

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Чернігівська політехніка»

Вища математика
Частина I

методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
з дисципліни “Вища математика”
для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 2 від 15.09. 2020р.

Чернігів - 2020

Вища математика Частина I методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей /Укл.: В.П. Мурашківська, Л.А. Руновська–Чернігів: 2020, - 115с.

Укладачі:

Мурашківська Віра Петрівна, ст. викл.

Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ.....	4
1 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	6
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА ЗАВДАННЯ	96
Список рекомендованої літератури.....	115

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Дана робота призначена для студентів, які вивчають вищу математику і містять завдання до індивідуальних розрахунково-графічних робіт з вищої математики за темами: "лінійна алгебра", "аналітична геометрія", "векторна алгебра" та "диференціальне числення функції однієї змінної," які вивчаються в першому семестрі і передбачені робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями.

Курс вищої математики разом із курсами інших загальноосвітніх дисциплін складає основу фундаментальної підготовки сучасних інженерів та економістів. Сучасне життя потребує від майбутніх фахівців оволодіти основними математичними навичками, які вони отримують, вивчаючи курс вищої математики в університеті.

Основною формою навчання студента є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення матеріалу за навчальними посібниками, розв'язання задач, самоперевірки, виконання контрольних, розрахунково-графічних робіт. Допомогою в оволодінні матеріалом стають також лекційні та практичні заняття та консультації, під час яких студент може звертатись до викладача з питаннями, які викликали труднощі під час самостійної роботи.

Проте студент повинен розуміти, що тільки при систематичній наполегливій самостійній роботі із використанням навчальних посібників і наступного розв'язання рекомендованих задач допомога викладача університету стане справді ефективною. Завершальним етапом вивчення окремих частин курсу вищої математики є складання заліків та іспитів у відповідності з навчальним планом.

Метою індивідуальних розрахунково-графічних робіт, поданих в методичних вказівках, є допомога студенту поглибити теоретичні знання, засвоїти основні формули, навчитись розв'язувати ряд простих типів задач та перевірка результатів самостійної роботи студента з вивчених тем. Розв'язування поданих завдань, також дозволяє студенту зрозуміти ступінь засвоєння їм відповідних розділів курсу, вказує на прогалини, які виникли під час вивчення матеріалу, допомагає сформулювати питання викладачам під час консультацій.

Виконуючи домашню розрахунково-графічну роботу студент повинен самостійно розв'язати запропоновані викладачем індивідуальні домашні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи або останні дві цифри номера залікової книжки.

Розв'язання завдань з поясненнями подається на аркушах формату А4 (запис в яких виконується з одного боку). Умову завдань необхідно переписувати повністю без скорочень, після чого надавати розв'язання цього завдання, супроводжуючи його необхідним поясненням і з посиланням на

відповідні формули, теореми, правила тощо. Побудови графіків потрібно виконувати олівцем на тому ж аркуші, де і відповідне розв'язання, або на папері з масштабною сіткою. На титульній сторінці розрахунково-графічної роботи вказують номер варіанту, прізвище та ініціали студента, групу, прізвище та ініціали викладача.

Після перевірки роботи викладачем, якщо є зауваження, студент повинен розв'язати неправильно виконані завдання заново і повторно подати його на перевірку. Після позитивної оцінки викладача робота підлягає захисту. Результат цієї роботи враховується при складанні студентом заліку або іспиту.

Окрім завдань до розрахунково-графічної роботи методичні вказівки містять рекомендовану літературу з відповідних тем курсу вищої математики та пропонує розв'язок типового варіанта, що значно допоможе студенту краще орієнтуватися в матеріалі при самостійному вивченні курсу, при виконанні індивідуальних контрольних робіт, тобто оволодіти вузівським курсом вищої математики та успішно скласти іспит в кінці семестру.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно – контрольних робіт.

1 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 1-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8, \\ 2x + 4y - 5z = 11, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x - 2y - z = 8, \\ 6x - 4y - 5z = 3, \\ x + 2y + 4z = 5. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0, \\ 4x - 11y + 10z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 7y + 3z = 0, \\ 3x - 3y + z = 0, \\ 2x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $3\vec{b}$, \vec{c} ;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $3\vec{a}$ і $2\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{b} і $-4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 2; 4; 7 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 2 \rangle$, $\vec{q} = \langle 0; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 2; 4 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \pi/6$.

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(3; 1; 4)$, $B(-1; 6; 1)$, $C(-1; 1; 6)$, $D(0; 4; -1)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$ і площини $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$, $C(10; 7)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 15, а фокус $F(-10; 0)$;
- 2) гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 13, а ексцентриситет $\varepsilon = 14/13$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -4$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(1; 3)$ на відстані більшій у два рази, ніж від прямої $x = -6$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2 \cdot \sin 4\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1}; \\ 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}; & \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}. \end{aligned}$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$\begin{aligned} 1) y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + 3\sqrt{x}; & \quad 4) y = \frac{\lg_5(x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}; \\ 2) y = \sin^5 2x; & \quad 5) y = \operatorname{arctg} 3x \cdot \arccos x; \\ 3) y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3; & \quad 6) y = \frac{\sqrt{x+7} \cdot (x-3)^4}{(x+2)^5}. \end{aligned}$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (-x)^{\ln x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ на відрізку $[-3; 3]$.

2 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -5, \\ 2x + 3z = -2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 3y + z = 3, \\ x + y - z = 1, \\ 3x - 4y + 2z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + 3y + 3z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 2y - 3z = 0, \\ x + 5y + z = 0, \\ 4x - 7y + 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 3i + 4j + k$, $\vec{b} = i - 2j + 7k$, $\vec{c} = 3i - 6j + 21k$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $5\vec{a}$, $2\vec{b}$, \vec{c} ;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $4\vec{b}$ і $2\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{a} і \vec{c} ;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 11; -14 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle -1; 4 \rangle$, $\vec{q} = \langle 3; 0; -2 \rangle$, $\vec{r} = \langle 4; 5; -3 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $\left(\hat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \pi/4$.

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(3; -1; 2)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(1; 7; 3)$, $D(8; 5; 8)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$ і площини $x + 2y - 5z + 20 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-3; -2)$, $B(14; 4)$, $C(6; 8)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 2, а фокус $F(\sqrt{2}; 0)$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якої дорівнює 7, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{85/7}$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = 5$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(4; 0)$ на відстані меншій у два рази, ніж від прямої $x = -2$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2(-\sin 2\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3(\sin t - 1) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5 \operatorname{tg} x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \frac{3}{x^4} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3; \quad 4) y = \frac{\ln(x-3)}{4 \operatorname{tg} 3x^4};$$

$$2) y = \cos^5 3x; \quad 5) y = \ln(x+2) \operatorname{tg} x;$$

$$3) y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4; \quad 6) y = \frac{(x-3)^5 \cdot (x+2)^3}{\sqrt{x-1}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (-\cos x) \operatorname{ctg} x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (n2x)^{\ln x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x+1}{x-1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{3x}{x^2+1}$ на відрізку $[-5; 5]$.

3 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 1-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x - y + 4z = 15, \\ 3x - y + z = 8, \\ 5x - 2y + 5z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ 2x + 2y - 3z = -1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 6x + 5y - 4z = 0, \\ x + y - 7z = 0, \\ 5x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 2i - 4j - 2k$, $\vec{b} = 7i + 3j$, $\vec{c} = 3i + 5j - 7k$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $2\vec{b}$, $3\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $3\vec{a}$ і $-7\vec{b}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{c} і $-2\vec{a}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $3\vec{a}$, $3\vec{b} + \vec{a}$, $3\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ за векторами $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 1/5, |\vec{q}| = 1, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/2.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(3; 5; 4)$, $B(5; 8; 3)$, $C(1; 2; -2)$, $D(-1; 0; 2)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ і площини $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1; 7)$, $B(-3; -1)$, $C(11; -3)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точки $A(3; 0)$ і $B(2; \sqrt{5}/3)$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{3x}{4}$, а фокусна відстань $2c = 20$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -2$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(5; 0)$ на відстані більшій у два рази, ніж від прямої $x = -2$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2\sin 2\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6+x-x^2}{x^3-2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{x^2};$$

$$4) y = \frac{\ln(x+2)}{5\cos 42x};$$

$$2) y = \operatorname{tg}^4 x^5;$$

$$5) y = \sin 3x^{\arccos x};$$

$$3) y = 2^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 7x^4;$$

$$6) y = \frac{(x-2)^3 \cdot \sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x}-1}{2\operatorname{arctg} x - \pi};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{1/x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ на

відрізка $\left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$.

4 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y - z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ x - 2y = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 6x + 3y - 5z = -2, \\ 9x + 4y - 7z = 3, \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4x - y + 10z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 4y + 2z = 0, \\ 3x - 2y - 2z = 0, \\ 4x - 3y = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $-2\vec{b}$, $-7\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $4\vec{b}$ і $3\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $2\vec{a}$ і $-7\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $2\vec{a}$, $4\vec{b}$, $3\vec{c} + \vec{b}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 9; 5; 5 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 1; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 0; 0; -3 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 2; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{p} - 22\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1/2, \left(\vec{p}, \vec{q} \right) = 5\pi/6.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2; 4; 3)$, $B(1; 1; 5)$, $C(4; 9; 3)$, $D(3; 6; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ і

площини $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1; 0; 4)$, $B(-1; 4; 5)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точку $A(-5; 0)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{21/5}$;
- 2) гіперболи, яка проходить через точки $A(\sqrt{80}; 3)$, $B(4\sqrt{6}; 3\sqrt{2})$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $y = 1$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої відношення відстаней від точки M до точок $A(2; 3)$ і $B(-1; 2)$ дорівнює $3/4$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3\sin 6\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3(-\cos t) \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 10};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{4x+1} \right)^{3x-1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin 2x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -1, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} + 3x^3;$$

$$4) y = \frac{\sin^3 5x}{\ln(x-3)};$$

$$2) y = \arcsin^3 2x;$$

$$5) y = \cos^{5x+1};$$

$$3) y = (x+6)^5 \cdot \operatorname{arccotg} 3x^5;$$

$$6) y = \frac{(x+3)\sqrt[3]{x-2}}{(x+1)^7}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x^{\ln x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x}{9-x}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = (x+2)e^{1-x}$ на відрізку $[2; 2]$.

5 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8, \\ 2x + 4y - 5z = 1, \\ 5x + 6y - 9z = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8x - y + 3z = 8, \\ 4x + y + 6z = 1, \\ 4x - 2y - 3z = 7. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + 5y + z = 0, \\ 4x + 6y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x - y + 9z = 0, \\ 4x + 5y = 0, \\ x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -4i + 2j - k$, $\vec{b} = 3i + 5j - 2k$, $\vec{c} = j + 5k$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $6\vec{b}$, $3\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $2\vec{b}$ і \vec{a} ;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{a} і $-4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\vec{a} - 3\vec{b}$, $6\vec{b}$, $3\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 5; -5; 5 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 2; 0; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 3; -1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 0; 4; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = 3\pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(9; 5; 5)$, $B(-3; 7; 1)$, $C(5; 7; 8)$, $D(6; 9; 2)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$ і площини $3x + y - 5z - 12 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-2; -3; 6)$, $B(1; 6; 1)$, $C(6; 1; 6)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює $a = 11$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{57/11}$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{2}{3}x$, а фокусна відстань $2c = 10\sqrt{13}$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(27; 9)$ симетрично до вісі OX .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(4; 0)$ і $B(-2; 2)$ дорівнює 28.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = \frac{2}{1 + \cos\varphi}$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя:

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6}; & 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 2x^2 + x}{3x^2 - x}; & 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 8}{x - 2} \right)^{x+4}; \\
 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}; & 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^{5x}; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sin x}.
 \end{array}$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq -1, \\ x + 1, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4}; & 4) y = \frac{\cos^2 3x}{\lg(x - 4)}; \\
 2) y = \arccos 3x^2; & 5) y = \sin(x + 2) \arcsin 2x; \\
 3) y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x + 7); & 6) y = \frac{(x + 2)^7 (x - 3)^3}{\sqrt{x + 1}}.
 \end{array}$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$\begin{array}{ll}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x - \sin x}{x^3}; & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{1/x}.
 \end{array}$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$ на відрізку $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

6 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + y + 2z = -3, \\ 2x + 2y + 5z = 5, \\ 5x + 3y + 7z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5, \\ x + y + 5z = 1, \\ 3x + 4y + 9z = 6. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x - y - 3z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x + y + 3z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $-3\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $5\vec{a}$ і $3\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-2\vec{a}$ і $4\vec{b}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $5\vec{a}$, $4\vec{b}$, $3\vec{c} + 2\vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 3; 2; 7 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 1; 0 \rangle$, $\vec{q} = \langle -1; 3 \rangle$, $\vec{r} = \langle 0; -1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(0; 7; 1)$, $B(2; -1; 5)$, $C(1; 6; 3)$, $D(3; -9; 8)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ і

площини $x + 3y - 5z + 9 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-2; -3)$, $B(1; 6)$, $C(6; 1)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює $\sqrt{15}$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{10/25}$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якої дорівнює $b = 2\sqrt{10}$, а фокус $F = (-11; 0)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -2$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(1; 0)$ на відстані меншій у п'ять разів, ніж від прямої $x = 8$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}$;

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3};$$

$$4) y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{e^{5x+1}};$$

$$2) y = \arccos^2 4x;$$

$$5) y = \cos 5x \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$3) y = \log_2 (-7) \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$6) y = \frac{(-1)^4 (-2)^5}{\sqrt[3]{(-4)^2}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (-x)^{\operatorname{tg} \pi x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ на відрізку $[-1; 1]$.

7 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 4x - 7y - 2z = 0, \\ 2x - 3y - 4z = 6, \\ 2x - 4y + 2z = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - 3y - 4z = 1, \\ 7x - 9y - z = 8, \\ 5x - 6y + 3z = 7. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x + y + 8z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0, \\ x + 5y + 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $7\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $3\vec{a}$ і $5\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $2\vec{b}$ і $4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $7\vec{a}$, $2\vec{b} + \vec{c}$, $5\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 19; -1; 7 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 0; 1; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 2; 0; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 1; 0 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/2.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(5; 5; 4)$, $B(1; -1; 4)$, $C(3; 5; 1)$, $D(5; 8; -1)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ і

площини $x - 2y + 5z + 17 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-4; 2)$, $B(-6; 6)$, $C(6; 1)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 4, а фокус $F = (-3; 0)$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{3x}{4}$, а дійсна піввісь $2a = 16$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(4; -8)$ симетрично до вісі OX .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(4; 1)$ на відстані більшій у чотири рази, ніж від точки $B(-2; -1)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2(-\cos\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 2, & x > 3. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 3x^5 - \frac{5}{x^5} + \sqrt{x^3};$$

$$4) y = \frac{\log_3(x+5)}{\cos \sqrt{x}};$$

$$2) y = \ln^5(x + 7x^4);$$

$$5) y = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$3) y = \arccos^3 5x \cdot \operatorname{tg} x^4;$$

$$6) y = \frac{(-3)^{\sqrt{x+4}}}{(x+2)^x}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + 3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^3$ на відрізку $[-2; 2]$.

8 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 1-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 5x - 9y - 4z = 6, \\ x - 7y - 5z = 1, \\ 4x - 2y + z = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 6y - 2z = 2, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ 3x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x - y - 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 5x + y + 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - y - z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 4x + y - 4z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 4i + 2j - 3k$, $\vec{b} = 2i + k$, $\vec{c} = -12i - 6j + 9k$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, \vec{c} ;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $4\vec{a}$ і $3\vec{b}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{b} і $-4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $\vec{a} - 4\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ за векторами $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(6; 1; 1)$, $B(4; 6; 6)$, $C(4; 2; 0)$, $D(1; 2; 6)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$ і

площини $x - 2y + 4z - 19 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(4; -3)$, $B(7; 3)$, $C(1; 10)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює $b = 4$, а фокус $F = (0; 0)$;
- 2) гіперболи, дійсна піввісь якої $a = 5$, а ексцентриситет $\varepsilon = 7/5$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = 6$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $x = -5$ на відстані більшій у три рази, ніж від точки $A(6; 1)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2(-\cos\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 5(\cos t - 1) \\ y = 5\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x^2 - 9, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3+x, & x > 4. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6;$$

$$4) y = \frac{\ln(x-3)}{\cos^2 4x};$$

$$2) y = \operatorname{arctg}^3 4x;$$

$$5) y = (\ln x + 3)^{\sin \sqrt{x}};$$

$$3) y = (x-5)^7 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3;$$

$$6) y = \frac{(x-7)^{10} \sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x+1);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt{x-x^3}$ на відрізку $[-2; 2]$.

9 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x - 5y + z = 3, \\ 3x + 2y - z = 7, \\ 4x - 3y = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + y - 2z = 6, \\ 5x - 4y + 2z = 4, \\ -2x + 5y - 4z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5x - 5y + 4z = 0, \\ 3x + y + 3z = 0, \\ x + 7y - z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + y - 2z = 0, \\ 2x + 4y - 3z = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -i + 5k$, $\vec{b} = -3i + 2j + 2k$, $\vec{c} = -2i - 4j + k$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $7\vec{a}$ і $-3\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $2\vec{b}$ і $3\vec{a}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $7\vec{a}$, $2\vec{b}$, $-3\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 3; -1 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 0 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; 2; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 0; 2 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/6.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(7; 5; 3)$, $B(9; 4; 4)$, $C(4; 5; 7)$, $D(7; 9; 6)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$ і

площини $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(4; -4)$, $B(8; 2)$, $C(3; 8)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точку $A(8; 0)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 7/8$;
- 2) гіперболи, яка проходить через точки $A(3; -\sqrt{3/5})$ і $B(\sqrt{13/5}; 6)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $y = 4$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $y = 7$ на відстані більшій у п'ять разів, ніж від точки $A(4; -3)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 4\sin 3\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x^3}; \quad 4) y = \frac{\lg(1x+3)}{\cos^2 5x};$$

$$2) y = 2^{\sqrt{\cos x}}; \quad 5) y = \sin(x+4) \operatorname{tg} 7x;$$

$$3) y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3; \quad 6) y = \frac{(x+1)^8 (x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin 3x}{x - \frac{\pi}{6}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 4 - e^{-x^2}$ на відрізку $[-1; 1]$.

10 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 5x - 5y - 4z = -3, \\ x - y + 5z = 1, \\ 4x - 4y - 9z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 5x + y + 3z = 4, \\ 7x + 2y + 4z = 6. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 5y - 2z = 0, \\ x + y + 5z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 3y - z = 0, \\ 5x - 8y - 2z = 0, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 6i - 4j + 6k$, $\vec{b} = 9i - 6j + 9k$, $\vec{c} = i - 8k$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $2\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $3\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $3\vec{b}$ і $-9\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $3\vec{a}$ і $-5\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $3\vec{a} + \vec{b}$, $-4\vec{b}$, $-9\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 1; 7; -4 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 2; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 0; 3 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; -1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, \left(\vec{p}, \vec{q} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(6; 8; 2)$, $B(5; 4; 7)$, $C(2; 4; 7)$, $D(7; 3; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$ і

площини $2x - 3y - 5z - 7 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-3; -3)$, $B(5; -7)$, $C(7; 7)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точку $A(8; 0)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 7/8$;
- 2) гіперболи, яка проходить через точки $A(3; -\sqrt{3/5})$ і $B(\sqrt{13/5}; 6)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $y = 6$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої відношення відстаней від точки M до точок $A(-3; 5)$ і $B(4; 2)$ дорівнює $1/3$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 4\sin 4\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x-1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} 2x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 4x^6 + \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4};$$

$$4) y = \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(x-2)};$$

$$2) y = \ln^5(x+2);$$

$$5) y = \sin 3x \operatorname{arctg}(x+2);$$

$$3) y = 5^{-x^2} \cdot \operatorname{arccos} 5x^4;$$

$$6) y = \frac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ на відрізку $[-2; 2]$.

11 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 7x - 2y - z = 2, \\ 6x - 4y - 5z = 3, \\ x + 2y + 4z = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y - 3z = 3, \\ x + 3y - 5z = 1, \\ 2x + y - 8z = 4. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0, \\ x + 3y + 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0, \\ 4x - y + 6z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-2\vec{b}$ і $4\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-3\vec{a}$ і $6\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори \vec{a} , $\vec{c} - 2\vec{b}$, $6\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 6; 5; -14 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 4 \rangle$, $\vec{q} = \langle -3; 2 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; -1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 10, |\vec{q}| = 1, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/2.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(4; 2; 5)$, $B(0; 7; 1)$, $C(0; 2; 7)$, $D(1; 5; 0)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ і

площини $4x + 2y - z - 11 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1; -6)$, $B(3; 4)$, $C(-3; 3)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює $a = 12$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{22}/6$;
- 2) гіперболи, рівняння асимптот якої $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$, а фокусна відстань дорівнює $2c = 10$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(-7; -7)$ симетрично до вісі OX .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-5; -1)$ і $B(3; 2)$ дорівнює 40,5.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3(\cos\varphi + 1)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 3}{x + 4} \right)^{x+3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{4x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2;$$

$$4) y = \frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\operatorname{lg}(x+3)};$$

$$2) y = \sqrt{\arcsin 7x^4};$$

$$5) y = \sin 3x^{\operatorname{ctg} 1/x};$$

$$3) y = \operatorname{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2 \cdot (x+3)^5}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = xe^x$ на відрізку $[-2; 0]$.

12 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 4x - 3y + z = 3, \\ x + y - z = 4, \\ 3x - 4y + 2z = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 4y - 2z = -1, \\ 3x - 5y - 6z = 2, \\ 4x - 9y - 8z = 1. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x + 3y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ x + 4y + z = 0, \\ 4x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -4i + 3j - 7k$, $\vec{b} = 4i + 6j - 2k$, $\vec{c} = 6i + 9j - 3k$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $-2\vec{a}$, \vec{b} , $-2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $4\vec{b}$ і $7\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $5\vec{a}$ і $-3\vec{b}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $-2\vec{a}$, $4\vec{b}$, $7\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 6; -1; 7 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle -2; 0 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; 1; 3 \rangle$, $\vec{r} = \langle 0; 4 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \quad \text{якщо } |\vec{p}| = 5, \quad |\vec{q}| = 4, \quad \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(4; 4; 10)$, $B(7; 10; 2)$, $C(2; 8; 4)$, $D(9; 6; 9)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ і

площини $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-4; 2)$, $B(8; -6)$, $C(2; 6)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 2, а ексцентриситет $\varepsilon = 5\sqrt{29}/29$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якого дорівнює 3, а фокус $F(7; 0)$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(-5; 15)$ симетрично до вісі OX .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(2; 1)$ на відстані більшій у три рази, ніж від прямої $x = -5$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 1/\sqrt{1 - \sin\varphi}$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{3x^4 + 5x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3}{7x + 4} \right)^x.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 4x^3 - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x^2};$$

$$4) y = \frac{\sin^3(x+1)}{\lg(x-2)};$$

$$2) y = \cos^2 2x^5;$$

$$5) y = \arcsin 5x \cdot \sqrt{x};$$

$$3) y = 4(-7)^x \cdot \arcsin 3x^5;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+1)^5(x-5)^3}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^{\cos \frac{\pi}{x}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2}{(x+2)^3}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = (x-2) \cdot e^x$ на відріжку $[2; 1]$.

13 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ 2x + 2y - 3z = 9, \\ x - y + z = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + y - 3z = 7, \\ 3x + y - z = 2, \\ x - 2z = 5. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0, \\ x - 5y + 3z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3y + z = 0, \\ 2x - 8y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -5i + 2j - 2k$, $\vec{b} = 7i - 5k$, $\vec{c} = 2i + 3j - 2k$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $2\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-3\vec{b}$ і $11\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $8\vec{a}$ і $-6\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $8\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $11\vec{c} + 4\vec{b}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 15; 0 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 0; 5 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; 3 \rangle$, $\vec{r} = \langle -1; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 7, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(4; 6; 5)$, $B(6; 9; 4)$, $C(2; 10; 10)$, $D(7; 5; 9)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ і

площини $x + 2y - z - 2 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-5; 2)$, $B(0; -4)$, $C(5; 7)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 6, а фокус $F(-4; 0)$;
- 2) гіперболи, рівняння асимптот якої $y = \pm \frac{12}{13}x$, а дійсна піввісь $a = 13$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -7$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(-3; 3)$ на відстані більшій у три рази, ніж від точки $B(5; 1)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 5(-\sin\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases} \quad \left(\leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5}$;

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x}$;

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x};$$

$$4) y = \frac{\cos^4(x-1)}{\lg(x+5)};$$

$$2) y = \sin^4 3x;$$

$$5) y = \lg 5x^{\ln x};$$

$$3) y = (x+5)^{\arccos^3 5x};$$

$$6) y = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin \sqrt{2x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (nx)^{1/x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = (x-1)e^{-x}$ на відрізку $[-3; 3]$.

14 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 6x + 3y - 5z = 0, \\ 9x + 4y - 7z = 3, \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 4, \\ x + 2y + z = 3, \\ 2x - 7y + 2z = 1. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ 8x - y + 7z = 0, \\ 2x + 4y - 5z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 3x - 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $5\vec{a}$, $7\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-4\vec{b}$ і $11\vec{a}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $3\vec{a}$ і $-7\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $3\vec{a}$, $7\vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle -1; 11 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 0 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; -2 \rangle$, $\vec{r} = \langle 0; 3 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(3; 5; 4)$, $B(8; 7; 4)$, $C(5; 10; 4)$, $D(4; 7; 8)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$

i

площини $5x - y + 4z + 3 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(4; -4)$, $B(6; 2)$, $C(-1; 8)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 7, а фокус $F(5; 0)$;
- 2) гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 11, а ексцентриситет $\varepsilon = 12/11$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = 10$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(-1; 7)$ на відстані меншій у три рази, ніж від прямої $x = 8$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2(1 - \cos t) \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3};$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 7x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 1};$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{4x-5} \right)^{2x};$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - 5x^4;$$

$$4) y = \frac{\operatorname{tg}^3(x+3)}{\ln(x+1)};$$

$$2) y = \cos^3 4x;$$

$$5) y = \operatorname{arctg} 2x^{\sin x};$$

$$3) y = 2^{-\sin x} \cdot \operatorname{arcsin}^3 2x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x+3)^2}}{(x-7)^3}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{2x}) \operatorname{ctgx};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x}{9-x^2}$ на відрізку $[-2; 2]$.

15 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 8x - y + 3z = 2, \\ 4x + y + 6z = 1, \\ 4x - 2y - 3z = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 2, \\ 3x + y - z = 8. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 4y - 3z = 0, \\ 2x + 5y + z = 0, \\ x - 7y + 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 5y + z = 0, \\ 4x + 3y - 3z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $5\vec{a}$, $-\vec{b}$, $3\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-7\vec{a}$ і $4\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $3\vec{a}$ і $9\vec{b}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $3\vec{a}$, $-9\vec{b}$, $4\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 1; 5; -3 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 0; 2 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; 0; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 5; -3 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(10; 9; 6)$, $B(2; 8; 2)$, $C(9; 8; 9)$, $D(7; 10; 3)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{3}$ і

площини $x + 3y + 5z - 42 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-3; 8; 2)$, $B(-6; 2; C(0; -5)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точки $A(-\sqrt{17/3}; 1/3)$ і $B(\sqrt{21}/2; 1/2)$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якої $b = 2$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/2$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -1$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $x = 9$ на відстані меншій у чотири рази, ніж від точки $A(-1; 2)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 6\sin 4\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 2\sin 2t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\tg 3x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 2, \\ x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \frac{4}{x^5} - 7x^3 + \sqrt[5]{x^2};$$

$$4) y = \frac{5^{2x-3}}{\log_3(x+2)};$$

$$2) y = \tg^3 2x;$$

$$5) y = \ln(x+7) \cdot \tg 2x;$$

$$3) y = (x+2)^7 \cdot \arccos \sqrt{x};$$

$$6) y = \frac{\sqrt[4]{x-8} \cdot (x+2)^6}{(x-1)^5}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x^2}{4x^2 - \sin x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ на

відрізку $\left[\frac{1}{e}; e \right]$.

16 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5, \\ x + y + 5z = 6, \\ 3x + 4y + 9z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - y - 2z = 1, \\ 3x - 4y + z = -3, \\ 2x + 3y - 3z = 4. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0, \\ 2x - 3y + 5z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - y + 4z = 0, \\ 2x - 2y + z = 0, \\ x + y + 3z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $4\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $5\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-7\vec{a}$ і $9\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $3\vec{b}$ і $-8\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $4\vec{a}$, $\vec{a} - 6\vec{b}$, $9\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 0; 5 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 0; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; 0 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 2 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, \left(\vec{p}, \vec{q} \right) = \pi/6.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(1; 8; 2)$, $B(5; 2; 6)$, $C(5; 7; 4)$, $D(4; 10; 9)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0, \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$ і

площини $7x + y + 4z - 47 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(6; -9)$, $B(10; -$

$1)$, $C(-4; 1)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точку $A(0; 8)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
- 2) гіперболи, що проходить через точки $A(\sqrt{6}; 0)$ і $B(-2\sqrt{2}; 1)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $y = 9$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої відношення відстаней від точки M до точок $A(2; -4)$ і $B(3; 5)$ дорівнює $2/3$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2\cos\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2(-\sin t) \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} 0 \leq t \leq 2\pi \end{matrix} \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x - 4}{x + 6} \right)^{x-1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \frac{8}{x^3} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7;$$

$$4) y = \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2};$$

$$2) y = \operatorname{ctg}^7(-2x^3);$$

$$5) y = \operatorname{ctg}(x+4)^{\sqrt{x+3}};$$

$$3) y = (-7)^{\arcsin 7x^4};$$

$$6) y = \frac{\sqrt[5]{x+1} \cdot (-3)^x}{(-8)^x}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^2 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{x^2}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = e^{4x-x^2}$ на відрізку $[-3; 3]$.

17 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 1-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y - 4z = 1, \\ 7x - 9y - z = 3, \\ 5x - 6y + 3z = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 8y - 7z = 6, \\ 2x - 5y + 6z = 1, \\ 4x + 3y - z = 7. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -9\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $7\vec{a}$, $5\vec{b}$, $-\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-5\vec{a}$ і $4\vec{b}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $3\vec{b}$ і $-8\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $7\vec{a}$, $5\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 1; 8 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 3 \rangle$, $\vec{q} = \langle 2; -1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 0; -1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(6; 6; 5)$, $B(4; 9; 5)$, $C(4; 6; 11)$, $D(6; 9; 2)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$ і

площини $2x + 3y + 7z - 52 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(4; 1)$, $B(-3; -1)$, $C(7; -3)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює $a = 11$, а ексцентриситет $\varepsilon = 10/11$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}x$, а фокусна відстань $2c = 12$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(-7; 5)$ симетрично до вісі OX .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-3; 3)$ і $B(4; 1)$ дорівнює 31.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = \frac{3}{1 - \cos 2\varphi}$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя:

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}; & 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 7}{3x^4 + 2x^3 + 1}; & 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{3x + 10} \right)^{3x}; \\
 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}; & 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 4}{2x} \right)^{-3x}; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.
 \end{array}$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^7} + \frac{2}{x^6}; & 4) y = \frac{\sin^2(x+1)}{\cos 3x^4}; \\
 2) y = e^{-\sin x^2}; & 5) y = (\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg} 2x}; \\
 3) y = \ln(x-3) \cdot \arccos 3x^4; & 6) y = \frac{\sqrt[7]{x-2}}{(x+1)^2(x-6)^5}.
 \end{array}$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$\begin{array}{ll}
 1) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \cdot \sqrt[3]{x^2}.
 \end{array}$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$ на відрізку $[-3; -1]$.

18 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 5x + 6y - 2z = 2, \\ 2x + 3y - z = 9, \\ 3x + 3y - z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + z = 9, \\ x + 5y - 3z = 4, \\ 2x - y + 4z = 5. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 5z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y - 5z = 0, \\ x - 2y - 3z = 0, \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 15\vec{j} + 21\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $2\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $3\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-6\vec{a}$ і $4\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $5\vec{b}$ і $7\vec{a}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $2\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $4\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 1; 12 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 2; -1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 0; 2 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 1/2, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}}, \vec{q} \right) = \pi/2.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(7; 2; 2)$, $B(-5; 7; -7)$, $C(5; -3; 1)$, $D(2; 3; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$ і

площини $3x + 4y + 7z - 16 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-4; 2; 4)$, $B(6; -4; 10)$, $C(4; 10)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 5, а ексцентриситет $\varepsilon = 12/13$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якої дорівнює 6, а фокус $F(12; 0)$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(-9; 6)$ симетрично до вісі OY .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(0; -5)$ на відстані меншій у два рази, ніж від прямої $x = 3$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2(-\cos 3\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 2x - 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3}{x + 4} \right)^{6x+1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 10x^2 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{5}{x^4};$$

$$4) y = \frac{\ln(x-5)}{\operatorname{tg} \sqrt{x}};$$

$$2) y = e^{\cos x^2};$$

$$5) y = \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{\arcsin 7x};$$

$$3) y = \log_2(x-4) \arctg^3 4x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[5]{x+1}}{(x-3)(x-4)^3}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{\cos 3x - e^{-x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (gx)^{2x-\pi}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{4x}{4+x^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ на відрізку $[1; 2]$.

19 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = -19. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + y - 2z = 6, \\ 5x - 4y + 2z = 4, \\ -2x + 5y - 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5, \\ 3x + 4y - 7z = 2, \\ 5x + y - 5z = 7. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 5y + 4z = 0, \\ 3x + y + 3z = 0, \\ 2x - 6y + z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$.
Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $-6\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-8\vec{b}$ і $5\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-9\vec{a}$ і $7\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори \vec{a} , $\vec{a} - 6\vec{b}$, $5\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 9; -8; -3 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 4; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 3; 2; 0 \rangle$, $\vec{r} = \langle -1; 2 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(8; -6; 4)$, $B(10; 5; -5)$, $C(5; 6; -8)$, $D(8; 10; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$ і

площини $2x - 5y + 4z + 24 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3; -1)$, $B(11; 3)$, $C(-6; 2)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 9, а фокус $F(7; 0)$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{x}{3}$, а дійсна піввісь дорівнює 3;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -1/4$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(4; -2)$ на відстані меншій у два рази, ніж від точки $B(1; 6)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3(-\cos 4\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} 0 \leq t \leq 2\pi \end{matrix} \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x^3} + 3x^5;$$

$$4) y = \frac{\log_3(x-2)}{\operatorname{ctg} 2x};$$

$$2) y = \cos^5(x+4x);$$

$$5) y = \sin(x+5) \arcsin 3x;$$

$$3) y = (x-7)^4 \cdot \operatorname{arccot}^2 7x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+3)(x-4)}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{5}{x^2 - x - 20} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{1/(x-1)}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{(x+3)^2}{x^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x \ln x$ на відрізку $\left[\frac{1}{e^2}; 1 \right]$.

20 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 5x + y + 3z = 4, \\ 7x + 2y + 4z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 9y + 5z = 1, \\ 7x - 4y + z = 6, \\ 3x + 5y - 4z = 5. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 4x + 3y + 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3y - 4z = 0, \\ 2x + 4y + z = 0, \\ x + y + 5z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $-2\vec{a}$, $7\vec{b}$, $5\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-6\vec{b}$ і $7\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $9\vec{a}$ і $4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $-2\vec{a}$, $7\vec{b} + 4\vec{c}$, $4\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 5; 9; -13 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; -2 \rangle$, $\vec{q} = \langle -1; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 0 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, \left(\vec{p}, \vec{q} \right) = \pi/6.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(1; -1; 3)$, $B(6; 5; 8)$, $C(3; 5; 8)$, $D(8; 4; 1)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$ і

площини $x - 2y - 3z + 18 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-7; -2)$, $B(-7; 4)$, $C(5; -5)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 5, фокус $F(-10; 0)$;
- 2) гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 9 і має ексцентриситет $\varepsilon = 4/3$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = 12$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $x = -7$ на відстані меншій у три рази, ніж від точки $A(1; 4)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 5(1 - \sin\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 6(1 - \cos t) \\ y = 6\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 8}{x - 2} \right)^{x+4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 5}{x - 10} \right)^{5x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin^3 2x}{3x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq -2, \\ x^3, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 9x^3 - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7};$$

$$4) y = \frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg}(x)};$$

$$2) y = \sin^3 7x^3;$$

$$5) y = \sqrt{x+5}^{\cos 3x};$$

$$3) y = \sqrt[3]{x-3} \cdot \arccos^4 2x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[3]{x-2}^4}{(x-5)(x+1)^7}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (gx)^{\sin x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3 \cdot e^{x+1}$ на відрізку $[-4; 0]$.

21 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x - 2y - 3z = 3, \\ x + 3y - 5z = 0, \\ 2x + y - 8z = 4. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8, \\ 2x + 4y - 5z = 7, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - 3y - 4z = 0, \\ 5x - 8y - 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + z = 0, \\ x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $-3\vec{a}$, $6\vec{b}$, $-\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $5\vec{b}$ і $3\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $7\vec{a}$ і $-4\vec{b}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $7\vec{a} + \vec{c}$, $-4\vec{b}$, $3\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 15; 5; 6 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 0; 5; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 2; -1; -1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 1; 0 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \quad \text{якщо } |\vec{p}| = 8, \quad |\vec{q}| = 1/2, \quad \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(1; -2; 7)$, $B(4; 2; 10)$, $C(2; 3; 5)$, $D(5; 3; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 5y - z + 11 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$ і

площини $x + 7y + 3z + 11 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-1; -4)$, $B(9; 6)$, $C(-5; 4)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точки $A(0; -2)$ і $B(\sqrt{15}/2; 1)$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{2\sqrt{10}}{9}x$, а фокус $F(11; 0)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $y = 5$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $x = 14$ на відстані меншій у два рази, ніж від точки $A(2; 3)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3\sin 4\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos 3t \\ y = 2\sin 3t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 7}{x + 4} \right)^{4x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^x;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + 3x^6;$$

$$4) y = \frac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5};$$

$$2) y = e^{\sin^2 3x};$$

$$5) y = \sin 4x^{\arctg 1/x};$$

$$3) y = \sqrt[3]{x-4} \cdot \arcsin^4 5x;$$

$$6) y = \frac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (-\cos 2x) \operatorname{ctg} 4x;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (x + x)^{1/x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ на відрізку $[1; 3]$.

22 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x - 4y - 2z = 0, \\ 3x - 5y - 6z = 2, \\ 4x - 9y - 8z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -3, \\ 2x + 3z = -2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 5y - z = 0, \\ 2x + 4y - 3z = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x + 3y + 2z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $3\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $2\vec{b}$ і $6\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-4\vec{a}$ і $-5\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $-4\vec{a}$, $2\vec{b} - \vec{a}$, $6\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 6; 9; 4 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 0; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; -2; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 3; 0; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}, \vec{b} = \vec{q} - \vec{p}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2,5, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/2.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(4; 2; 10)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 5; 7)$, $D(2; -3; 5)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$ і

площини $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(10; -2)$, $B(4; -5)$, $C(-3; 1)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точку $A(-6; 0)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 2/3$;
- 2) гіперболи, яка проходить через точки $A(\sqrt{8}; 0)$ і $B(\sqrt{20}/3; 2)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $y = 1$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої відстань від точки M до точок $A(3; -2)$ і $B(4; 6)$ дорівнює $3/5$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2\cos 4\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3(-\sin t) \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ x-2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \sqrt{x^3} - \frac{4}{x^5} - 5x^3;$$

$$4) y = \frac{\sin^3 7x}{\ln(x+2)};$$

$$2) y = e^{\arctg x^4};$$

$$5) y = \lg 3x^4 \sqrt{x+3};$$

$$3) y = (x-3)^5 \cdot \arccos 3x^6;$$

$$6) y = \frac{(x-1)^6 (x+2)^3}{\sqrt[5]{x+3}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{1 - e^{-3x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x \ln \pi x)^{\sqrt{x-1}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = (x+1)^3 \sqrt{x^2}$ на відрізку $\left[-\frac{4}{5}; 3\right]$.

23 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 4x + y - 3z = 1, \\ 3x + y - z = 2, \\ x - 2z = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y + 4z = 1, \\ 3x - y + z = 8, \\ 5x - 2y + 5z = 9. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 4x + y - 4z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0, \\ x - 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 4i - 6j - 2k$, $\vec{b} = -2i + 3j + k$, $\vec{c} = 3i - 5j + 7k$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $6\vec{a}$, $3\vec{b}$, $8\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-7\vec{b}$ і $6\vec{a}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-5\vec{a}$ і $4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $-5\vec{a}$, $3\vec{b}$, $4\vec{c} - \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 3; -14; -30 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 1; 0 \rangle$, $\vec{q} = \langle -1; 1; 0 \rangle$, $\vec{r} = \langle 3; 2; 5 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = 3\pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2; 3; 5)$, $B(5; 3; -7)$, $C(1; 2; 7)$, $D(4; 2; 0)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$ і площини $4x + y - 6z - 5 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-3; -1)$, $B(-4; -5)$, $C(8; 1)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює $a = 25$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{\sqrt{29}}{14}x$, а фокусна відстань дорівнює $2c = 30$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(4; 1)$ симетрично до вісі OY .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-5; 3)$ і $B(2; -4)$ дорівнює 65.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 4(1 + \cos 2\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x - 7}{x + 6} \right)^{2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 1} \right)^{2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1, \\ x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 7x^2 + \frac{8}{x^3} - \sqrt[5]{x^4};$$

$$4) y = \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x-2}}{\lg(x+5)};$$

$$2) y = \operatorname{tg}^6 2x;$$

$$5) y = \cos 2x^3 \sin \sqrt{x};$$

$$3) y = \sqrt{x+3} \cdot \arcsin 2x^3;$$

$$6) y = \frac{(x-1)^4 (x-7)^2}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = e^{6x-x^2}$ на відрізку $[-3; 3]$.

24 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 4, \\ x + 2y + z = 8, \\ 2x - 7y + 2z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 7, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7x + y - 3z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ 6x + 5y - 2z = 0, \\ 2x + 4y - 5z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $4\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $-2\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $6\vec{a}$ і $-4\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-2\vec{a}$ і $5\vec{b}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $6\vec{a}$, $\vec{a} - 7\vec{b}$, $-2\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 6; 1; 3 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 1; 0 \rangle$, $\vec{q} = \langle 0; 0; 1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 2; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 5, \left(\vec{p}, \vec{q} \right) = 2\pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(5; 3; 7)$, $B(-2; 3; 5)$, $C(4; 2; 10)$, $D(1; 2; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0, \\ x + 7y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$ і

площини $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-2; -6)$, $B(-3; 5)$, $C(4; 0)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює $b = 2\sqrt{15}$, а ексцентриситет $\varepsilon = 7/8$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якого дорівнює 44, а фокус $F(-7; 0)$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(-2; 3\sqrt{2})$ симетрично до вісі OX .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(3; -4)$ на відстані більшій у три рази, ніж від прямої $x = 5$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = \frac{1}{2 - \cos 2\varphi}$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leq t \leq 2\pi \\ \end{array} \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 - 4x}{2 - x} \right)^{6x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x} \right)^{-2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x + 5, & x > 3. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 8x^3 - \frac{4}{x^4} + \sqrt[7]{x^2};$$

$$4) y = \frac{\operatorname{tg}(x-5)}{\ln^2(x+3)};$$

$$2) y = \operatorname{ctg}^3 4x;$$

$$5) y = \operatorname{arctg} 7x^{\sqrt{x+2}};$$

$$3) y = \sqrt[3]{x+1} \cdot \arccos 3x;$$

$$6) y = \frac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (-\sin \pi x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{\ln x}{x}$ на відрізку $[4; 4]$.

25 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 3-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 2, \\ 3x + y - z = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + 4y - 5z = 1, \\ 5x + 6y - 9z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 4y - 3z = 0, \\ 2x - 3y - z = 0, \\ x - 7y + 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $2\vec{a}$, $-\vec{b}$, $3\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-9\vec{a}$ і $4\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $5\vec{b}$ і $-6\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $2\vec{a}$, $5\vec{b}$, $\vec{b} - 6\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 1; -1; 4 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle -1; 2 \rangle$, $\vec{q} = \langle 2; 0 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 1; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(4; 3; 5)$, $B(1; 9; 7)$, $C(0; 2; 0)$, $D(5; 3; 10)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - 5y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ і площини $x + 4y + 13z - 23 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-7; -2)$, $B(3; -8)$, $C(-4; 6)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює $a = 13$, а фокус $F(-5; 0)$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{5}{6}x$, а дійсна піввісь дорівнює $2a = 12$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -3/8$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(5; 7)$ на відстані більшій у чотири рази, ніж від точки $B(-2; 1)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 4(-\sin\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{3-x} \right)^{-x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -2, \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 8x^3 - \frac{5}{x^4} - \sqrt[5]{x^4};$$

$$4) y = \frac{\cos^2 x}{\lg(x^2 - 2x + 1)};$$

$$2) y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x^2};$$

$$5) y = \arccos x \sqrt{\cos x};$$

$$3) y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{arccotg} 3x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[3]{x-3} \cdot \arcsin \frac{7}{x}}{\arcsin \frac{4}{x}}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \sin \frac{2}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/\ln x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на відрізку $[-3; 1]$.

26 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 1-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 5x - y - 2z = 1, \\ 3x - 4y + z = 7, \\ 2x + 3y - 3z = 4. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + y + 2z = -3, \\ 2x + 2y + 5z = 5, \\ 5x + 3y + 7z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7x - 6y + z = 0, \\ 4x + 5y = 0, \\ x - 2y + 3z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 3x + y + 6z = 0, \\ 2x + 3y + 5z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $-2\vec{a}$, \vec{b} , $7\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $5\vec{a}$ і $-2\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $3\vec{b}$ і \vec{c} ;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $-2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $7\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 1; -1; 4 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle -1; 2 \rangle$, $\vec{q} = \langle 2; 0 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 1; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 3, \left(\vec{p}, \vec{q} \right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(3; 2; 5)$, $B(4; 0; 6)$, $C(2; 6; 5)$, $D(6; 4; -1)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0, \\ x + 3y + 2z + 14 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$ і площини

$$3x - 2y + 5z - 3 = 0.$$

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(0; 2; 4)$, $B(-7; -4; 2)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого дорівнює 7, а фокус $F(13; 0)$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$, а фокусна відстань $2c = 16$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = 13$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $x = 2$ на відстані більшій у п'ять разів, ніж від точки $A(4; -3)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + 4x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4 + 3x}{5 + x} \right)^{7x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 5} \right)^{x+1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ -x^2 + 4, & 0 < x < 2, \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x^5} + 3x^4;$$

$$4) y = \frac{\log_2(x+7)}{\cos 3x};$$

$$2) y = \operatorname{tg} \sqrt{x + x^5};$$

$$5) y = \operatorname{tg} 7x \sin(x+3);$$

$$3) y = \sqrt{x-2} \cdot \operatorname{arctg}(x-1);$$

$$6) y = \frac{\sqrt{x+10} - 8}{x-1}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}{2 \sin^2 x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (x + x \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{2x^2 + 4x + 2}{2 - x}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[1; 2]$.

27 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 3-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x + 8y - 7z = 0, \\ 2x - 5y + 6z = 1, \\ 4x + 3y - z = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 7y - 2z = 8, \\ 2x - 3y - 4z = 6, \\ 2x - 4y + 2z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5x - 4y + 2z = 0, \\ 3y - 2z = 0, \\ 4x + y - 3z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 3i - j + 5k$, $\vec{b} = 2i - 4j + 6k$, $\vec{c} = i - 2j + 3k$.

Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $-3\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $6\vec{b}$ і $3\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{a} і $4\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $-3\vec{a}$, $4\vec{b} - \vec{c}$, $-5\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 3; 2; 18 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 4 \rangle$, $\vec{q} = \langle 3; 0; 2 \rangle$, $\vec{r} = \langle 2; -1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/4.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2; 1; 6)$, $B(1; 4; 9)$, $C(2; -5; 8)$, $D(5; 4; 2)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z + 6 = 0, \\ x - 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$ і площини

$$3x - y + 4z = 0.$$

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(7; 0)$, $B(1; 4)$, $C(-8; -4)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, який проходить через точки $A(-3; 0)$ і $B(1; \sqrt{40}/3)$;
- 2) гіперболи, уявна піввісь якої дорівнює 4, а фокус $F(-11; 0)$;
- 3) параболи, директриса якої має рівняння $x = 4$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від прямої $x = -7$ на відстані меншій у три рази, ніж від точки $A(3; 1)$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 3\cos 2\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 5\cos 3t \\ y = \sin 3t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{x^7 - 3x^5 - 4x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x - 1}{2x + 5} \right)^{3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2x}{3 + 2x} \right)^{-x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 4x^3 - \sqrt[3]{x^5} + \frac{2}{x^4};$$

$$4) y = \frac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x - 3)};$$

$$2) y = \operatorname{tg}^3 2x;$$

$$5) y = \ln 5x \cdot \operatorname{arctg}(x + 2);$$

$$3) y = \sqrt[5]{x + 4} \cdot \operatorname{arcsin} 7x^2;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[5]{(x - 2)^3} \cdot (x - 1)}{(x + 3)^4}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{x}{3x - 1} - \frac{1}{\ln 3x} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (x + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = (x - 5)^{-x}$ на відрізку $[-5; 5]$.

28 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;

2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

1) за формулами Крамера;

2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);

3) методом Гауса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y + z = 2, \\ x + 5y - 3z = 4, \\ 2x - y + 4z = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 9y - 4z = 3, \\ x - 7y - 5z = 1, \\ 4x - 2y + z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 6x + 5y - 4z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ 3x + 4y + 3z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 4i - 5j - 4k$, $\vec{b} = 5i - j$, $\vec{c} = 2i + 4j - 3k$. Знайти:

1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , $7\vec{b}$, $-2\vec{c}$;

2) обчислити модуль векторного добутку векторів $-5\vec{a}$ і $4\vec{b}$;

3) обчислити скалярний добуток двох векторів $8\vec{c}$ і $-3\vec{a}$;

4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{c} ;

5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\vec{c} - 3\vec{a}$, $4\vec{b}$, $8\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle -8; 9 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle -2; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle 1; -1 \rangle$, $\vec{r} = \langle 0; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{q} + \vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 1/2$, $|\vec{q}| = 4$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 5\pi/6$.

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2; 1; 7)$, $B(3; 3; 6)$, $C(2; -3; 9)$, $D(1; 2; 5)$. Знайти:

1) площу грані ABC ;

2) об'єм піраміди $ABCD$;

3) рівняння площини ABC ;

4) рівняння прямої AB ;

5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведену з точки D .

6) довжину висоти DH ;

7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - 4y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$ і площини $x + 2y - 5z + 16 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1; -3)$, $B(0; 7)$, $C(-2; 4)$. Знайти:

1) рівняння сторони AB ;

2) рівняння висоти CH та її довжину;

3) рівняння медіани AM та її довжину;

4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

1) еліпса, який проходить через точку $A(0; -\sqrt{11})$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 5/6$;

2) гіперболи, яка проходить через точки $A(\sqrt{32}/3; 1)$ і $B(\sqrt{8}; 0)$;

3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -3$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої відношення відстаней від точки M до точок $A(3; -5)$ і $B(4; 1)$ дорівнює $1/4$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2\sin 3\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4(-\sin t) \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq 2\pi \right)$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

1) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5}$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-10x} \right)^{5x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}$.

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 4x^5 - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3};$$

$$4) y = \frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)};$$

$$2) y = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}};$$

$$5) y = \operatorname{arctg} x \cdot \cos(x+1);$$

$$3) y = \operatorname{arcsin}^3 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3} \cdot (x-2)^5}{(x-3)^2}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcsin} x - \operatorname{tg} x;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)^{x^2-1}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt{3}/2 + \cos x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

29 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 4-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 4-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5, \\ 3x + 4y - 7z = 2, \\ 5x + y - 5z = 9. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 5y + z = 3, \\ 3x + 2y - z = 7, \\ 4x - 3y = 10. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 8x + y - 3z = 0, \\ x + 5y + z = 0, \\ 4x - 7y + 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $3\vec{a}$, $-5\vec{b}$, $-4\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $6\vec{b}$ і $2\vec{c}$;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $-2\vec{a}$ і $8\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{b} і \vec{c} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $3\vec{a}$, $6\vec{b} + \vec{a}$, $-4\vec{c}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle -7; -12 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 1; 5 \rangle$, $\vec{q} = \langle -1; 2 \rangle$, $\vec{r} = \langle 1; 0; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/3.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2; -1; 7)$, $B(6; 3; 1)$, $C(3; 2; 8)$, $D(2; -3; 7)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2x - 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$ і площини $3x - 7y - 2z + 7 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-5; 1)$, $B(8; -2)$, $C(1; 4)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, велика піввісь якого $a = 15$, а ексцентриситет $\varepsilon = 17/15$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{\sqrt{17}}{8}x$, а фокусна відстань $2c = 18$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(4; -10)$ симетрично до OY .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки M якої відношення відстаней від точки M до точок $A(-1; 2)$ і $B(3; -1)$ дорівнює $18,5$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2/\sqrt{1-\cos\varphi}$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad \left[0 \leq t \leq 2\pi \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{9x-4} \right)^{2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} + 2x^6;$$

$$4) y = \frac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x};$$

$$2) y = \sin^5 3x;$$

$$5) y = \sqrt{x} \sin(x+3);$$

$$3) y = e^{-\cos x} \cdot \arcsin 2x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[6]{x-1}}{(x+2)^4(x-5)^7}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(-x)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} (-\sin x)^{\pi^2 - x^2}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{4-2x}{1-x^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 108x - x^4$ на відрізку $[1; 4]$.

30 варіант

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

- 1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика;
- 2) попередньо отримавши нулі в 2-му рядку.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- 3) методом Гаусса.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 4x - 9y + 5z = 1, \\ 7x - 4y + z = 11, \\ 3x + 5y - 4z = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 5y - 4z = -3, \\ x - y + 5z = 1, \\ 4x - 4y - 9z = 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 7y - 3z = 0, \\ 3x - 5y + z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + y + 4z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 4x + 3y + 5z = 0. \end{cases}$$

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Знайти:

- 1) мішаний добуток трьох векторів $5\vec{a}$, $3\vec{b}$, $-4\vec{c}$;
- 2) обчислити модуль векторного добутку векторів $4\vec{b}$ і \vec{a} ;
- 3) обчислити скалярний добуток двох векторів $7\vec{a}$ і $-2\vec{c}$;
- 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} ;
- 5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $5\vec{a}$, $4\vec{b}$, $8\vec{c} + \vec{a}$.

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = \langle 7; 5 \rangle$ за векторами $\vec{p} = \langle 0; 1 \rangle$, $\vec{q} = \langle -2; 0 \rangle$, $\vec{r} = \langle 3; 1 \rangle$.

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \left(\hat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \pi/2.$$

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(0; 4; 5)$, $B(3; -2; 1)$, $C(4; 5; 6)$, $D(3; 3; 2)$. Знайти:

- 1) площу грані ABC ;
- 2) об'єм піраміди $ABCD$;
- 3) рівняння площини ABC ;
- 4) рівняння прямої AB ;
- 5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .
- 6) довжину висоти DH ;
- 7) рівняння прямої CN , паралельної до прямої AB .

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 6x - 5y + 3z + 8 = 0, \\ 6x + 5y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}$ і площини $5x + 7y + 9z - 32 = 0$.

Завдання 12. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(2; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(0; 4)$. Знайти:

- 1) рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння висоти CH та її довжину;
- 3) рівняння медіани AM та її довжину;
- 4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

- 1) еліпса, мала піввісь якого $b = 2\sqrt{2}$, а ексцентриситет $\varepsilon = 7/9$;
- 2) гіперболи, асимптоти якої мають рівняння $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$, а дійсна піввісь $2a = 12$;
- 3) параболи, яка проходить через точку $A(-45; 15)$ симетрично до OY .

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої знаходиться від точки $A(1; 5)$ на відстані меншій у чотири рази, ніж від прямої $x = -1$.

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 2 - \cos 2\varphi$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \quad \left[\begin{matrix} 0 \\ \leq t \leq 2\pi \\ \end{matrix} \right]$$

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 5}{4x - 2} \right)^{3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^5 + x - 5};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 2x}{1 - 2x} \right)^{x+1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = \frac{6}{x^4} + 3x^3 - \sqrt{x^7};$$

$$4) y = \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2 - x + 4)};$$

$$2) y = \cos^4 3x;$$

$$5) y = \sin 3x \arcsin 2x;$$

$$3) y = \sqrt{x + 5} \cdot \arccos^4 x;$$

$$6) y = \frac{\sqrt[5]{x + 2}}{(x - 1)^4 (x - 3)^5}.$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin \sqrt{x}} - 1}{\arcsin \sqrt{x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2x)^{\frac{\sin 1}{x}}.$$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{5x}{4 - x^2}$ і побудувати її графік.

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 7$ на відрізку $[-7; 7]$.

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

1) розклавши його по елементам 2-го стовпчика.

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = 2 \cdot \underbrace{(-1)^{3}}_{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \underbrace{(-1)^{4}}_{1} \times \\ &\times \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{32} + 1 \cdot \underbrace{(-1)^{6}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \underbrace{(8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16)}_{-2} \times \\ &\times \underbrace{(2 + 6 - 6 - 16)}_{-14} + 0 + \underbrace{(6 + 16 - 12 - 4)}_{6} = 38. \end{aligned}$$

2) попередньо отримавши нулі в 1-му рядку.

Обчислимо Δ_4 , отримавши попередньо нулі в 1-му рядку. Для цього помножимо третій стовпчик визначника на 3 і додамо його до першого, потім помножимо на -2 і додамо до другого. Тоді у першому рядку всі елементи, крім одного, будуть нулі. Розкладемо отриманий таким чином визначник за елементами першого рядка та обчислимо його, використавши правило трикутника для визначника третього порядку.

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{(-1)^{4}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 40 + 12 + 16 - 30 = 38. \end{aligned}$$

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 3, \\ 2x + 4y - 3z = 2, \\ 3x - y - 3z = -7. \end{cases}$$

1) за формулами Крамера.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Отже, система матиме один розв'язок.

$$\Delta_{\leftarrow 1} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64; \quad \Delta_{\leftarrow 2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16; \quad \Delta_{\leftarrow 3} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

$$\text{Знаходимо: } x = \frac{64}{-16} = -4; \quad y = \frac{-16}{-16} = 1; \quad z = \frac{32}{-16} = -2.$$

2) за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

Для знаходження розв'язку системи за допомогою оберненої матриці запишемо систему рівнянь в матричній формі $AX = B$. Розв'язок системи в матричній формі має вигляд $X = A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} (вона існує, оскільки $\Delta_3 = \det A = -16 \neq 0$).

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 15; \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-45+32+77}{-16} \\ \frac{-9-7}{-16} \\ \frac{-42+32+42}{-16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3) *методом Гаусса.*

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса, виключивши x з другого та третього рівнянь. Побудуємо розширену матрицю системи. Для цього перший рядок помножимо на -2 і додамо результат до другого, потім перший рядок помножимо на 3 і додамо результат до третього, в результаті отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array} \right)$$

Останній рядок поділимо на -16 , другий рядок поділимо на -1 і запишемо систему в звичайній формі:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 3, \\ 6y + z = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Підставивши y у друге рівняння, знаходимо z . Потім знаходимо x з першого рівняння. Остаточо матимемо: $x = -4$; $y = 1$; $z = -2$.

Завдання 3. Розв'язати системи методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x + 3y = 6. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 3y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 3x - 2y = 1. \end{cases}$$

1) Побудуємо розширену матрицю системи, помінявши місцями перше та друге рівняння. Матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

Перший рядок помножимо на -3 та на -4 і додамо відповідно до другого та третього рядків. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Потім другий рядок помножимо на -1 і додамо до третього. Матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Запишемо останній рядок у вигляді рівняння: $0 = 1$. Воно не має розв'язків, отже дана система несумісна.

2) Побудуємо розширену матрицю системи, та додамо перший рядок до другого і запишемо його на місце другого рядка. Матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

В результаті отримали два однакових рядки, один з яких можна вилучити. Далі додамо другий рядок до першого, помноженого на -3 . Одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -6 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Запишемо систему у вигляді рівнянь і знайдемо з першого рівняння z , а з другого x :

$$\begin{cases} 7y - 6z = 1, \\ 3x - 2y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{7y-1}{6}, \\ x = \frac{1+2y}{3}. \end{cases}$$

Нехай $y = t$, тоді відповідь запишемо у вигляді:

$$x = \frac{1+2t}{3}, \quad y = t, \quad z = \frac{7t-1}{6}, \quad t \in R.$$

Отже система має безліч розв'язків.

Завдання 4. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y - z = 0, \\ x - 3y + 5z = 0, \\ 4x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

1) Обчислимо визначник системи.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11. \quad \Delta_3 \neq 0, \text{ тому однорідна система має єдиний нульовий}$$

розв'язок: $x = y = z = 0$.

2) Обчислимо визначник системи.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0. \text{ Отже, система матиме безліч розв'язків. Зазначимо, що}$$

третє рівняння є сумою перших двох рівнянь системи. Тому, відкинувши третє рівняння, одержимо:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 0, \\ x - 3y + 5z = 0. \end{cases}$$

Визначник з коефіцієнтів при невідомих x і y не дорівнює нулю, тому перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} 3x + 4y = z, \\ x - 3y = -5z. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta_2},$$

$$\text{де } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -13; \Delta_1 = \begin{vmatrix} z & 4 \\ -5z & -3 \end{vmatrix} = 17z; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & z \\ 1 & -5z \end{vmatrix} = -16z.$$

Знаходимо, що $x = \frac{-17z}{13}$, $y = \frac{16z}{13}$, де $z \in R$. Нехай $z = t$. Тоді, розв'язок

початкової системи $x = \frac{-17}{13}t$, $y = \frac{16}{13}t$, $z = t$, $t \in R$.

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Знайти:

1) мішаний добуток трьох векторів \vec{a} , \vec{b} , $5\vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times 5\vec{c}) = 5(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) = 5 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5(20 - 36 - 40) = 5 \cdot (-96) = -480.$$

2) обчислити модуль векторного добутку векторів $3\vec{c}$ і \vec{b} .

$$3\vec{c} \times \vec{b} = 3(\vec{c} \times \vec{b}) = 3 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(0\vec{i} - 6\vec{j} + 14\vec{k});$$

$$|3\vec{c} \times \vec{b}| = 3\sqrt{10^2 + (-6)^2 + 14^2} = 3\sqrt{332} = 6\sqrt{83}.$$

3) обчислити скалярний добуток двох векторів \vec{a} і $3\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot (3\vec{b}) = 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3(4 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 12.$$

4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори \vec{a} і \vec{b} .

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \neq 0$, тому вектори \vec{a} і \vec{b} не ортогональні. Оскільки $\vec{a} = (4; 0; 4)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$ та $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то вектори \vec{a} і \vec{b} не колінеарні.

5) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\vec{a} - \vec{b}$, \vec{b} , \vec{c} .

Вектори \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} компланарні, якщо $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = 0$. $\vec{a} - \vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, тоді

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Отже, вектори } \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} \text{ та } \vec{c} \text{ не компланарні.}$$

Завдання 6. Написати розклад вектора $\vec{x} = (3; 3; 7)$ за векторами $\vec{p} = (-1; 1; 0)$, $\vec{q} = (3; 3; 1)$, $\vec{r} = (1; 4; 3)$.

Нехай $x = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q} + \gamma \cdot \vec{r}$ або в координатній формі:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3, \\ \beta + 3\gamma = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера. Знайдемо: $\Delta = 22$;

$$\Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66; \quad \Delta \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44; \quad \Delta \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66;$$

$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta} = 3; \quad \beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta} = -2; \quad \gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta} = 3, \text{ тому } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{p} - 2\vec{q} + 3\vec{r}.$$

Завдання 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 9, \quad \left(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{q}} \right) = \pi/6.$$

$S_{np} = |a \times b|$. Використовуючи властивості векторного добутку маємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\vec{p} - \vec{q} \\ \vec{p} + 2\vec{q} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{p} \\ 2\vec{q} \end{pmatrix} = 2\vec{p} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{p} + 4\vec{p} \times \vec{q} - 2\vec{q} \times \vec{q} = 5\vec{p} \times \vec{q}.$$

За означенням модуля векторного добутку:

$$|5\vec{p} \times \vec{q}| = 5|\vec{p} \times \vec{q}| = 5|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin\left(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{q}}\right) = 5 \cdot 2 \cdot 9 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 45.$$

Отже, $S = 45$.

Завдання 8. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda^2 - 1 \\ -\lambda - 1 \\ -\lambda + 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Маємо $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ – власні значення даної матриці. Для визначення власного вектора, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$ одержимо систему:

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \vec{v} = \begin{pmatrix} -t/3 \\ t/3 \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0. \text{ Нехай } t = 3, \text{ тоді } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно для $\lambda_2 = 2$ маємо:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 + v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$. Нехай $t=1$, тоді $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_3 = 4$ одержимо:

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 - v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$. Нехай $t=1$, тоді $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 9. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2; 3; 4)$, $B(4; 7; 3)$, $C(1; 2; 2)$, $D(-2; 0; -1)$. Знайти:

$B(4; 7; 3)$

1) площу грані ABC ;

Відомо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Знаходимо: $\overrightarrow{AB} = \langle 2; 4; -1 \rangle$; $\overrightarrow{AC} = \langle 1; -1; -2 \rangle$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{110}.$$

2) об'єм піраміди $ABCD$;

Оскільки $V_{nip} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{AD} = \langle 4; -3; -5 \rangle$.

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11, \text{ то } V_{nip} = \frac{11}{6}.$$

3) рівняння площини ABC ;

Нехай довільна точка $M(x; y; z)$ належить площині ABC , тоді рівняння

площини (ABC) має вигляд $\overrightarrow{AM} \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} = 0$, або $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Розклавши за першим рядком, одержимо:

$$-9 \langle -2 \rangle + 5 \langle -3 \rangle + 2 \langle -4 \rangle = 0, \text{ або } 9x - 5y - 2z + 5 = 0.$$

4) рівняння прямої AB ;

Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \text{ одержимо рівняння прямої } AB: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-1}.$$

5) рівняння прямої DH , що містить висоту піраміди проведenu з точки D .

Висота піраміди DH перпендикулярна площині (ABC) , тому напрямним вектором прямої, що містить висоту буде нормальний вектор $\vec{n} = \langle -5; -2 \rangle$ площини (ABC) . Тоді рівняння прямої DH запишемо у вигляді:

$$\frac{x+2}{9} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}.$$

б) довжину висоти DH ;

Знайдемо довжину висоти DH , користуючись формулою відстані від точки $D \langle 0; y_0; z_0 \rangle$ до площини (ABC) з рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Маємо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|19 \cdot \langle 2 \rangle - 5 \cdot 0 - 2 \cdot \langle 1 \rangle - 5|}{\sqrt{9^2 + \langle 5 \rangle^2 + \langle 2 \rangle^2}} = \frac{11}{\sqrt{110}} = \sqrt{1,1}.$$

7) рівняння прямої CH , паралельної до прямої AB .

Пряма CH паралельна до AB , тоді їх напрямні вектори \vec{s}_1 і \vec{s}_2 співпадатимуть, тому $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \langle 4; -1 \rangle$. Отже, рівняння прямої CH матиме вид:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Завдання 10. Написати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Для даної прямої знайдемо напрямний вектор \vec{s} . Оскільки він повинен бути перпендикулярним до нормальних векторів $\vec{n}_1 = \langle -1; 3 \rangle$ та $\vec{n}_2 = \langle 4; -1 \rangle$ заданих площин, то в якості \vec{s} можна взяти векторний добуток векторів \vec{n}_1 та \vec{n}_2 :

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}, \text{ тобто } \vec{s} = \langle 11; 17; 13 \rangle.$$

За точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку проходить шукана пряма, можна взяти точку перетину її з будь-якою з координатних площин, наприклад з площиною YOZ . Оскільки $x_0 = 0$, то y_0 та z_0 визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Отже, шукана пряма визначається рівнянням:

$$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$$

Завдання 11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ і

площини $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Нехай точка $M(x_0; y_0; z_0)$ — шукана точка. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

Підставимо параметричні вирази у рівняння площини і розв'яжемо рівняння відносно t :

$$\begin{aligned} 3(7 + 5t) - (4 + t) + 2(5 + 4t) - 5 &= 0, \\ 22t + 22 &= 0, \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Знайдене t єдине, тому шукана точка M існує. Для її знаходження підставимо значення t в параметричні вирази прямої:

$$\begin{cases} x_0 = 7 - 5, \\ y_0 = 4 - 1, \\ z_0 = 5 - 4. \end{cases}$$

Маємо $M(2; 3; 1)$.

Завдання 12. Вершини трикутника (рисунк 2.12.1) знаходяться в точках $A(4; 3)$, $B(-3; -3)$, $C(2; 7)$. Знайти:

1) рівняння сторони AB .

Побудуємо $\triangle ABC$ в декартовій системі координат.

Користуючись рівнянням прямої, яка проходить через дві точки, одержимо рівняння сторони AB :

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}, \text{ звідки } 6(x-4) = 7(y-3) \text{ або } 6x - 7y - 3 = 0.$$

2) рівняння висоти CH та її довжини.

Запишемо рівняння прямої AB у вигляді $y = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}$. Кутовий коефіцієнт цієї

прямої $k_{AB} = \frac{6}{7}$. Враховуючи умову перпендикулярності прямих AB і CH ,

кутовий коефіцієнт висоти $k_{CH} = -\frac{7}{6}$ ($k_{AB} \cdot k_{CH} = -1$). Рівняння прямої, яка

проходить через точку $C(2; 7)$ і має кутовий коефіцієнт $k_{CH} = -\frac{7}{6}$ запишемо у вигляді:

$$y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2) \text{ або } 7x + 6y - 56 = 0.$$

Довжину висоти CH знайдемо як відстань від точки C до прямої AB :

$$|CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + 7^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}}.$$

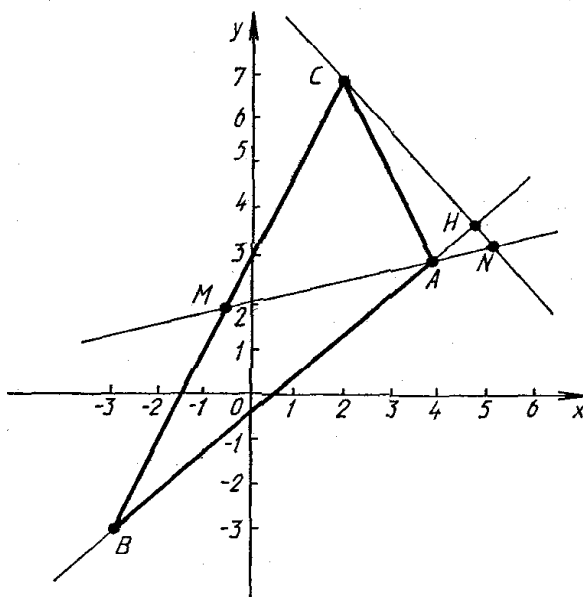


Рисунок 2.12.1

3) рівняння медіани AM та її довжини.

За відомими формулами знаходимо координати x, y середини M відрізка BC :

$$x_M = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}; \quad y_M = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

За двома відомими точками A та M складаємо рівняння медіани AM :

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3} \text{ або } 2x-9y+19=0.$$

Знайдемо довжину медіани AM як відстань між точками A і M :

$$|AM| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-4\right)^2 + (-3-3)^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}.$$

4) точку N перетину медіани AM і висоти CH .

Для знаходження координат точки N перетину медіани і висоти CH складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x+6y-56=0, \\ 2x-9y+19=0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо точку $N\left(\frac{26}{5}; \frac{49}{15}\right)$.

Завдання 13. Скласти канонічні рівняння:

1) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 3, а фокус $F(\sqrt{5}; 0)$.

Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. За умовою задачі велика піввісь $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для еліпса виконується рівність $b^2 = a^2 - c^2$. Для даних a і c знайдемо $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Шукане рівняння еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2) гіперболи, уявна піввісь якої дорівнює 2, а фокус $F(-\sqrt{13}; 0)$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. За умовою уявна піввісь $b = 2$, а $c = \sqrt{13}$. Для гіперболи справедлива рівність $b^2 = c^2 - a^2$. Тому $a^2 = c^2 - b^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$. Шукане рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

3) параболи, директриса якої має рівняння $x = -3$.

Канонічне рівняння параболи в даному випадку повинне мати вигляд $y^2 = 2px$, а рівняння її директриси $x = -\frac{p}{2}$. Але за умовою задачі рівняння директриси

$x = -3$. Тому $-\frac{p}{2} = -3$, $p = 6$ і шукане канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 12x$.

Завдання 14. Скласти рівняння лінії, кожна точка $M(x; y)$ якої знаходиться від точки $A(3; 2)$ на відстані більшій у три рази, ніж від точки $B(-1; 0)$.

Нехай $M(x; y)$ – довільна точка шуканої лінії (рисунк 2.14.1). Тоді за умовою задачі: $|AM| = 3|BM|$.

Оскільки $|AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$, $|BM| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, то рівняння шуканої лінії $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Далі підносимо обидві частини до квадрату. Одержимо: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2$,

$$8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 = 0.$$

Виділивши повні квадрати в останньому рівнянні, отримаємо

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16},$$

яке є рівнянням кола з центром в точці $C\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ і

радіусом $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

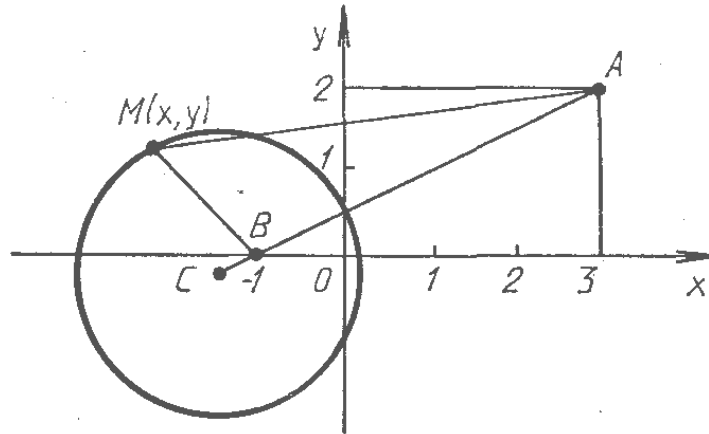


Рисунок 2.14.1

Завдання 15. Побудувати криву $\rho = 4(-\sin\varphi)$, яка задана рівнянням в полярній системі координат.

Складемо таблицю значень полярного кута φ_i та відповідних значень полярного радіуса ρ_i :

φ_i	ρ_i
0	4
$\pi/6$	2
$\pi/4$	$\approx 1,2$
$\pi/3$	$\approx 0,6$

φ_i	ρ_i
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	$\approx 0,6$
$3\pi/4$	$\approx 1,2$
$5\pi/6$	2

φ_i	ρ_i
π	4
$7\pi/6$	6
$5\pi/4$	$\approx 6,8$
$4\pi/3$	$\approx 7,4$

φ_i	ρ_i
$3\pi/2$	8
$5\pi/3$	$\approx 7,4$
$7\pi/4$	$\approx 6,8$
$11\pi/6$	6

Побудувавши знайдені точки M_i в полярній системі координат і з'єднавши їх, отримаємо кардіоїду (рисунок 2.15.1).

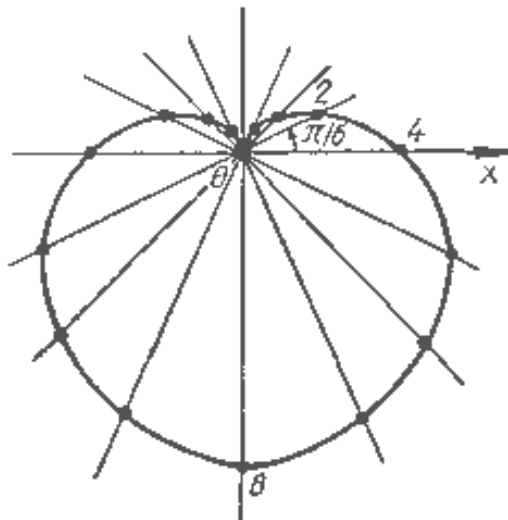


Рисунок 2.15.1

Завдання 16. Побудувати криву, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 2 - 2\sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Підставляючи достатню кількість значень параметра t від 0 до 2π і знайшовши відповідні значення x_t , y_t , можна побудувати точки M_t в декартовій системі координат і з'єднати їх плавною лінією (рисунок 2.16.1). Отримана

крива буде дуже схожою на еліпс з півсями $a=3$, $b=2$ і центром в точці $C(2)$. Але строго це можна довести, позбувшись від параметра t . Доведемо це аналітично:

$$\frac{x-1}{3} = \cos t, \quad \frac{y-2}{-2} = \sin t, \quad \text{звідси } \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{-2}\right)^2 = 1.$$

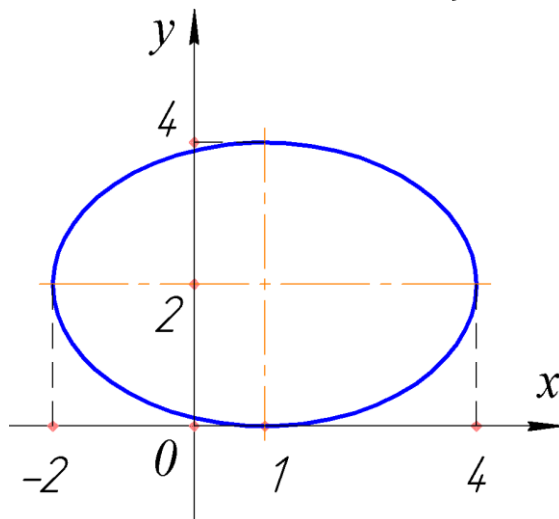


Рисунок 2.16.1

Завдання 17. Обчислити границі функцій, не використовуюючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10} = 0,7;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(7 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^4} \right)}{x^4 \left(6 + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3} \right)} = \frac{7}{6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x-3}{2x^3+4x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(10 - \frac{3}{x} \right)}{x^3 \left(2 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{3}{x}}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)} = \left[\frac{10}{\infty} \right] = 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{2-5x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{2x}{2x-3} - 1 \right) \right)^{2-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x-3} \right)^{2-5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{3}} \right)^{\frac{3}{2x-3} \cdot (-5x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{3}{2x-3}} \right)^{-5x} = e^{\frac{-15}{2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x} = \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned}
 6) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi^2 - 4x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi^2 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2\sin^2\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)/2\right)}{\underbrace{\pi - 2x}_{\rightarrow 0} \underbrace{\pi + 2x}_{\rightarrow 2\pi}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2\sin\frac{\pi - 2x}{4} \cdot \sin\frac{\pi - 2x}{4}}{4 \cdot \frac{\pi - 2x}{4} \underbrace{\pi + 2x}_{\rightarrow 2\pi}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin\frac{\pi - 2x}{4}}{\pi + 2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

Завдання 18. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 0, \\ x - 1, & 0 < x \leq 2, \\ 5 - x, & 2 < x \leq \infty. \end{cases}$$

Функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжках $(-\infty; 0]$, $(0; 2]$, і $(2; \infty)$, де вона задана неперервними елементарними функціями. Тоді розрив можливий лише в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Для точки $x_1 = 0$ маємо:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x - 1) = -1, \\
 f(0) &= x^2 \Big|_{x=0} = 0,
 \end{aligned}$$

функція $f(x)$ в точці $x_1 = 0$ має розрив першого роду.

Для точки $x_2 = 2$ знаходимо:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-0} (x - 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (5 - x) = 3, \\
 f(2) &= (x - 1) \Big|_{x=2} = 1,
 \end{aligned}$$

функція $f(x)$ в точці $x_2 = 2$ також має розрив першого роду.

Побудуємо графік функції (рисунок 2.18.1).

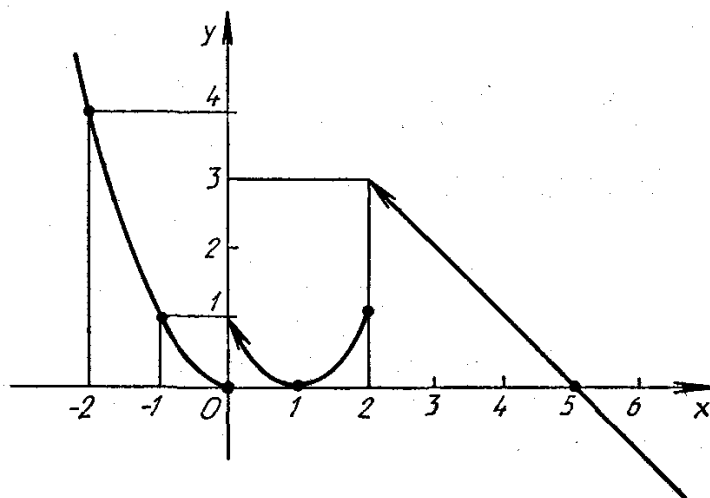


Рисунок 2.18.1

Завдання 19. Знайти похідні функцій:

$$1) y = 9x^5 - \frac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4.$$

$$y' = 9 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 3 = 45x^4 + \frac{12}{x^4} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3.$$

$$2) y = \operatorname{tg}^5(x^2 + 2).$$

$$y' = 5 \operatorname{tg}^4(x^2 + 2) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 2)} \cdot 2x.$$

$$3) y = 3^{-x^4} \cdot \operatorname{ctg} 7x^3.$$

$$y' = 3^{-x^4} \cdot \ln 3 \cdot (-4x^3) \operatorname{ctg} 7x^3 + 3^{-x^4} \left(\frac{1}{-\sin^2 7x^3} \right) \cdot 21x^2 = -4 \cdot \ln 3 \cdot 3^{-x^4} \cdot x^3 \times \\ \times \operatorname{ctg} 7x^3 - \frac{21x^2 \cdot 3^{-x^4}}{\sin^2 7x^3}.$$

$$4) y = \frac{\lg(x^2 - 3x + 5)}{\operatorname{arctg}^2 5x}.$$

$$y' = \frac{\left(\frac{2x-3}{x^2-3x+5} \cdot \operatorname{arctg}^2 5x - \lg(x^2-3x+5) \cdot 2 \cdot \operatorname{arctg} 5x \cdot \left(-\frac{1}{1+25x^2} \right) \cdot 5 \right)}{\operatorname{arctg}^4 5x} = \\ = \left(\frac{x-3}{x^2-3x+5} \cdot \operatorname{arctg}^2 5x + \frac{10 \lg(x^2-3x+5) \cdot \operatorname{arctg} 5x}{1+25x^2} \right) \cdot \operatorname{arctg}^{-4} 5x.$$

$$5) y = \ln 7x \cdot \operatorname{arctg}(x-5).$$

Прологарифмуємо дану функцію $\ln y = \operatorname{arctg}(x-5) \cdot \ln(\ln 7x)$,

$$\text{тоді: } \frac{1}{y} y' = \frac{1}{1+(x-5)^2} \cdot 3 \ln(\ln 7x) \cdot \operatorname{arctg}(x-5) + \frac{1}{\sin 7x} \cdot 7 \cos 7x.$$

$$\text{Отже: } y' = \ln 7x \cdot \operatorname{arctg}(x-5) \left(\frac{3 \ln(\ln 7x)}{1+(x-5)^2} + \frac{7 \cdot \operatorname{arctg}(x-5) \cdot \cos 7x}{\sin 7x} \right).$$

$$6) y = \frac{\sqrt[7]{x+5}}{(x-1)(x+3)}.$$

Застосовуючи метод логарифмічного диференціювання, знаходимо:

$$\ln y = \frac{6}{7} \ln(x+5) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3),$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{6}{7\sqrt{x+5}} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3},$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{x+5}^6}{(\sqrt{x-1})^2 (\sqrt{x+3})^5} \left(\frac{6}{7\sqrt{x+5}} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right).$$

Завдання 20. Обчислити границі функції, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{e^{5x} - 1}.$

Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$, яку розкриваємо за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{e^{5x} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{e^{5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{1 + 16x^2} \right) = \frac{4}{5}.$$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1)^{\sin \pi x}.$

Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Позначимо $(\sqrt{x} - 1)^{\sin \pi x} = y.$

Тоді $\ln y = \sin \pi x \cdot \ln(\sqrt{x} - 1).$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x \cdot \ln(\sqrt{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x} - 1)}{1/\sin \pi x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/(\sqrt{x} - 1)}{-\frac{1 \cdot \cos \pi x}{\sin^2 \pi x} \cdot \pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin^2 \pi x}{(\sqrt{x} - 1) \cos \pi x \cdot \pi} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{(\sqrt{x} - 1) \pi} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin \pi x \cdot \cos \pi x \cdot \pi}{\pi} = 0.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = 0$, тоді $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1)^{\sin \pi x} = 1.$

Завдання 21. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x+3}{x-4}$ і побудувати її графік.

1) Областю визначення функції є множина $x \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty).$

2) Функція ні парна, ні не парна.

3) $y > 0$ при $x > 4$ і $y < 0$ при $x < 4.$

4) Точки перетину графіка даної функції з осями координат: $(0; -9/4)$ і $(-3; 0).$

5) Знаходимо, що $x = 4$ – вертикальна асимптота. Дійсно:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} y = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x+3}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} y = \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x+3}{x-4} = \infty.$$

Знаходимо похилі асимптоти виду: $y = kx + b,$

$$\text{де } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x-4} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x + 9}{x - 4} = 10.$$

Таким чином, існує єдина похила асимптота $y = x + 10$.

б) Досліджуємо функцію на зростання, спадання, локальний екстремум:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4) - (x^2+6x+9)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 24 - x^2 - 6x - 9}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}.$$

З $y' = 0$ випливає $x^2 - 8x - 33 = 0$, звідки $x_1 = 11$, $x_2 = -3$. На інтервалі $(-\infty; -3)$ $y' > 0$, тому функція зростає на даному інтервалі, а на інтервалі $(-3; 4)$ $y' < 0$ і функція спадає. В точці $x = -3$ функція має локальний максимум: $y(-3) = 0$. На інтервалі $(4; 11)$ $y' < 0$, тому функція спадає на цьому інтервалі, а на інтервалі $(11; \infty)$ $y' > 0$ і функція зростає. В точці $x = 11$ функція має локальний мінімум: $y(11) = 28$.

7) Дослідимо графік функції на опуклість, угнутість і визначимо точки перегину. Для цього знайдемо:

$$y'' = \frac{(x-8)(x-4) - (x^2 - 8x - 33) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^3} = \frac{2x^2 - 8x - 8x + 32 - 2x^2 + 16x + 66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Очевидно, що на інтервалі $(-\infty; 4)$ $y'' < 0$ і крива опукла, а на інтервалі $(4; \infty)$ $y'' > 0$ і крива угнута. Оскільки при $x = 4$ функція не визначена, то точка перегину відсутня.

8) Графік функції зображено на *рисунку 2.21.1*.

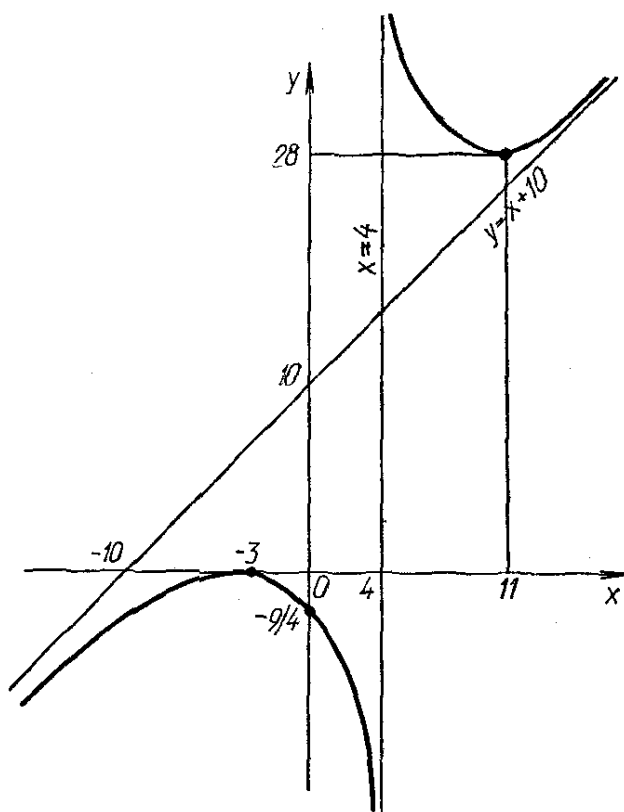


Рисунок 2.21.1

Завдання 22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2\sin x + \cos 2x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Знаходимо критичні точки:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x$$

Якщо $y' = 0$, то $2\cos x - 4\sin x \cos x = 0$, $2\cos x(-2\sin x) = 0$. Якщо $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; якщо ж $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

З усіх знайдених критичних точок тільки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{\pi}{2}$ належать відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Знайдемо значення даної функції при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$:

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1,5,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 - 1 = 1.$$

Отже найбільше значення на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ дана функція досягає в точці

$x = \frac{\pi}{6}$: $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,5$, а найменше значення – в точці $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2}$: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.
2. Грималюк В. П. Вища математика: У 2 ч.: Навч. посіб. / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. — К.: Віпол, 2004. — Ч. 1. — 376 с.2
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К.: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.
4. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн./ Дубовик В. П., Юрик І. І. — К.: А.С.К., 2005. — 648 с.
5. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.
6. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
7. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. <http://www.nbuv.gov.ua/> – сайт «Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського».
3. <http://kpi.ua/> – сайт «Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».
2. – сайт Національний університет «Чернігівська політехніка»