МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Методичні вказівки до проведення практичних занять та
організації самостійної роботи
студентів технічних та економічних спеціальностей денної форми навчання

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри кібербезпеки
та математичного моделювання
Протокол № 10 від 28 січня 2020 р

Чернігів ЧНТУ 2020

Економіко-математичні методи і моделі. Методичні вказівки до проведення пактичних занять та організації самостійної роброти студентів / Укл.: Балюнов О.О., Синенко М.А. – Чернігів: ЧНТУ, 2020.- 30 с.

Укладачі: Балюнов Олексій Олександрович-доцент кафедри кібербезпеки та математичного моделювання;

Синенко Марина Анатоліївна доцент кафедри кібербезпеки та математичного модедювання

Рецензент: АкименкоА.М. к.ф.-м.н., доцент кафедри інформаційних та комп’ютерних систем

Відповідальний за випуск: Ткач Ю.М., доктор пед. наук

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Моделювання є одним із ефективних засобів пізнання законів і закономірностей навколишнього світу. Економіка, як наука про об'єктивні закони розвитку суспільства, функціонує, оперуючи у тому числі кількісними характеристиками, а, отже, акумулювала у собі значний математичний інструментарій.

Математична модель – це внутрішньо замкнута система математичних співвідношень, які відтворюють якісні чи кількісні функціональні характеристики, властиві економічному процесу або явищу, що вивчається. Економіко-математичні моделі використовують для діагностики, при прогнозуванні чи прийнятті науково обґрунтованих управлінських рішень. Економіко-математичне моделювання синтезує у собі теорію трьох дисциплін – економіки, математики та інформатики. На сьогодні науково-дослiжницькі розробки проблем економіки неможливі без використання математичного апарату. Тому надзвичайно актуальним є завдання підготовки спеціалістів – економістів та аналітиків, які володіють математичними методами досліджень економічних явищ та процесів.

Дані методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості та підбірку задач з курсу «Економіко-математичні методи і моделі». У посібнику поданий детальний розбір розв'язання значної кількості типових задач, а також представлені задачі, які студенти можуть розв'язувати самостійно. Таким чином, методичні вказівки сприяють більш глибокому засвоєнню дисципліни, набуттю студендами загальних та фахових компетентностей, і можуть бути використані як для аудиторної, так і для самостійної роботи студентів.

ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Мета: Розглянути поняття математичної моделі та приклади побудови математичних моделей для конкретних економічних задач. Навчитись будувати математичні моделі для простих економічних задач.

Теоретичні відомості

Економічні явища і процеси у учасному суспільстві досить складні і багатогранні, тому для їх вивчення та дослідження слід залучати математичний аппарат як могутній засіб наукового пізнання.

Математичні методи в економіці почали використовувати у 18 столітті. Можна навести наступні приклади: Франсуа Кене (1758 р) уперше застосував економічні таблиці, Адам Сміт створив класичну модель макроекономіки, Давід Рікардо запропонував модель міжнародної торгівлі.

У 19 столітті розиток економіко-математичних методів пов'язують з іменами таких вчених-економістів як О. Курно, В. Паретто, П. Вальрас та інші.

У 20 столітті більшість Нобелівських премій в області економіки були присуджені вченим за розробку та ефективне використання математичних методів. Найбільш яскраві приклали: Роберт Солоу, Василій Лєогтьєв, Леонід Канторович, Джон Неш та інші.

Видатний математик В.С. Нємчинов дав наступне визначення економіко-математичного моделювання:

"Економіко-математичне моделювання – це концентроване вираження найбільш суттєвих взаємозв'язків і закономірностей поведінки керованих систем у математичній формі"

Математична модель – це система математичних рівнянь, нерівностей, математичних виразів, які описують реальний об'єкт, його характеристики і взаємозв'язки між ними.

Математичним моделюванням називається процес побудови математичних моделей, їх аналіз та розв’язання.

Практичними завданнями економіко-математичного моделювання є по-перше, аналіз економічних об’єктів і процесів, по-друге, економічне прогнозування, передбачення розвитку економічних процесів, по-третє, вироблення рекомендацій для управлінських рішень на усіх рівнях господарської ієрархії упрваління.

Одним із важливих аспектів у економіко-математичному моделюванні є поняття адекватності моделі, тобто відповідності тим властивостям, які уважаються суттєвими для дослідника, відповідають меті дослідження та установленій системі гіпотез.

Основні етапи математичного моделювання.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз. На даному етапі необхідно чітко сформулювати суть проблеми визначити питання, на які потрібно дати відповідь.
2. Побудова економічної моделі, тобто формалізація еаономічної проблеми, запис її у вигляді конкретгих математичних об'єктів.
3. Математичний аналіз моделі. На даному етапі головним є доведення існування розв'язку моделі.
4. Підготовка вихідної інформації. (Збір даних)
5. Чисельне моделювання.
6. Аналіз чисельних результатів.

Слід памятати, що процес математичного моделювання є циклічним, тобто на кожному з етапів можливе повернення до попереднього для утечнення.

На даний час не існує єдиного підходу до класифікації математичних моделей. Однак, однин із можливих підходів грунтується на класифікації математичних засобів, що використовуються в моделі:

1. Лінійні або нелінійні моделі
2. Детерміновані або стохастичні
3. Статичні або динамічні
4. Дискретні або неперервні

За метою моделювання виділяють дескриптивні, оптимізаційні, управлінські моделі.

Розглянемо приклади конкретних економічних задач та побудуємо відповідні математичні моделі.

Приклад 1.1. На початку року у банк вкладником була внесена сума 250 тис. грн. під 12 % річних. Шорічно у кінці кожного року (крім останнього) після нарахування відсотків вкладник планує додатково вносити певну суму грошей. Яку найменшу суму повинен щорічно вносити до банку вкладник, якщо через 3 роки він планує що найменше подвоіти свій початковий вклад.

Позначимо щорічний додатковий вклад x тис. грн. Динаміку вкдаду відобразимо у таблиці:

№ року	Розмір вкладу на початок року (тис. грн.)	Нараховані відсотки (тис.грн.)	Розмір вкладу на кінець року (тис.грн.)
1	250	$250 \cdot 0{,}12$	$250 \cdot 1{,}12 + x$
2	$250 \cdot 1{,}12 + x$	$(250 \cdot 1{,}12 + x) \cdot 0{,}12$	$(250 \cdot 1{,}12 + x) \cdot 1{,}12 + x = (250 \cdot 1{,}12^2 + 1{,}12x + x)$
3	$250 \cdot 1{,}12^2 + 1{,}12x + x$	$(250 \cdot 1{,}12^2 + 1{,}12x + x) \cdot \cdot 0{,}12$	$(250 \cdot 1{,}12^2 + 1{,}12x + x) \cdot \cdot 1{,}12 = 250 \cdot 1.12^3 + 1{,}12^2x + 1{,}12x$

Отже, через три роки на рахунку владника маємо:

$250 \cdot 1{,}12^3 + (1{,}12^2 + 1{,}12)x = 280 + 2{,}3744x$ тис. грн. За умовою задачі $280 + 2{,}3744x \geq 2 \cdot 250$. Далі з останньої нерівності визначаємо x.

$$x \geq 92,6549; x \approx 92,655 \text{ тис. грн.}$$

Узагальнемо результати задачі.

Нехай на початку року владником до банку внесена сума X ум. од. під p % річних. Щорічно (крім останнього року зберігання вкладу) після нарахування відсотків владник додатково вносить Y ум. од. Знайти розмір вкладу через n років зберігання.

Скориставшись формулою складних відсотків,

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

неважко зрозуміти, що через n років розмір вкладу становитиме

$$X\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + Y\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + Y\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2} + \dots + Y\left(1+\frac{p}{100}\right) =$$
$$= X\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + Y\frac{(1+0{,}01p)((1+0{,}01p)^{n-1}-1)}{0{,}01p}.$$

Приклад 1.2. Вклад планується відкрити на 5 років. Початковий внесок складає ціле число млн.грн. (X). У кінці кожного року вклад збільшується на 10 %, порівняно з його розміром на початку року. Крім того, на початку двох останніх років зберігання вклад додотково поповнюється на 1 млн. грн. Знайти мінімальний розмір початкового вкладу, якщо через 5 років вкладник планує отримати не менше, ніж 8 млн.грн.

Знайдемо величину вкладу через 5 років.

$$X \cdot 1{,}1^5 + 1 \cdot (1{,}1^2 + 1{,}1) = 1{,}61051X + 2{,}31.$$

За умовою задачі

$$1{,}61051X + 2{,}31 \geq 8 \Rightarrow X \geq 3{,}533 \Rightarrow X = 4.$$

Приклад 1.3. Потрібен кредит на суму 0.6 млн. грн. Один банк може надати кредит на 3 роки під 10 % річних, інший – на 5 років під 7 % річних. Схема виплати кредиту у кожному банку класична, а саме, у кінці року спачуються відсотки і тіло кредиту рівними частинами. Для кожного банку знайти загальну суму виплат, встановити скільки відсотків складає загальна сума виплат від суми кредиту. Який банк, на вашу думку, надає більш вигідний кредит?

Розрахуємо суми виплат для першого банку.

Рік кредитування	Розмір кредиту на початок року (млн.грн.)	Відсотки (млн.грн.)	Виплати (млн.грн.)		
			Тіло кредиту	Відсотки	загальна сума
1	0,6	0,06	0,2	0,06	0,26
2	0,4	0,04	0,2	0,04	0,24
3	0,2	0,02	0,2	0,02	0,22
Загальна сума виплат					0,72

Тобто, для першого банку загальна сума виплат складає 0,72 млн.грн., що становить 120% від суми кредиту.

Знайдемо суму виплат для другого банку. Для цього можна скористатись формулою

$$X = 0{,}6 + 0{,}07 \cdot 0{,}6 \cdot \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) = 0{,}6\left(1 + 0{,}07 \cdot \frac{1+5}{2}\right) = 0{,}726.$$

Загальна сума виплат для другого банку складає 121% від суми кредиту.

Приклад 1.4. Фірма може володіти акціями, ціна на які зростає, протягом 20 років. У кінці кожного року t фірма може також продати акції по ціні t^2, а отримані від продажу гроші внести на рахунок банку під 18 % річних. У якому році слід продавати акції, щоб отримати максимальний прибуток?

Позначимо рік продажу акцій t, тоді сума грошей, отриманих від продажу, складатиме t^2. Якщо ці гроші внести на банківський рахунок, то через $20 - t$ сума зросте до величини $t^2(1,18)^{20-t}$. Таким чином, функція, яка описує прибуток фірми від продажу акцій у рік t, має вигляд:

$$f(t) = t^2(1{,}18)^{20-t}.$$

Дослілимо цю функцію на екстремум.

$$f'(t) = 2t(1{,}18)^{20-t} - t^2(1{,}18)^{20-t}\ln(1{,}18) = t(1{,}18)^{20-t}(2 - t\ln 1{,}18);$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t(1{,}18)^{20-t}(2 - t\ln 1{,}18) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 0 \\ 2 - t\ln 1{,}18 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 0 \\ t = 12{,}08 \end{array}\right.$$

Оскільки $f'(t) > 0|_{t<12{,}08}$ і $f'(t) > 0|_{t>12{,}08}$, то точка $t = 12{,}08$ є максимуму функції. Отже, акції слід продавати у кінці дванадцятого року, і, при цьому максимальний прибуток фірми складає $f(12) = 12^2 \cdot (1{,}18)^8 \approx 541{,}28$ ум. од.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Вкладник вніс на банківський рахунок 300 тис.грн. під 9 % річних. Через скільки років сума на його рахунку що найменше подвоється? Чи залежить результат від початкової суми внеску?

2. У банк вкладником внесена сума X тис.грн. ($X -$ ціле число). Крім того, у кінці кожного року, крім останнього, вкладник додатково вносить 20 тис.грн. Яким повинен бути мінімальний початковий вклад, щоб через 3 роки сума на рахунку вкладника була не меншою 300 тис.грн.?

3. Фірма може володіти акціями, ціна на які зростає, протягом 20 років. У кінці кожного року t фірма може також продати акції по ціні $t^{1,5}$, а отримані від продажу гроші внести на рахунок банку під 15 % річних. У якому році слід продавати акції, щоб отримати максимальний прибуток?

4. Знайти екстремум функції та схематично побудувати її графік

$$f(x) = xe^{-x}.$$

2. МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МОДЕЛЬ ЛЄОНТЬЄВА)

Мета: Розглянути модель міжгалузевого балансу**.** Навчитись будувати матрицю прямих матеріальних затрат, знаючи матрицю прямих матеріальних затрат, знаходити валову продукцію при відомій кінцевій.

Теоретичні відомості

Функціювання багатогалузевої економіки потребує балансу між її окремими галузями. Кожна галузь одночасно є як виробником, так і споживачем продукції, яку виробляють інші галузі. Таким чином, виникає непроста задача розрахунку взаємозв'язків між окремими галузями через випуск та споживання продукції.

Вперше математична модель цієї задачі була побудована в 1936 році в працях американського економіста В.В. Лєонтьєва. У 1973 році В.В. Лєонтьєву булаприсуджена Нобелівська премія "за розвиток методу “витрати-випуск” ізастосування до важливих економічних проблем".

Зробимо наступні припущення. Нехай виробнича сфера складається з **n** галузей, кожна з яких виробляє однотипну продукцію. Таким чином, маємо **n** типів продукції. Позначимо $X_i -$ валовий випуск продукції *i-ої* галузі економіки,x_{ij} $-$частину продукції *i-ої* галузі, яку споживає *j-та* галузь економіки для своїх виробничих потреб ,$Y_i -$ частину продукції *i-ої* галузі, яка використовується в невиробничій сфері (споживається), також називають кінцевою продукцією споживання.

Схему міжгалузевого балансу можна подати у вигляді таблиці:

	Споживання					Кінцева Продукція	Валова Продукція
Виробництво	1	2	3	…	N		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	y_2	X_2
	…	…	…	…	…	…	…
N	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	y_n	X_n

Балансовий принцип звязку різних галузей економіки полягає в тому, що валова продукція *i-ої* галузі повинна дорівнювати сумі частин споживання у виробничій і невиробничій сферах, тобто для будь-якого i повинна виконуватися рівність:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (1)$$

Рівняння (1), де *i=1,2,...n,* називають рівняннями міжгалузевого балансу. На основі аналізу економіки США Лєонтьєвим було помічено, що відношення

$$\boldsymbol{a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}}$$

залишається сталим, або змінюється досить мало протягом певного проміжку часу, тому величини a_{ij} можна вважати константами. Цей факт пояснюється тим, що технологія виробництва досить довгий час може залишатися на одному й тому ж рівні. Числа a_{ij} називають коефіцієнтами прямих матеріальних затрат. Економічний зміст коефіцієнтів a_{ij} полягає у тому, що вони визначають об'єми продукції i −тої галузі, які споживає j −та галузь для створення одиниці своєї кінцевої продукції.

Запишемо рівняння балансу (1) у матричній формі. Для цього нам будуть потрібн інаступні позначення.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Матриця ***A*** називається матрицею прямих матеріальних затрат (її також називають технологічною матрицею).

Відмітимо деякі властивості коефіцієнтів a_{ij}. Зрозуміло, що $a_{ij} \geq 0$ і $a_{ij} \leq 1$. .

Матриця $\boldsymbol{A}$ називається продуктивною, якщо виконується умова: *X-AX >0.* Достатня умова продуктикності:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1.$$

Отже, рівняння (1) у матричній формі мають вигляд:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{Y} \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається моделлю Лєонтьєва багатогалузевого балансу. За допомогою моделі Лєонтьєва можна розв'язати задачі двох типів.
1) Знаючи об'єми валової продукції кожної галузі $\boldsymbol{X}$**,** розрахувати об'єми кінцевої продукції кожної галузі $\boldsymbol{Y}$***:***

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{AX}$$

2) Задаючи об'єми кінцевої продукції для кожної галузі $\boldsymbol{Y}$, знайти об'єми валової продукції $\boldsymbol{X}$**:**

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Y}$$

(Зауважимо, що для продутивної матриці $(E - A)^{-1}$ існує.)
Матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають матрицею повних витрат. Розглянемо її економічний зміст. Покладемо

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто, усі елементи стовбчика, крім i –го, дорівнюють нулю, а i –ий елемент – 1. Тоді

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = BY = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо з наведених розрахунків, елементи i –го стовбчика матриці повних матеріальних затрат $\boldsymbol{B}$ дорівнюють валовій продукції кожної галузі, яку необхідно випустити для того, щоб i –та галузь змогла створити одиницю кінцевої продукції.

Розглянемо типові задачі з використанням моделі Лєонтьєва.

Необхідний математичний апарат: операції з матрицями, обернена матриця.

Нагадаємо, що матриці A; A^{-1} називаються взаємно оберненеми, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Для будь-якої невироджної матриці $(\det(A) \neq 0)$ існує обернена, яку можна обчислити за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \left(A_{ij}\right)^T,$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

Приклад 2.1. Переконатись, що матриця A є невиродженою та обчислити A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Щоб встановити невиродженність матриці, знайдемо її визначник.

$$\det(A) = -8 + 6 - 2 - 32 = -36 \neq 0;$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\,; \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{31} = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{32} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{33} = -10.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -13 & -5 & 7 \\ -2 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Щоб перевірити правильність обчислень, виконаємо множення:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -13 & -5 & 7 \\ -2 & 2 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -8-26-2 & 32-26-6 & 8-8 \\ 8-10+2 & -32-10+6 & -8+8 \\ -4+14-10 & 16+14-30 & 4-40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Зауваження: операції множення матриць, знаходження визначника матриці та знаходження оберненої матриці можна виконувати в Excel за допомогою функцій МУМНОЖ МОПРЕД та МОБР.

Приклад 2.2. По заданій таблиці міжгалузевого балансу для кожної галузі знайти кінцеву продукцію, розрахувати матрицю прямих матеріальних затрат. Вважаючи матрицю прямих матеріальних затрат незмінною, знайти об’єми валової продукції на наступний рік, якщо кінцеву продукцію першої галузі планується збільшити на 10 %, а кінцеву продукцію другої – зменшити на 2 %.

	Галузі-споживачі			Кінцева продукція, (y_i)	Валова продукція, (X_i)
Галузі-виробники	1	2	3		
1	20	60	80		250
2	50	15	120		300
3	50	90	40		400

Спочатку для кожної галузі розрахуємо кінцеву продукцію по формулі

$$y_i = X_i - \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\,;$$

Маємо:

$$y_1 = 250 - (20 + 60 + 80) = 90;$$
$$y_2 = 300 - (50 + 15 + 120) = 215;$$
$$y_3 = 400 - (50 + 90 + 40) = 220.$$

Обчислимо елементи матриці прямих матеріальних затрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}.$$

X_2

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{20}{250} = 0{,}08; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{60}{300} = 0{,}2; \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{80}{400} = 0{,}2;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{50}{250} = 0{,}2; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{15}{300} = 0{,}05; \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{120}{400} = 0{,}3;$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_3} = \frac{50}{250} = 0{,}2; \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{X_2} = \frac{90}{300} = 0{,}3; \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{40}{400} = 0{,}1.$$

Таким чином, матриця прямих матеріальних затрат має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо значення запланованої кінцевої продукції на наступний рік.

$$\breve{y_1} = 99; \quad \breve{y_2} = 210{,}7; \quad \breve{y_3} = 220.$$

Для того, щоб розрахувати валову продукцію кожної галузі у наступному році обчислимо матрицю $(E-A)^{-1}$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}92 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}95 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}99 \end{pmatrix}$$

$$\det(E - A) = 0{,}68086;$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}249155 & 0{,}378933 & 0{,}367183 \\ 0{,}378933 & 1{,}278971 & 0{,}464119 \\ 0{,}367183 & 0{,}464119 & 1{,}224921 \end{pmatrix}$$

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1{,}249115 & 0{,}378933 & 0{,}367183 \\ 0{,}378933 & 1{,}278971 & 0{,}464119 \\ 0{,}367183 & 0{,}464119 & 1{,}224921 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 99 \\ 210{,}7 \\ 220 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 284{,}29 \\ 409{,}10 \\ 403{,}62 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо з наведених розрхунків, динаміка зміни об’ємів валової продукції відрізняється від динаміки зміни кінцевої. Оскільки галузі економіки пов’язані між собою, зміна об’ємів кінцевої продукції хоча б однієї галузі приводить до змін об’ємів валової продукції усіх галузей.

Приклад 2.3. Відома матриця прямих матеріальних затрат двохгалузевої економіки

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Об’єми кінцевої продукції першої та другої галузі відносяться як 1:2. Знайдіть як відносяться об’єми валової продукції цих галузей.

Позначимо об’єми кінцевої продукції першої та другої галузей відповідно y i $2y$ та розрахуємо об’єми валової продукції цих областей.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}; = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

$$X = (E - A)^{-1}Y = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9y + 0,6y \\ 0,4y + 1,6y \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1,5y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1,5y}{2y} = \frac{3}{4}.$$

Задачі для самостійного розв’язування

1. Для даної матриці A знайти обернену матрицю та зробити перевірку.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -12 & 6 & 18 \\ 4 & 13 & -11 \end{pmatrix}.$

2. Знайти невідомі елементи матриці A прямих матеріальних затрат двохналузевої економіки, об’єми кінцевої та валової продукції складають:

$$X = \begin{pmatrix} 154 \\ 120 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} 53,8 \\ 56,6 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 0,3 & x \\ y & 0,4 \end{pmatrix}.$$

(Відповідь: $x = 0,45;\ y = 0,1.$)

3. Відома матриця прямих матеріальних затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть об'єми валової продукції кожної галузі, якщо планується отримати наступні об'єми кінцевої продукції:

$$y_1 = 100; \;\; y_2 = 80; \;\;\; y_3 = 100.$$

Визначіть об'єми валової продукції кожної галузі, які необхідні для випуску одиниці кінцевої продукції третьої галузі.

(Відповідь: $X_1 \approx 287{,}43; \;\;\; X_2 \approx 299,03; \;\;\;\; X_3 \approx 247{,}20.$)

3. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета: Розглянути постановку задачі лінійного програмування. Навчитися розв'язувати задачі лінійного програмування нрафічним методом.

Теоретичні відомості

Задачі математичного програмування - це задачі на знаходження максимуму або мінімуму (оптимізаційні задачі) функції багатьох змінних (яку називають цільовою функцією) на деякій множині допустимих значень. Множину допустимих значень задають за допомогою системи рівнянь або нерівностей (обмежень на можливі значення змінних). Якщо цільова функція та функції, які входять в систему обмежень, є лінійними, то маємо задачу лінійного програмування.

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в стандартному вигляді:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \qquad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i; \;\; i = 1, 2, \dots m \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0 \tag{3.3}$$

Допустимим розв'язком задачі (3.1) - (3.3) називають будь-який набір змінних $(x_1, x_2, \dots x_n)$, який задовольняє системі обмежень (3.2) - (3.3). Оптимальним розв'язком задачі називають допустимий розв'язок, при якому цільова функція (3.1) досягає максимального значення. Отже, потрібно знайти оптимальний розв'язок.

Геометричний метод роз'язування задач лінійного програмування базується на властивостях градієнта функції багатьох змінних (і цільової функції зокрема).

Нагадаємо означення градієнта функції.

Градієнтом функції $f(x_1, x_2)$, *позначається* $grad\ f$, *називається вектор виду:*

$$grad\, f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Зокрема, для цільової функції задачі лінійного програмування $f(x_1; x_2) =$
$= c_1x_1 + c_2x_2$:

$$grad\, f(x_1, x_2) = (c_1, c_2).$$

При розв'язуванні задач лінійного пронрамування графічним методом суттєвими є наступні властивості градієнта.

1. Градієнт функції направлений в сторону найшвидшого зростання функції, причому максимальна швидкість зростання функції дорівнює модулю її градієнта;
2. Градієнт функції перпендикулярний до її лінії рівня.

(Лінією рівня функції $f(x_1, x_2)$ називається будь-яка крива виду $f(x_1, x_2) = C$
$C = const.$)

Отже, щоб розв'язати задачу лінійного програмування геометричним методом, по-перше, будуємо область допустимих розв'язків задачі, тобто на площині будуємо сукупність точок (x_1, x_2), що визначається системою нерівностей (обмежень). Відмітимо, що для задач лінійного програмування, цільова функція яких залежить від двох змінних, область допустимих розв'язків - деякий мгногокутник. По-друге, будуємо градієнт функції, і, наприклад, через початок координат проводимо перпендикулярно градієнту лінію рівня функції. По-третє, переміщаємо лінію рівня у напрямку градієнта, поки лінія рівня не виявиться на межі області допустимих розв'язків. Остання спільна точка лінії рівня та області допустимих розв'язків є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування. Залишається знайти координати цієї точки, розв'язавши відповідну систему лінійних рівнянь.

Відмітимо, що у випадку, коли задача лінійного програмування має єдиний розв'язок, цей розв'язок обов'язково знаходиться у вершині многокутника розв'язків. Крім того, задача лінійного програмування може мати безліч розв'язків, або взагалі не мати розв'язків.

Приклад 3.1. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \leq 18; \\ x_1 - 3x_2 & \leq 0; \\ -x_1 + x_2 & \leq 1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0; i = 1; 2; 3.$$

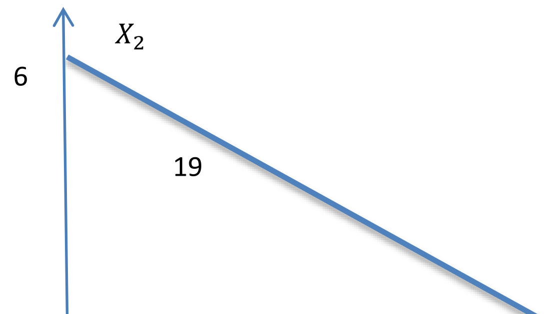
Спочатку будуємо область допустимих значень задачі. У площині (x_1, x_2) побудуємо пряму $2x_1 + 3x_2 = 18$. Для цього достатньо знайти дві точки, які належать прямій:

x_1	0	9
x_2	6	0

Далі відмічаємо точки площини, які задовільняють нерівність. Оскільки

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18 \Leftrightarrow x_2 \leq \frac{18 - 2x_1}{3},$$

то нерівність задовільняють координати точок, які лежать нижче прямої.



Аналогічно будуємо множини точок, які задовільняють решті нерівностей системи. Область допустимих значень задачі – перетин побудованих множин.

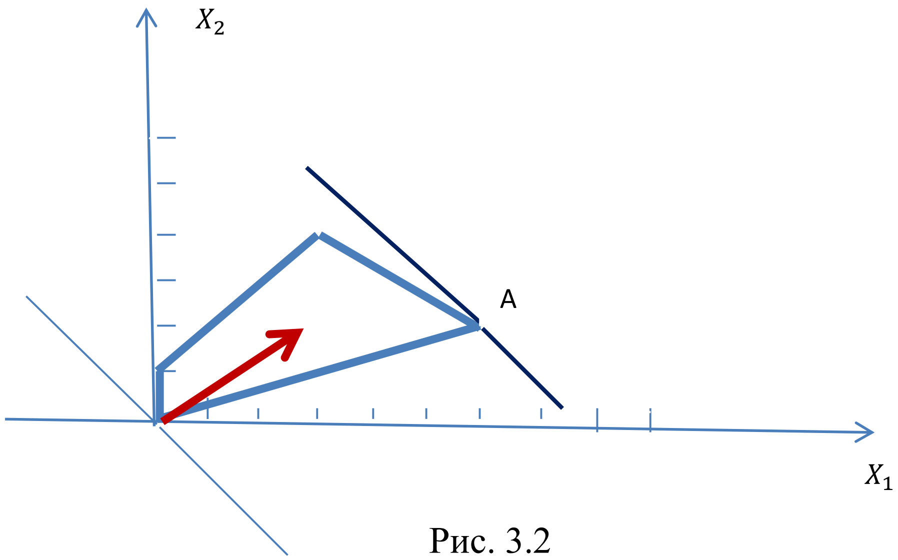


Рис. 3.2

Далі знаходимо та будуємо у вибраній системі координат градієнт цільової функції

$$grad\ f = (3;2).$$

Лінію рівня можна побудувати, як пряму, що проходить через початок координат перпендикулярно градієнту. Будемо переміщати лінію рівня паралельно собі у напрямку градієнта, поки лінія рівня не попаде на межу області допустимих значень. Остання точка перетину лінії рівня і області допустимих значень – точка максимуму цільової функції. На рис. 3.2 – це точка А. Залишається знайти коорлинати точки як лінії перетину відповідних прямих та обчислити значення цільової функції.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 18 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, $f_{max} = f(6;2) = 22.$

Приклад 3.2. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 - 3x_2 \leq 0; \\ 2x_1 - x_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2.$$

Побудуємо область допустимих значень системи обмежень задачі.

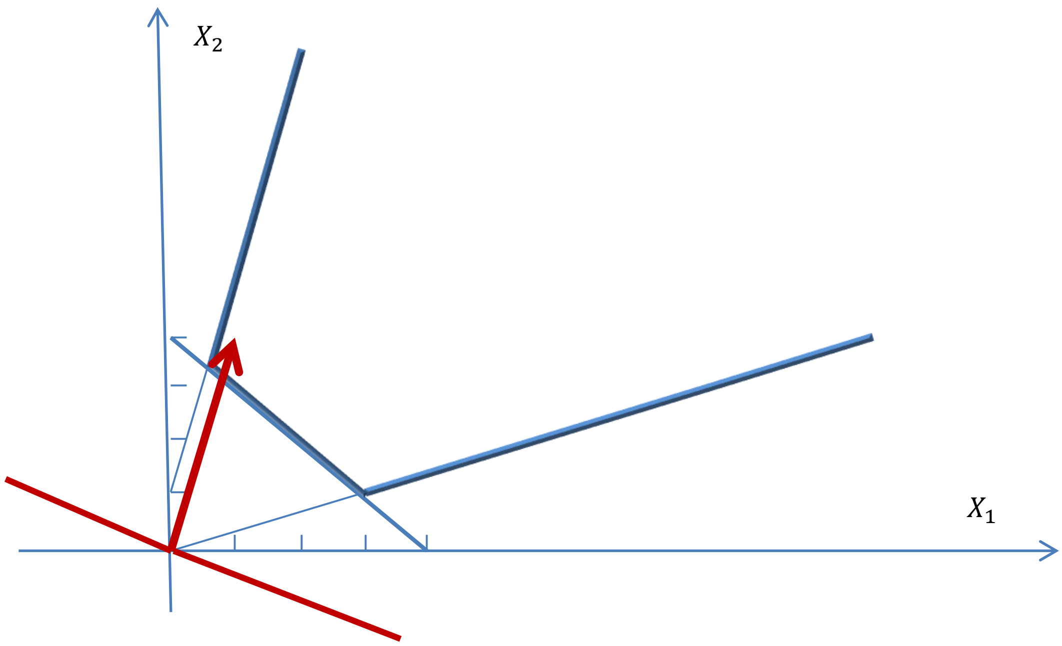


Рис.3.3

Як видно з рисунка область допустимих значень необмежена. Градієнт цільової функції - $grad\ f = (1,4)$. Переміщаючи лінію рівня у напрямку градієнта, переконуємося, що на даній області цільова функція також необмежена, тобто задача не має розв'язку.

Задачі для самостійного розв'язування

У задачах лінійного програмування 1-4 знайти оптимальний розв'язок графічним методом.

1. $f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18; \\ -3x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 + 2x_2 \geq 4; \\ x_1 - 4x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ 3x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 - x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. $f(x_1, x_2) = x_1 + 6x_2 \to min$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 - 3x_2 \leq 1; \\ 4x_1 - x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 + 7x_2 \leq 42; \\ x_1 - 4x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ

Мета: навчитися знаходити оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування симплексним методом

Теоретичні відомості

Нагадаємо, що задачі математичного програмування - це задачі на знаходження максимуму або мінімуму функції багатьох змінних (яку називають цільовою функцією) на деякій множині допустимих значень. Множину допустимих значень задають за допомогою системи рівнянь або нерівностей(обмежень).Якщо цільова функція та функції, які входять в систему обмежень, є лінійними, то маємо задачу лінійного програмування

Симплекс метод - це аналітичний ітеративний метод розв'язування задачі лінійного програмування, який полягає в послідовному ціленаправленому переході від одного допустимого розв'язку до іншого з покращенням значення цільової функції. Якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то за скінченне число кроків ми отримаємо її оптимальний розв'язок.

Щоб розв'язати задачу симплексним методом, спочатку перепишемо її у канонічному виді, який передбачає запис усіх обмежень у вигляді рівностей. Перехід від стандартного до канонічного виду можна здійснити, увівши до кожного обмеження додаткову невід'ємну змінну x_{n+i}. Отже, канонічний вид задачі лінійного програмування:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i; \quad i = 1,2,\dots m; \qquad (4.2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (4.3)$$

Додаткові змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m}$ можна розглядати як базисні системи рівнянь (4.2) і, таким чином, перший допустимий розв'язок матиме вигляд:

$$(0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

Значення цільової функції, що відповідає даному допустимому розв'язку, дорівнює нулю, і, очевидно, такий розв'язок не є оптимальним. Обчислимо симплексні оцінки:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{k_i} a_{ij} - c_j \qquad (4.4)$$

де c_{k_i} – коефіцієнти цільової функції біля базисних змінних.

Критерій оптимальності полягає в наступному. Допустимий розв'язок задачі (4.1)-(4.3) є оптимальним тоді і тільки тоді, коли всі симплексні оцінки невід'ємні. Якщо серед симплексних оцінок є хоча б одна від'ємна, то допустимий розв'язок можна покращити. Для покращення допустимого розв'язку уводимо у базис нову змінну, яка відповідає стовбчику з найбільшою по модулю від'ємною симплексною оцінкою (ведучий стовбчик). Щоб зрозуміти, яку змінну потрібно виводити із базису, знаходимо симплексні відношення:

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}.$$

Із базису потрібно вивести змінну, яка знаходиться в рядку з мінімальним симплексним відношенням (ведучий рядок). Далі перерахуємо симплексну таблицю по методу Жордана-Гаусса. Результати обчислень зручно оформляти у вигляді симплексних таблиць. На першому кроці обчислень симплексна таблиця має вигляд:

Базис	$\boldsymbol{c_{k_i}}$	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_{n+1} $\vdots$ x_{n+m}	0 $\vdots$ 0	a_{11} $\vdots$ a_{m1}	a_{12} $\vdots$ a_{m2}	… $\vdots$ …	a_{1n} $\vdots$ a_{mn}	1 $\vdots$ 0	… $\vdots$ …	0 $\vdots$ 1	b_1 $\vdots$ b_m	
Симплексні оцінки		$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	…	0	0	

Приклад 4.1. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 80; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 60; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 & \leq 60; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Спочатку запишемо обмеження задачі у канонічному вигляді. Для цього для кожного обмеження введемо додаткову невід'ємну змінну:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 80 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 & = 60 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 & = 60 \end{cases}$$

При заданих обмеженнях за початковий базис зручно вибрати $\{x_4, x_5, x_6\}$. Перенесемо дані задачі у симплексну таблицю.

Базис	c_{k_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	θ
x_4	0	2	3	2	1	0	0	80	
x_5	0	1	2	3	0	1	0	60	
x_6	0	4	1	1	0	0	1	60	
Симплексні оцінки		-5	-4	-3	0	0	0	0	

Допустимий розв'язок задачі, який відповідає вибраним базисним змінним, має вигляд: $(0, 0, 0,\ 80, 60, 60)$, відповідне значення цільової функції дорівнює нулю. Очевидно, що цей розв'язок не є оптимальним. (На що, зокрема, указають від'ємні симплексні оцінки). Щоб покращити значення цільової функції, перейдемо до іншого базису. До нового базису уведемо змінну $x_{1,}$ оскільки цій змінній відповідає найменша від'ємна симплексна оцінка, -5. Таким чином, стовбчик, в якому знаходиться змінна x_1, є ведучим стовбчиком. Для того, щоб з'ясувати, яку змінну слід вивести із базису, обчислимо симплексні відношення:

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{1i}}.$$

$$\theta_1 = \frac{80}{2} = 40;\ \theta_2 = \frac{60}{1} = 60;\ \theta_3 = \frac{60}{4} = 15.$$

$$\min_i\{\theta_i\} = 15.$$

Мінімальне симплексне відношення знаходиться у третьому рядку матриці коефіцієнтів і відповідає змінній x_6. Отже, третій рядок є ведучим, а змінну x_6 потрібно вивести із базису. На перетині ведучого стовбчика і ведучого рядка знаходиться ведучий елемент. У нас це елемент $a_{13} = 4$. Далі потрібно перерахувати симплексну таблицю, перетворивши за методом Жордана-Гауса ведучий стовбчик у стовбчик одиничної матриці. Спочатку поділимо ведучий рядок на 4.

Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_4	0	2	3	2	1	0	0	80	40
x_5	0	1	2	3	0	1	0	60	60
x_6	0	1	¼	¼	0	0	¼	15	15
Симплексні оцінки		-5	-4	-3	0	0	0	0	

Утворимо нулі у ведучому стобвчику. Для цього виконаємо наступні операції:

1. Помножимо ведучий рядок останньої таблиці на (-2) і додамо до першого рядка;
2. Помножимо ведучий рядок останньої таблиці на (-1) і додамо до другого рядка;
3. Помножимо ведучий рядок останньої таблиці на 5 і додамо до рядка симплексних оцінок;

   Маємо:

базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_4	0	0	5/2	3/2	1	0	-1/2	50	20
x_5	0	0	7/4	11/4	0	1	-1/4	45	25,7
x_1	5	1	¼	¼	0	0	¼	15	60
Симплексні Оцінки		0	-11/4	-7/4	0	0	5/4	75	

Отриманий допустимий розв'язок - $(15, 0,0, 50, 45)$, значення цільової функції, яке йому відповідає, дорівнює 75. Наявність від'ємних симплексних оцінок указує на те, що цей розв'язок не оптимальний, тому пошук оптимального розв'язку потрібно продовжити. Найменша від'ємна симплексна оцінка, (-11/7), відповідає змінній x_2, тому x_2 уводимо до наступного базису.

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a_{12}} = 50 \div \frac{5}{2} = 20;\ \theta_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = 25\frac{5}{7};\ \theta_3 = \frac{b_3}{a_{23}} = 60;$$

$$\min_i\{\theta_i\} = 20.$$

Мінімальне значення симплексного відношення відповідає змінній x_4, тому x_4 виключаємо із базису. Наступний базис утворюють змінні $\{x_1, x_2, x_5\}$. Залишається перерахувати симплексну таблицю.

базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_2	0	0	1	3/5	2/5	0	-1/5	20	
x_5	0	0	0	17/10	-7/10	1	1/10	10	
x_1	0	1	0	1/10	-1/10	0	3/10	10	
Симплексні оцінки		0	0	-1/10	11/10	0	7/10	130	

Допустимий розв'язок: (10, 20, 0, 0,10,0), відповідне йому значення цільової функції: 130. Як видно з таблиці, у рядку симплексних оцінок залишається від'ємне значення (-1/10), якому відповідає змінна x_3, і, отже, x_3 включаємо до наступного базису.

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a_{31}} = \frac{100}{3};\ \theta_2 = \frac{b_2}{a_{32}} = \frac{100}{17};\ \theta_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = 100.$$

Найменше значення θ знаходиться у другому рядку таблиці і відповідає змінній x_5, тому x_3 уводимо до базису замість x_5.

базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_2	0	0	1	0	13/85	-6/17	-4/17	$^{280}/_{17}$	
x_3	0	0	0	1	-7/17	10/17	1/17	$^{100}/_{17}$	
x_1	0	1	0	0	-1/17	-1/17	2/17	$^{160}/_{17}$	
Симплексні оцінки		0	0	0	18/17	1/17	12/17	$130\frac{10}{17}$	

У рядку симплексних оцінок усі значення – невід'ємні, отже, знайдений розв'язок, $\left({}^{160}/_{17}, {}^{280}/_{17}, {}^{100}/_{17}, 0, 0{,}0\right)$, - оптимальний. $f_{max} = f\left({}^{160}/_{17}, {}^{280}/_{17}, {}^{100}/_{17}\right) = 130\frac{10}{17}$.

Приклад 4.2 Розв'язати задачу лінінйного програмування симплексним методом.

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to max;}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \leq 83; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 & = 98; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & \geq 30; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

На відміну від прикладу 4.1, форма запису обмеженнь на значення змінних не є стандартною. Щоб записати обмеження у канонічній формі уведемо дві допоміжні невід'ємні змінні x_4, x_5 $(x_4, x_5 \geq 0)$. Канонічна форма запису обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & = 83; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 & = 96; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 & = 30; \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів отриманої системи рівнянь не містить одиничної підматриці, отже, спочатку побудуємо невід'ємний базис системи. Усенемо коефіцієнти до симплексної таблиці.

Коеф. Цільової ф-ції		6	4	2	0	0		
Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta = \frac{b}{a_{1i}}}$
		2	4	3	1	0	83	41,5
		3	3	3	0	0	98	32
		1	-1	5	0	-1	30	30
Симпл.оцінки								

За базисні виберемо змінні $\{x_4, x_2 x_1\}$. Спочатку уведемо до базису x_1.

Коеф. Цільової ф-ції		6	4	2	0	0		

Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta = \frac{b}{a_{2i}}}$
		0	6	-7	1	2	23	3,81
		0	4	-12	0	3	8	2
		1	-1	5	0	-1	30	-
Симпл.оцінки								

Коеф. Цільової ф-ції	c_{k_i}	6	4	2	0	0		
Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta = \frac{b}{a_{3i}}}$
x_4	0	0	0	11	1	-5/2	11	1
x_2	4	0	1	-3	0	¾	2	-
x_1	6	1	0	2	0	-1/4	32	15
Симпл.оцінки		0	0	-2	0	3/2		

Симплексні оцінки були розраховані по формулам (4.4). Оскільки серед симплексних оцінок є від'ємна величина, то допустимий розв'язок, який відповідає знайденому базису не оптимальний. Тому далі включимо до базису x_3 замість x_4.

Коеф. Цільової ф-ції		6	4	2	0	0		
Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_3		0	0	1	1/11	-5/22	1	
x_2		0	1	0	3/11	3/44	5	
x_1		1	0	0	-2/11	19/4	30	
Симпл.оцінки		0	0	0	2/11	23/22	202	

Таким чином, оптимальний розв'язок: (30, 5, 1); $f_{max} = f(30; 5; 1) = 202$.

У економіці до задач лінійного програмування приводять задачі планування виробництва при обмежених ресурсах. Розглянемо приклад.

Приклад 4.3. Фірма може випускати продукцію трьох видів (P_1, P_2, P_3), яку реалізує на ринку за цінами 4, 7 та 6 ум. од. відповідно. Для випуску продукції необхідна сировина трьох видів (S_1, S_2, S_3). Запаси сировини та витрати на випуск одиниці продукції наведені в таблиці.

	Витрати сировини на одиницю продукції			Запаси сировин
	P_1	P_2	P_3	
S_1	2	3	1	150
S_2	3	3	5	156
S_3	3	5	3	180
Ціни	4	7	6	

Скласти математичну модель задачі. Знайти оптимальний план випуску, який дозволить фірмі отримати максимальний прибуток.

Позначимо $x_1,\ x_2,\ x_3$ об'єми випуску продукції першого, другого та третього видів відповідно. Тоді прибуток, який отримає фірма від реалізації продукції, можна описати за допомогою функції:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 7x_2 + 6x_3$$

Витрати сировини першого виду складають:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3,$$

які за умовою задачі не повинні перевищувати 150. Аналогічно, для сировини другого та третього видів знаходимо:

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \quad \leq 156;$$
$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad \leq 180.$$

Таким чином, отримана стандартна задача лінійного програмування:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 150; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \leq 156; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 & \leq 180; \end{cases}$$

$$x_1, \qquad x_2, \quad x_3 \geq 0,$$

яку розв'яжемо симплексним методом.

Запишемо обмеження у канонічному вигляді.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = 150; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_5 & = 156\ ; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 & = 180. \end{cases}$$

базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$

x_4	0	2	3	1	1	0	0	150	50
x_5	0	3	3	5	0	1	0	156	52
x_6	0	3	5	3	0	0	1	180	36
Симплексні оцінки		-4	-7	-6	0	0	0	0	

Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_4		1/5	0	-4/5	1	0	-3/5	42	-
x_5		6/5	0	16/5	0	1	-3/5	48	15
x_2		3/5	1	3/5	0	0	1/5	36	60
Симплексні оцінки		1/5	0	-9/5	0	0	7/5	252	

базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\theta}$
x_4		½	0	0	1	¼	-3/4	54	
x_3		3/8	0	1	0	5/16	-3/16	15	
x_2		-3/40	1	0	0	-3/16	5/16	27	
Симплексні оцінки		7/8	0	0	0	9/16	17/16	279	

Отже, оптимальний розв’язок: (0; 27;15); $f_{max} = f(0;27;15) = 279$.

Задачі для самостійного розв’язування

Розв’язати задачі лінійного програмування симплексним методом.

1. $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \le 140; \\ 4x_1 + x_2 \le 64; \\ x_1 + 4x_2 \le 64; \end{cases}$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0.$$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 48; \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 65; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

3. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 12; \\ 3x_1 - x_2 \ge 0; \\ x_1 - x_2 \le 0; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

5 ВЗАЄМОДВОЇСТІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ

Мета: Навчитися будувати двоїсту задачу лінійного програмування та та знаходити її розв'язок за допомогою теорем двоїстості.

Теоретичні відомості

Будь-яка задача лінійного програмування тісно пов'язана з іншою лінійною задачею, яку називають двоїстою задачею. Кожну із пари взаємодвоїстих задач можна розглядати як самостійну задачу лінійного програмування і розв'язувати незалежно від іншої. Однак, зв'язок між взаємодвоїстими задачами полягає, зокрема, і в тому, що розв'язок двоїстої задачі може бути отриманий із розв'язку прямої за допомогою теорем двоїстості.

Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі лінійного програмування називають двоїстими оцінками (об'єктивно обумовленими оцінками).

Розглянемо правила побудови двоїстої задачі. Нехай пряма задача записана в стандартній формі.

1. Якщо пряма задача лінійного програмування сформулювана як задача на знаходження максимуму цільової функції, а всі обмеження записані за допомогою знака " $\leq$ ", то двоїсту задачу формулюють як задачу на знаходження мінімуму цільової фунції, а обмеження записують за допомогою знака" $\geq$ ".

2. Число змінних двоїстої задачі дорівнює числу обмежень прямої, причому індекс змінної двоїстої задачі відповідає номеру обмеження; число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої.

3. Якщо $\boldsymbol{A}$- матриця коефіцієнтів обмежень прямої задачі, то матриця коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі - $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$. Вільні члени в обмеженнях двоїстої задачі дорівнюють коефіцієнтам цільової функції прямої.

4. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі дорівнюють вільним членам обмежень прямої задачі.

5. Будь-якому обмеженню прямої задачі, записаному через знак $\leq$ відповідає умова невід'ємності змінної двоїстої задачі. Якщо обмеження прямої задачі записане як рівність, то обмеження невід'ємності знімається.

Таким чином, нехай пряма задача лінійного програмування записана у вигляді:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i; \quad i = 1,2, \dots m. \ x_j \geq 0.$$

Тоді двоїста задача записується у вигляді:

$$g(y_1, y_2, \dots y_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq c_j; j = 1,2, \dots n; \ y_i \geq 0.$$

Знайти розв'язок двоїстої задачі лінійного програмування, знаючи розв'язок прямої, можна за допомогою теорем двоїстості.

Теорема1

Якщо існує оптимальний розв'язок прямої задачі лінійного програмування, $\boldsymbol{X}^*$, то існує також оптимальний розв'язок двоїстої задачі $\boldsymbol{Y}^*$, причому виконується рівність $\boldsymbol{f(X^*) = g(Y^*)}$**.**

Якщо цільова функція *f*(**X**) прямої задачі лінійного програмування необмежена на області допустимих значень, то двоїста задача не має розв'язку.

Теорема 2. Для того, щоб допустимі розв'язки **X** та **Y** відповідно прямої та двоїстої задач лінійного програмування були оптимальними необхідно і достатньо виконання умов:

$$\boldsymbol{y_i \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j - b_i) \right) = 0; i = 1, 2, \dots m;}$$

$$x_j \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} y_i - c_j) = 0.$$

Останні рівності можна інтерпретувати таким чином: або компонента оптимального розв’язку дорівнює нулю, або відповідне обмеження двоїстої задачі перетворюється у рівність. Зокрема, для першої рівності допустима економічна інтерпретація: або об’єктивно обумовлена ціна на ресурс дорівнює нулю, або відповідний ресурс вичерпується.

Приклад 5.1. Для задачі лінійного програмування

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 11x_1 + 4x_2 - x_3 & \le 58; \\ 7x_1 + 6x_2 + 8x_3 & \le 12; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

побудувати двоїсту задачу.

Оскільки дана задача – це задача на знаходження максимуму цільової функції, то, відповідно, для двоїстої задачі потрібно знаходити мінімум функції. Побудуємо цільову функцію двоїстої задачі. Дана задача містить два обмеження на значення змінних, отже, цільова функція двоїстої задачі залежить від двох змінних y_1, y_2. Коефієнти цільової функції – праві частини обмежень.

$$g(y_1, y_2) = 58y_1 + 12y_2 \to min;$$

Кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої. Щоб побудувати матрицю коефіцієнтів для обмежень двоїстої задачі транспонуємо матрицю $\boldsymbol{A}$:

$$A^T = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 4 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$

Вільні члени для обмежень двоїстої задачі дорівнюють відповідним коефіцієнтам цільової функції прямої, знаки нерівності в обмеженнях необхідно поміняти на протилежні:

$$\begin{cases} 11y_1 + 7y_2 & \ge 6; \\ 4y_1 + 6y_2 & \ge 8; \\ -y_1 + 8y_2 & \ge 4; \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Приклад 5.2. Для задачі лінійного програмування із прикладу 4.1 побудувати двоїсту задачу та знайти її розв'язок за допомогою теорем двоїстості.

Для задачі лінійного програмування з прикладу 4.1 двоїста задача має вигляд:

$$g(y_1, y_2, y_3) = 80y_1 + 60y_2 + 60y_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 & \geq 5; \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 & \geq 4; \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 & \geq 3; \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Оскільки оптимальний розв'язок прямої задачі відомий, то оптимальний розв'язок двоїстої задачі знайдемо за допомогою теорем двоїстості.

Згідно з першою теоремою $g_{min} = f_{max} = 130\frac{10}{17}$. Змінні $x_1,\ x_2,\ x_3$ з оптимального розв'язку прямої задачі приймають додатні значення, тому кожне обмеження двоїстої задачі перетворюється у рівність, якщо $y_1, y_{2,} y_3$ приймають оптимальні значення. Таким чином, щоб знайти оптимальний розв'язок, достатньо розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 & = 5; \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 & = 4; \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 & = 3. \end{aligned}$$

Звідки $y_1 = {}^{18}/_{17}$; $y_2 = {}^{1}/_{17}$; $y_3 = {}^{12}/_{17}$.

Приклад 5.3. Відомий оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування:

$4f(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq 20; \\ 8x_1 + 5x_2 & \leq 40; \\ 5x_1 + 6x_2 & \leq 30; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$f_{max} = f(5; 0) = 250.$$

Побудувати двоїсту задачу та знайти її розв'язок за допомогою теорем двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу:

$$g(y_1, y_{2,} y_3) = 20y_1 + 40y_2 + 30y_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + 5y_3 & \geq 50; \\ 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 & \geq 40; \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Оскільки відомо, що значення змінної x_1 із оптимального розв'язку прямої задачі додатнє, то при оптимальних значеннях y_1, y_2, y_3 перше обмеження двоїстої задачі перетворюється у рівність, тому для визначення y_1, y_2, y_3 маємо:

$$2y_1 + 8y_2 + 5y_3 = 50. \qquad (5.1)$$

Підставивши значення оптимального розв'язку прямої задачі в обмеження, маємо:

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 5 \cdot 0 & \leq 20; \\ 8 \cdot 5 + 5 \cdot 0 & = 40; \\ 5 \cdot 5 + 6 \cdot 0 & \leq 30. \end{cases}$$

тому $y_1 = y_3 = 0$. Із рівняння (5.1) знаходимо $y_2 = {}^{50}/_{8} = 6{,}25$. Отже, оптимальний розв'язок двоїстої задачі: (0; 6,25; 0).

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для даної задачі лінійного програмування

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 8x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 & \leq 156; \\ -x_1 + 6x_2 & \leq 98; \\ 7x_1 + 5x_2 & \leq 124; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

побудувати двоїсту задачу.

2. Для даної задачі лінійного програмування

$$g(y_1, y_2, y_3) = 120y_1 + 80y_2 + 90y_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \quad \geq 10 \\ 7y_1 + 5y_2 + 5y_3 \quad \geq 9 \end{cases};$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0;$$

побудувати двоїсту задачу. Розв’язати одну із взаємодвоїстих задач симплексним методом, розв’язок іншої задачі знайти за допомогою теорем двоїстості.

6 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Мета: Навчитись визначати умовний екстремум функції багатьох змінних методом мгожиків Лагранжа

Теоретичні відомості

Розглянемо задачу математичного програмування:

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max}; \qquad \textbf{(6.1)}$$

$$\boldsymbol{\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; i = 1, 2, \dots m.} \qquad \textbf{(6.2)}$$

Якщо цільова функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або хоча б одна з функцій φ_i є нелінійними, то задача (6.1)-(6.2) є задачею нелінійного програмування. У випадку, коли обмеження задаються у вигляді рівностей

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad (6.3)$$

задача (6.1) - (6.2) полягає у знаходженні умовного екстремуму і може бути зведена до задачі відшукання глобального екстремуму допоміжної функції, яку називають функцією Лагранжа. (Обмеження (6.3) у цьому випадку називають рівняннями зв’язку).

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6.4)$$

Можна показати, що глобальний екстремум функції (6.4) співпадає з шуканим умовним екстремумом.

Отже, досліdимо на екстрмум функцію Лагранжа. Як відомо, необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0;\ j = 1,2,\dots,n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0; i = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Достатніми умовами екстремуму функції є знаковизначеність диференціалу другого порядку, $d^2L\big(x_1, x_{2,}\dots, x_n\big)$. Для функції, залежної від двох змінних,

$$d^2L(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2} d{x_1}^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial {x_2}^2} d{x_2}^2.$$

У загальному випадку диференціал другого порядку зручно записувати у вигляді матричної рівності:

$$d^2L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (dx_1\ \ dx_2 \dots dx_n) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix},$$

а знаковизначеність перевіряти за допомогою критерію Сильвестра.

Приклад 6.1. Знайти екстремуми функції $f(x, y) = 4x + 8y$, якщо точки (x, y) належать колу $x^2 + y^2 = 5$.

Отже, маємо цільову функцію: $f(x, y) = 4x + 8y$ та рівняння зв'язку:

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$. Запишемо функцію Лагранжа $L(x, y, \lambda)$ та дослідимо її на екстремум.

$$L(x, y, \lambda) = 4x + 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2\lambda x = 0; \\ 8 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\lambda}; \\ y = -\dfrac{4}{\lambda}; \\ \dfrac{4}{\lambda^2} + \dfrac{16}{\lambda^2} = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1; \\ y = \mp 2; \\ \lambda = \pm 2. \end{cases}$$

Щоб перевірити достатані умови екстремуму, знайдемо $d^2L(x,y)$.

$$d^2L(x,y) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2.$$

Таким чином, при $\lambda = -2$ $d^2L(x,y) < 0$, і точка $(1;2)$ – точка умовного максимуму функції; при $\lambda = 2$ $d^2L(x,y) > 0$, і, відповідно, точка $(-1;-2)$ – точка умовного мінімуму функції.

Приклад 6.2. Фірма може випускати певну продукцію на трьох фабриках у кількості x, y, z одиинць відповідно. Фірма має зобов'язання що місяця випускати не менше 210 одиниць продукції. Затрати по випуску продукції на першій, другій та третій фабриках складають відповідно:

$$\frac{x^2}{20} + x;\ \frac{y^2}{40} + y;\ \frac{z^2}{60} + 2z$$

умовних одиниць. Як спланувати випуск продукції, щоб затрати по випуску були мінімальними.

Згідно з умовою задачі цільова функція, яка описує сумарні затрати фірми, має вигляд:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{20} + x + \frac{y^2}{40} + y + \frac{z^2}{60} + 2z \to min.$$

Крім того, маємо рівняння зв'язку: $x + y + z - 210 = 0$. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x^2}{20} + x + \frac{y^2}{40} + y + \frac{z^2}{60} + 2z + \lambda(x + y + z - 210).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{x}{10} + 1 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{y}{20} + 1 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{z}{30} + 2 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 210 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40; \\ y = 80; \\ z = 90; \\ \lambda = -5. \end{cases}$$

$$d^2L(x,y,z) = (dx \quad dy \quad dz)\begin{pmatrix} 1/_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1/_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1/_{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}dx^2 + \frac{1}{20}dy^2 + \frac{1}{30}dz^2 > 0.$$

Таким чином, (40;80;90)- точка мінімуму функції і, відповідно, оптимальний план випуску.

Приклад 6.3. Відома функція корисності споживача для товарів двох видів: $f(x,y) = x^{1/_3}y^{2/_3}$. Ціни на товари складають 27 і 20 умовних одиниць відповідно. При яких значеннях x, y споживач максимально задовольнить свої потреби, якщо на придбання товарів він планує витратити 810 ум.од.

Математична модель задачі:

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \to max;$$

$$27x + 20y = 810,$$

тобто маємо задачу на знаходження умовного ексиремуму.

Запишемо функцію Лаграгжа:

$$L(x,y,\lambda) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \lambda(27x + 20y - 810).$$

Дослідимо отриману функцію на екстремум. Необхідні умови екстремуму – рівність нулю усіх частинних похідних.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 27\lambda = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + 27\lambda & = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + 20\lambda = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} + 20\lambda & = 0; \\ \qquad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 27x + 20y - 810 & = 0; \end{cases}$$

Розглянемо перші два рівняння системи:

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+27\lambda &= 0;\\ \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}+20\lambda &= 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} &= -81\lambda;\\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} &= -30\lambda;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} &= -81\lambda;\\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} &= 900\lambda^2.\end{cases}$$

Перемноживши почленно отримані рівняння, маємо:

$$-81\cdot 900\lambda^3 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{9\sqrt[3]{100}}.$$

Підставивши значення λ у друге рівняння системи, виражаємо x через y.

$$x=\frac{10}{27}y \Rightarrow 10y+20y=810 \Leftrightarrow \begin{cases}x=10;\\ y=27.\end{cases}$$

Перевіривши значення другого диференціалу в точці (10;27), переконуємося, що дана точка є точкою максимуму функції корисності.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано точки $A(2;9); B(6;3)$. На прямій $x+2y=8$ знайти таку точку $M(x,y)$, щоб сума відстаней $AM+BM$ була мінімальною.
2. Фірма випускає товари двох видів у кількості x та y одиниць відповідно, які реалізує по цінам 20 та 30 умовних одиниць. Затрати на випуск продукції можна описати за допомогою функції $C(x,y)=0{,}5x^2+y^2-2xy$. Скласти план випуску продукції, при якому прибуток фірми буде максимальний.
3. Відома функція корисності споживача для товарів двох видів: $f(x,y) = x^{1/4}y^{3/4}$. Ціни на товари складають 5 і 6 умовних одиниць відповідно. При яких значеннях x, y споживач максимально задовольнить свої потреби, якщо на придбання товарів він планує витратити 380 ум.од.

7 КОНТРОЛЬНА РОБОТА « ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Наведемо приклад контрольної роботи з теми «Задачі математичного моделювання»

Варіант 1

1. Для задачі лінійного програмування

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \geq 18 \\ x_1 - 4x_2 & \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq 32 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0,$$

знайти та побудувати область допустимих розв`язків (2);
записати градієнт цільової функції (1);
розв`язати задачу лінійного програмування графічним методом (2).

2. Фірма випускає продукцію трьох видів P_1, P_2 ,P_3 . Для виготовлення продукції кожного виду потрібна сировина двох видів S_1, S_2. Запаси сировини, витрати сировини на випуск одиниці продукції кожного виду, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці.

	P_1	P_2	P_3	Запаси
S_1	4	2	1	120
S_2	1	3	2	130
Прибуток	3	2	1	

Скласти математичну модель задачі (2);
Розв`язати отриману задачу лінійного програмування симплексним методом (2);
Побудувати двоїсту задачу (1);
Розв`язати двоїсту задачу за допомогою теорем двоїстості (2);
Пояснити економічний зміст двоїстої задачі та об`єктивно обумовлених оцінок (2).

Рекомендована література

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2002.
2. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч.посіб.–К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
3. Абчук В.А. Экономико-математические методы, С-П, “Союз”, 1999.

4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод.посібник для самост.вивч.дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248с.
6. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели, М.: "ЮНИТИ", 1995.
7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997. – 365 с.
8. Збірник задач з курсу "Математичне програмування". Ч.2. /Укл.: С.І.Наконечний, В.В.Вітлінський та інш. – К.: КНЕУ, 1998. – 224 с.
9. Исследование операций в экономике (Под ред. Кремера). – М.: Банк и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
10. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
11. Ястремский А.И. Стохастические модели математической экономики. – К.,1983.