{x}{n^2}, \qquad x \in [0;\ \infty),$$

то ряд збігається при будь-якому значенні $x \in [0;\ \infty)$ в силу ознаки порівняння. Однак, якщо $x_n = n^2$, то

$$u_n(n^2) = \frac{n^4}{1+n^4} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Це, в свою чергу, означає що не виконується критерій рівномірної збіжності Коші, тобто ряд збігається, але не рівномірно.

Відмітимо властивості рівномірнозбіжних функціональних рядів.

Теорема (про неперервність суми функціонального ряду)

Якщо функціональний ряд неперервних функцій $u_n(x)$ рівномірно збігається на області D до фкнкції $S(x)$, то остання є неперервною на D.

Теорема (про почленне інтегрування функціонального ряду)

Якщо функціональний ряд неперервних функцій $u_n(x)$ рівномірно збігпється до функції $S(x)$ на відрізку $[a; b]$, то його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[x_0; x] \subset [a; b]$, тобто

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt.$$

Теорема (про почленне диференціювання функціщнальних рядів)

Якщо функціональний ряд неперервно диференційованих функцій $u_n(x)$ збігається на відрізку $[a; b]$ до функції $S(x)$, а ряд похідних $u_n{}'(x)$ рівномірно збігається на цьому відрізку,то $S(x)$ є неперервно диференційованою на $[a; b]$ функцією, причому має місце формула:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x).$$

*Приклад 14.*Знайти

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n x^n}.$$

Оскільки загальний член даного функціонального ряду задовільняє нерівність

$$0<\frac{1}{2^n n^x}<\frac{1}{2^n}, \forall\, x\,\epsilon\,[0;\infty),$$

то ряд рівномірно збігається в силу ознаки Вейєрштрасса, а, отже, застосуємо теорему про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду.

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{0{,}5}{1-0{,}5}=1.$$

Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

Числа c_n називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

Степеневий ряд завжди збігається принаймі в одній точці x_0. Взагалі можна показати, що областю збіжності довільного степеневого ряду є інтервал скінченний або нескінченний з центром у точці x_0, або єдина точка $x_{0.}$

Радіусом збіжності степеневого ряду називається невід’ємне число R, таке, що ряд збігається у інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$ і розбігається на об’єднанні інтервалів $(-\infty; x_0-R)\cup(x_0+R;\ \infty)$. Радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за допомогою формул:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}};\;\; R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Ряди Тейлора

Нехай функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні усіх порядків.

Рядом Тейлора функції $f(x)$ *в точці* x_0 *називається степеневий ряд виду:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Якщо $x_0 = 0$*, то маємо ряд, який називається рядом Маклорена.*

Ряди Тейлора широко використовують для наближених обчислень. Відмітимо, що ряд Тейлора породжений функцією $f(x)$ може розбігатись, або збігатись до іншої функції. Практичний інтерес представляє випадок, коли ряд збігнється до функції $f(x)$.

Наведемо розклади у ряд Тейлора деяких елементарних функцій.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \epsilon R;$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \epsilon R;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \epsilon R;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad x \epsilon (-1; 1);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \epsilon (-1; 1].$$

Приклад 15. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0.

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, x_0 = 0.$

Перепишемо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = (1+x)^{-0,5}$ і скористаємося розкладом у ряд Тейлора функції $(1+x)^{\alpha}, \alpha = -0,5$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)x^n$$

$$+ \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\, n!}x^n, \qquad x \in (-1;1).$$

b) $f(x) = \cos 3x\ \cos 5x,\ \ x = 0.$

Перепишемо $f(x)$ у вигляді: $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x)$ і представимо кожен доданок у вигляді ряду Тейлора.

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!};$$

$$\cos 8x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(8x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 64^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Додамо почленно отримані ряди:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4^n + 64^n)(x)^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in R.$$

c) $f(x) = \arcsin x.$

Знайдемо похідну функції f(x) та запишемо її у вигляді ряду Тейлора.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-0,5}.$$

Скориставшись розкладом функції $(1+t)^{\alpha},\ \alpha = -0,5;\ \ t = -x^2$, маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}, \qquad x \in (-1;1).$$

Проінтегруємо почленно отриманий степеневий ряд. (Це можна зробити в силу рівномірної збіжності останнього на будь-якому відрізку, що належить інтервалу збіжності.)

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\right) dt =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!\,(2n+1)} x^{2n+1},$$

$$x \epsilon (-1; 1).$$

*Приклад 16.*Обчислити з точністю до ε інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \varepsilon = 0{,}001.$$

Відмітимо, що даний інтеграл відноситься до класу інтегралів, які не виражаються через елеметарні функції.

Розкладемо підінтегральну функцію у степеневий ряд:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Далі скористаємося теоремою про почленне інтегрування степеневих рядів в інтервалі збіжності.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Таким чином, ми отримали значення інтегралу у вигляді збіжного знакозмінного числового ряду. Залишається наближего знайти його суму з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$. Нагадаємо, що для знакозмінного ряду справедлива оцінка: $|r_n| \leq |a_{n+1}|$. Отже, будемо обчислювати значення членів ряду поки не отримаємо число меньше $\varepsilon = 0.001$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} - \frac{1}{7! \cdot 7} + \cdots \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx$$

$$\approx 0{,}946.$$

Приклад 17. Користуючись розкладом функції в ряд, обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)-x^3}{2x^9}.$$

Розкладемо в ряд функцію $\sin x^3$.

$$\sin(x^3)|\text{ позначимо } x^3=t|=\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+3}}{(2n+1)!}=$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^9+\frac{1}{6}x^{15}-\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)-x^3}{2x^9}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\frac{1}{2}x^9+\frac{1}{6}x^{15}-\cdots-x^3}{2x^9}=\lim_{x\to 0}\frac{x^9\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x^6-\cdots\right)}{2x^9}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x^6-\cdots\right)}{2}=\ -\frac{1}{4}.$$

Ряди Фур'є

Нехай $f(x)-2l$-періодична інтегрована на відрізку $[-l;l]$ функція.

Ряд виду

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ \ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx;\ \ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

називається тригонометричним рядом Фур'є, а, відповідно, числа $a_0, a_n,\ b_n$ *–коефіцієнтами Фур'є* $2l$ *–періодичної функції* $f(x)$.

Ряд Фур'є, побудований для функції $f(x)$ може розбігатись, або збінатись до іншої функції.

Має місце наступна теорема (достатні умови збіжності ряду Фур'є).

Якщо $2l$ –періодична функція є кусково-гладенькою на відрізку $[-l;l]$, то її ряд Фур'є збігається до $f(x)$ в кожній точці неперервності і до числа

$$\frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big)$$

в кожній точці розриву функції, тобто має місце формула:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Для того, щоб отримати розклад функції у ряд Фур'є, достатньо обчислити її коефіцієрти Фур'є.

Приклад 18. Розкласти у ряд Фур'є періодичну $(T=2)$ функцію, задану на відрізку $[-1;1]$

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\le 0;\\ x, & 0<x<1;\\ 0{,}5, & x=1;\end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}0dx+\int_{0}^{1}xdx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}x\cos\pi nx\,d\,x\left|\begin{matrix}u=x\ \to du=dx\\ dv=\cos\pi nx\,dx\to v=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi n}x\sin\pi nx\bigg|_0^1-\frac{1}{\pi n}\int_0^1\sin\pi nx\,dx=\frac{\cos\pi nx}{(\pi n)^2}\bigg|_0^1=\frac{\cos\pi n-1}{(\pi n)^2}=\frac{(-1)^n-1}{(\pi n)^2};$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin\pi nx\,dx=\int_0^1 x\sin\pi nxdx\left|\begin{matrix}u=x\to du=dx\\ dv=\sin\pi nx\,dx\to v=-\dfrac{\cos\pi nx}{\pi n}\end{matrix}\right|$$

$$=-\frac{x\cos\pi nx}{\pi n}\bigg|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos\pi nx\,dx=-\frac{\cos\pi n}{\pi n}+\frac{\sin\pi nx}{(\pi n)^2}\bigg|_0^1=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

В даному випадку має місце рівність:

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{(\pi n)^2}\cos\pi nx+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx\,.$$

Розглянемо деякі частинні випадки.

Нехай $f(x)-2l$ –періодична парна функція. Неважко показати, що у цьому випадку $b_n=0$, а коефіцієнти a_n визначаються по формулам:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\;\; a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}.$$

Нехай $f(x)-2l$ –періодична непарна функція, тоді $a_n=0$;

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx;$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Приклад 19. Розкласти у ряд Фур'є 2π –періодичну функцію задану на відрізку $[-\pi;\,\pi]$ формулою $f(x)=|x|$

Відмітимо, що функція парна, тому $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2(\cos\pi n-1)}{\pi n^2}=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{-4}{\pi n^2}, & n=2k+1\end{cases}.$$

Таким чином,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\qquad x\in[-\pi;\,\pi].$$

Зауважимо, що у випадку,коли функція задана на відрізку $[0;l]$, її можна продовжити на відрізок $[-l;0]$ парним або непарним способом і розкласти у ряд Фур'є відповідно або по косинусам, або по синусам.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РГР

1. Знайти суму ряду за означенням

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+2n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{5^n}$$

3. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$$

4. $$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{5}{n^2-4n+3}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{6^n}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2+5n+6}$$

7. $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n^2-4}$$

8. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n^2-n}$$

9. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{14^n}$$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+5n+4}$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2+4n}$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$$

13. $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{9}{n^2+n-2}$$

14. $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7}{n^2-n-2}$$

15. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n+3}$$

16. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{9^n}$$

17. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+7n+12}$$

18. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+6n+8}$$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{5^n}$

2. Дослідити на збіжність ряди з додатніми членами

1. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n-7}\right)^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)ln^2(n+1)};$

2 $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{200n+3}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n};$

3. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+2}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln n};$

4. $a) \sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2; b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(2n-1)}};$

5. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n}{5n+30}\right)^n; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(3n+1))^3};$

6. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{10n^2+1}; b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\sqrt[3]{ln^4 n}};$

7. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n^3+5n}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-2}{5n}\right)^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(4n-2)};$

8. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(tg\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n\, 3^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt[4]{\ln(n+4)}};$

9. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+10}{11n+24}; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n-7}{2n+8}\right)^n; c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{ln^4(n+1)}};$

10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n};\quad c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)\sqrt{\ln n}};$

11. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{n^4+1};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^2(n+1);}$

12. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{50n+2};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n^2};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+2)}};$

13. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^n};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(n+2)};$

14. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^{n};\quad c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)ln^2n};$

15. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sin^2 n};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};\quad c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[4]{ln^5 n}};$

16. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{n^2+3};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!};\quad c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ ln^3n};$

17. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+n};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+2}{8n}\right)^{n+1};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\sqrt[4]{\ln(n+1)}};$

18. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n^2+3}{10n^2+5};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[2]{n}}\right);\quad c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[6]{ln^7(n+1)}};$

19. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(2n+4)^5}};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2;\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{ln^4(2n+2)}};$

20. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3n+5}};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\quad c)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ ln^4n}.$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні числові ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{2n+4}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+2}}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5n}{7n-1}\right)$

6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\, ln^2\, n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n-1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4n}{6n+2}\right)^n$

10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+2}{5n}\right)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^6}}$

15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n sin^2\frac{1}{n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln n$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n}{(4n+1)^2}$

4. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $a)\sum_{n=}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}\,4^n}$ $\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3x^2+4x+6)^n}$

2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n\cdot n}$ $\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{x^2-0.5}}$

3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n\,n^2}$ $\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n}$

4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{4^n}$ $\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{7-x^2}}$

5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{n}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(x^2-2)^n}$

6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3^n\sqrt[4]{n}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{x^2}{3}}}$

7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+3x+3)^n}{n\cdot 3^n}$

8 $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2\cdot 7^n}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(x^2-10)^n}$

9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{2-x^2}}$

10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(x^2+x+4)^n}$

11. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{n\sqrt[4]{n}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(x^2-2x+2)^n}$

12. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}}{n^{x^2-0.25}}$

13. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n\cdot 3^n}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{n^{1.25-x^2}}$

14. $a)\sum_{n=1}^{\infty}6^n(x-4)^n$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

15. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{7^n}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+4x-4)^n$

16. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n^3}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x-7)^n$

17. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{n}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{\sqrt{x}}}$

18. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt{n}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-3x+1)^n$

19. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{9^n}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{x^2}}$

20. $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 0{,}1^n}$ $b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(x^2-8)^n}$

5. На заданому проміжку дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\sin nx - \cos nx)}{7^{0.5n}}, x \in R$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^2}, \quad x \in R$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\left(\sqrt{nx}\right)}{n\sqrt[3]{n}}, x \in [0;\infty)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x}, x \in [0;\infty)$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}x}{n\sqrt[3]{n+1}}, x \in R$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin x - 3^n \cos x}{6^n}, x \in R$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^3x}, x \in (-\infty; 0]$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{x}{\sqrt{n}}}{1+n^2}, x \in [-10; 10]$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\sin x + 4\cos x)^n}{6^n}, x \in R$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^3x}, x \in R$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt[3]{n}}}{1+n}, x \in R$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\sin x - 3\cos x)^n}{9^n}, x \in R$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^3}, x \in R$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{x}{n}}{\sqrt{n}}, x \in [-1; 1]$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\,(nx)}{n^2}, x \in R$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7\sin x + \cos x)^n}{8^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{x}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n}}, x \in [-5; 5]$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2+x^2}, x \in R$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in R$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x - 7\cos x)^n}{10^n}, x \in R$

6. Використовуючи стандартні представлення у вигляді степеневих рядів, розкласти функцію у степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$ (по степеням x). Вказати область збіжності отриманих рядів.

1. $f(x) = \ln(20 - x - x^2)$
2. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2-5x}}$
3. $f(x) = \sin x \cdot \sin 5x$
4. $f(x) = \frac{3}{1+2x-8x^2}$
5. $f(x) = \cos 2x \cdot \sin 6x$
6. $f(x) = \frac{\sin 4x}{x}$
7. $f(x) = \ln(6 - x - x^2)$
8. $\sinh 3x$
9. $f(x) = x \cdot \sqrt[4]{1-x^2}$
10. $f(x) = \frac{1}{1-x-20x^2}$
11. $f(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
12. $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x$
13. $f(x) = \cosh 2x$
14. $f(x) = x\sqrt[3]{27-x}$
15. $f(x) = \ln(1 - x - 12x^2)$
16. $f(x) = \frac{\sin 4x}{x}$
17. $f(x) = sin^2\left(\frac{3x}{4}\right)$
18. $f(x) = arctg\, x$
19. $f(x) = \frac{1}{6+x-x^2}$
20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x}}$

7. Обчисліть наближено інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0,001$.

1. $\int_0^1 e^{-0.1x^2}\,dx$

2. $\int_0^{0.5} \sin(10x^2)\,dx$

3. $\int_0^{0.1} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

5. $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x}\,dx$

6. $\int_0^1 \cos\frac{x^2}{2}\,dx$

7. $\int_0^1 \sinh x^2\,dx$

8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

9. $\int_0^{0,2} e^{-2x^2}\,dx$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$

11. $\int_0^1 x^{10}\,\sin(2x)\,dx$

12. $\int_0^{0,1} \sin(4x^2)\,d\,x$

13. $\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$

14. $\int_0^1 x^8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

15. $\int_0^{0,5} \cosh x^2\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$

17. $\int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt[4]{64-x^4}}$

18. $\int_0^1 \cos(0{,}1x^2)\,dx$

19. $\int_0^1 \frac{\ln(1+0{,}5x)}{x}\,dx$

20. $\int_0^1 e^{-0{,}2x^2}\,dx$

8. Розкласти $2l$ –періодичну задану на відрізку $[-l;l]$ функцію у ряд Фур'є.

1. $f(x)=\begin{cases}2, & x\in[-2;0)\\ 2-x, & x\in[0;2)\end{cases}$

2. $f(x)=1-|x|, x\in[-1;1]$

3. $f(x)=\frac{x}{\pi}, x\in[-\pi;\pi]$

4. $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-3;0)\\ 3, & x\in[0;3)\end{cases}$

5. $f(x) = x^2, x \epsilon[-2; 2]$

6. $f(x) = \dfrac{-x}{2}, \qquad x \epsilon [-4; 4]$

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x\epsilon [-1; 0) \\ x^2, & x \epsilon [0; 1) \end{cases}$

8. $f(x) = \left|\dfrac{x}{2}\right|, \qquad x \epsilon[-2\pi; 2\pi]$

9. $f(x) = 2x, \qquad x \epsilon [-0{,}5; 0{,}5]$

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \epsilon [-1; 0) \\ e^x, & x \epsilon [0; 1) \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \epsilon[-1; 0) \\ 1 - 2x, & x \epsilon [0; 1) \end{cases}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} x^2, x \epsilon [-\pi;\ \pi]$

13. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \epsilon [-\pi; 0) \\ 3x, & x \epsilon [0;\ \pi) \end{cases}$

14. $f(x) = |x|, x \epsilon[-4; 4]$

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \epsilon [-0.5\pi; 0) \\ \sin x, & x \epsilon [0; 0.5\pi\ ) \end{cases}$

16. $f(x) = 3x, \qquad x \epsilon[-1; 1]$

17. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \epsilon [-0{,}5\pi; 0) \\ 1, & x \epsilon [0; \pi) \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \epsilon[-1; 0) \\ 1 - x^2, & x \epsilon [0; 1) \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \epsilon [-\pi; 0) \\ 1, & x \epsilon [0;\ \pi) \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \epsilon[-1; 0) \\ e^{-x,} & x \epsilon[0; \end{cases}$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дюженкова Л.І.та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах /Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. – К. : Вища школа, 2002. – 470с.
2. Рудой М.Е. Математический анализ. Числовые и функциональные ряды. – Новосибирск. Изд. НГПУ, 2010. – 95с.
3. Шкіль М.І. Математичний аналіз у 2-х томах. – К.: Вища школа, 2005. – 447с.
4. Щоголєв С.А. Теорія рядів: навчально-методичний посібник./ С.А. Щоголєв. – Одеса: «Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова», 2015. – 76с.

Допоміжна література

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 – М. Наука, 1970.- 800с.