

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет «Чернігівська політехніка»

**Вища математика**  
**Частина II**

методичні вказівки та завдання  
до виконання розрахунково-графічної роботи  
з дисципліни “Вища математика”  
для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано  
на засіданні кафедри АТ та ГМ,  
протокол № 6 від 01.12. 2020р.

Чернігів - 2021

Вища математика Частина II методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей  
./Укл.: В.П. Мурашківська, Л.А. Руновська– Чернігів:2021, - 84с.

**Укладачі:**

Мурашківська Вірв Петрівна, ст. викл.  
Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

**Відповідальний за випуск:** Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

**Рецензент:** Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

## Зміст

Вступ.....	4
Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи .....	6
Розв'язання типового варіанта завдання .....	66
Список рекомендованої літератури.....	84

## Вступ

Курс вищої математики разом із курсами інших загальноосвітніх дисциплін складає основу фундаментальної підготовки сучасних інженерів та економістів. Сучасне життя потребує від майбутніх фахівців оволодіти основними математичними навичками, які вони отримують, вивчаючи курс вищої математики в університеті.

Дані методичні вказівки призначені для студентів заочної форми навчання і містять завдання до індивідуальних розрахунково – графічних робіт з вищої математики за темами: "комплексні числа", "невизначений інтеграл", "визначений інтеграл" та "диференціальні рівняння," які вивчаються в другому семестрі і передбачені робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями. Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, розв'язання задач, самоперевірка, виконання контрольних, розрахунково-графічних робіт.

Метою індивідуальних домашніх завдань, поданих в даному посібнику, є допомога студенту заочного відділення поглибити теоретичні знання, засвоїти основні формули, навчитись розв'язувати ряд простих типів задач та перевірити результати самостійної роботи студента з вивчених тем. Розв'язування поданих завдань, також дозволяє студенту зрозуміти степінь засвоєння їм відповідних розділів курсу, вказує на прогалини, які виникли під час вивчення матеріалу, допомагає сформулювати питання викладачам під час консультацій.

Виконуючи домашню контрольну роботу студент повинен самостійно розв'язати запропоновані викладачем індивідуальні домашні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи або останні дві цифри номера залікової книжки. Розв'язання завдань з поясненнями подається на аркушах формату А4 (запис в яких виконується з одного боку), або у шкільному зошиті. Умову завдань необхідно переписувати повністю без скорочень, після чого надавати розв'язання цього завдання, супроводжуючи його необхідним поясненням і з посиланням на відповідні формули, теореми,

правила тощо. Побудови графіків потрібно виконувати олівцем на тому ж аркуші, де і відповідне розв'язання, або на папері з масштабною сіткою. На титульній сторінці розрахунково-графічної роботи вказують номер варіанту, прізвище та ініціали студента, групу, прізвище та ініціали викладача.

Після перевірки роботи викладачем, якщо є зауваження, студент повинен розв'язати неправильно виконані завдання заново у тому ж зошиті і повторно подати його на перевірку. Після позитивної оцінки викладача робота підлягає захисту. Результат цієї роботи враховується при складанні студентом заліку або іспиту.

Окрім завдань до розрахунково-графічної роботи методичні вказівки містять рекомендовану літературу з відповідних тем курсу вищої математики та розв'язання типового варіанта, що значно допоможе студенту краще орієнтуватися в матеріалі при самостійному вивченні курсу, при виконанні індивідуальних контрольних робіт, тобто оволодіти вузівським курсом вищої математики та успішно скласти іспит в кінці семестру.

## Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи

### Варіант 1

1. Дано числа  $z_1 = -5 - 7i$ ,  $z_2 = 1 + 3i$ ,  $z_3 = -8 - 4i$ . Знайти  $2z_1 - z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$ ;  $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - 27 = 0$ , б)  $z^3 + 8z^2 + 20z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x^5}{x^3} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{3x - 4}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 8x^2}}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{1 - 2x}{3}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{dx}{|2x + 1| \sqrt[3]{|\ln 2x + 1|}}$ ;      6)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx$ ;

7)  $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x} dx$ ;      8)  $\int \sin^2 3x \sin 4x dx$ ;      9)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ ;

10)  $\int \frac{2x - 3}{2x^2 + 9} dx$ ;      11)  $\int \frac{5x - 2}{2x^2 - 5x + 2} dx$ ;      12)  $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}} dx$ ;

13)  $\int \frac{x \cos x}{|\sin x|^3} dx$ ;      14)  $\int \arcsin 5x dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ ;      16)  $\int \frac{7x - 10}{x^3 + 8} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 3}}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{5x^2 - 3}$ ;      2)  $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{2x} dx$ .

3)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (3x + 4) \sin 2x dx$ ;      4)  $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$ .

5)  $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x + 4}} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx$ ;      7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x + \sqrt{e^x + 4}}{e^x + 5} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_4^{\infty} \frac{|x-2| dx}{\sqrt{x^2-4x+1}};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = 3x^2y^3 - 2y\sqrt{x}; \quad \text{б) } z = \ln\left(3x^2 - \frac{y}{x}\right).$$

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 2; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \text{arcctg } 2x/y$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x + y - 3 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$\text{а) } \frac{|\sin|x+y| + \sin|x-y|| dx + dy}{\cos y} = 0; \quad \text{б) } xy' - y = |x+y| \ln\left(\frac{|x+y|}{x}\right).$$

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ ,  $y|_1 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' = \frac{-x}{y}$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1 - y'^2, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

$$\text{а) } y'' + 7y' = 0; \quad \text{б) } y'' - 5y' + 4y = 0; \quad \text{в) } y'' + 16y = 0.$$

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - y' + y = f|x|$ , якщо:

$$\text{а) } f|x| = 7x + 2; \quad \text{б) } f|x| = e^x \cos x; \quad \text{в) } f|x| = 2e^{3x} - 1, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 2.$$

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \text{ctg } x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

## Варіант 2

1. Дано числа  $z_1 = 8 + 3i$ ,  $z_2 = -5 - i$ ,  $z_3 = 7 - 6i$ . Знайти  $z_2 \cdot z_3 - 3z_1$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{3} + i$ ;  $z_2 = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^4 - 2$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + z^2 + 8z = 0$ , б)  $z^4 + 4 = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2x^3 - 4}{\sqrt{x^3}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{4 - 3x}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{5x^2 + 4}$ ;

4)  $\int \sin\left(2 + \frac{3}{2}x\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ ;

6)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx$ ;

7)  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx$ ;

8)  $\int \cos 3x \sin^2 4x dx$ ;

9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ ;

10)  $\int \frac{3x - 2}{3x^2 - 1} dx$ ;

11)  $\int \frac{4x - 1}{2x^2 + 6x + 3} dx$ ;

12)  $\int \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx$ ;

13)  $\int |x + 1| e^{-x} dx$ ;

14)  $\int \arcsin 2x dx$ ;

15)  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x|x + 1|^2} dx$ ;

16)  $\int \frac{4x^2 + 3x + 17}{|x - 1||x^2 + 2x + 5|} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}|x + 3|}$ ;

18)  $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/5} \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$ ;

2)  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/3} |4x + 2| \sin 3x dx$ ;

4)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ .

5)  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$ ;

6)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ ;

7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + 2}{e^{2x} - 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}$ ;

б)  $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{|1 - \sin 3x|^5}}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^3$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

**а)**  $z = 2x^3y - 4x\sqrt{y}$ ;      **б)**  $z = \arccos\left(\left| \frac{y}{x} + 1 \right| \right)$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $xy = z^2 - 1$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; 1; -1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \ln|3x^2 - 2y^2|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + 2xy - 10$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $y = x^2 - 4$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

**а)**  $(1 + e^x)yy' = e^x \sqrt{1 - y^2}$ ;      **б)**  $xy' = y \cos \ln|y/x|$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y|_0 = \frac{2}{3}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy'' = y'$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''^2 = y', \quad y|_0 = 2/3, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

**а)**  $y'' - 6y' + 8y = 0$ ;    **б)**  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ;    **в)**  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 3y' = f(x)$ , якщо:

**а)**  $f(x) = 2x^2 - 5x$ ;    **б)**  $f(x) = e^x \sin x$ ;    **в)**  $f(x) = xe^{3x}$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

### Варіант 3

1. Дано числа  $z_1 = -3 + 2i$ ,  $z_2 = 9 + 4i$ ,  $z_3 = 6i - 6$ . Знайти  $4z_1 + z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$ ;  $z_2 = -\sqrt{12} + 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 2i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 2z^2 + 10z = 0$ , б)  $z^3 - i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{3x+4}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{4-2x}{3}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{\sqrt{\ln^5 |3x+1|} dx}{3x+1}$ ;

6)  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{|\sin x - 4|}^3} dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \sqrt{\operatorname{ctg} 3x}}$ ;

8)  $\int \sin 2x \cos^2 5x dx$ ;

9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 7}}$ ;

10)  $\int \frac{x-1}{5-2x^2} dx$ ;

11)  $\int \frac{x+1}{2x^2 + 6x + 3} dx$ ;

12)  $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2 - x + 7}} dx$ ;

13)  $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$ ;

14)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x|x-1|^2} dx$ ;

16)  $\int \frac{4x+2}{x^4 + 4x^2} dx$ ;

17)  $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$ ;

18)  $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int \frac{dx}{2x^2 + 5}$ ;

2)  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 - 2\cos^2 x}$ .

3)  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} |3x+5| \sin x dx$ ;

4)  $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$ .

5)  $\int_{\frac{7}{3}}^{\frac{7}{2}} \frac{x}{\sqrt{2+3x}} dx$ ;

6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$ ;

7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x + 3}{e^{2x} + 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(1+4x^2)}$ ;

б)  $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = |x+1|^2$  та  $y^2 = x+1$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$ ;      б)  $z = \text{arcctg} |xy^2|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = e^{2x^2+y^2}$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = xy - 2x - y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 4$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$ ;      б)  $|y + \sqrt{xy}| dx = x dy$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$ ,  $y|_2 = 4$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' = y' + x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$2yy'' = y'^2 + 1e^y, \quad y|_0 = 2, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $4y'' - 8y' + 3y = 0$ ;      б)  $y'' - 3y' = 0$ ;      в)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 3y' - 4y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = 3e^{-4x}$ ;      б)  $f(x) = x \sin x$ ;      в)  $f(x) = e^x |x+1|$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 1$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y + y = \frac{e^x}{x^2}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$$

### Варіант 4

1. Дано числа  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = -1 - 5i$ ,  $z_3 = 2i - 4$ . Знайти  $2z_1 - z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ ;  $z_2 = -6 - 6i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in (0, 2\pi)$  знайти  $z_1^5 - 2$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 12z^2 + 38z = 0$ , б)  $z^4 - i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{4x - 2}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{3 + 2x}{5}\right) dx$ ;      5)  $\int x^2 e^{2x^3 - 1} dx$ ;      6)  $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \sqrt{\operatorname{ctg} 5x}}$ ;      8)  $\int \cos 4x \sin^2 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{4x}{\sqrt{2 + 3x^2}} dx$ ;

10)  $\int \frac{2x + 3}{1 - 5x^2} dx$ ;      11)  $\int \frac{x + 1}{3x^2 - 2x - 3} dx$ ;      12)  $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}} dx$ ;

13)  $\int x^2 e^{3x} dx$ ;      14)  $\int x^3 \ln|x - 1| dx$ ;

15)  $\int \frac{3x - x^2 - 2}{x|x + 1|^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{x^2 - 5x + 40}{|x + 2||x^2 - 2x + 10|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x - 1}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{8 + 4\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{\sqrt{3}/7} \frac{dx}{\sqrt{4 + 7x^2}}$ ;      2)  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$ .

3)  $\int_0^1 |x^2 - 5| \cos x dx$ ;      4)  $\int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$ .

5)  $\int_2^7 \frac{\sqrt{x + 2}}{x - 1} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$ ;      7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_{1/2\pi}^{\infty} \frac{16dx}{4x^2 + 4x + 5}$ ;      б)  $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 2x - x^2 + 3$  та  $y = x^2 - 4x + 3$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

**а)**  $z = (x + y)^2 - 2xy^3$ ;      **б)**  $z = \cos \sqrt{x^2 + y^3}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; 2; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \operatorname{ctg} |y^2/x|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 8$ ,  $y = 2x^2$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

**а)**  $3e^x \sin y dx + |1 - e^x| \cos y dy = 0$ ;      **б)**  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x$ ,  $y|_0 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy'' = y' + x^2$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 2 - y, \quad y|_0 = 2, \quad y'|_0 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

**а)**  $y'' + 4y' + 20y = 0$ ;    **б)**  $y'' - 3y' - 10y = 0$ ;    **в)**  $y'' - 16y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 36y = f(x)$ , якщо:

**а)**  $f(x) = 4xe^{-x}$ ; **б)**  $f(x) = x^2 + 2$ ; **в)**  $f(x) = \sin 6x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$$

## Варіант 5

1. Дано числа  $z_1 = -8 - 7i$ ,  $z_2 = 6 + 2i$ ,  $z_3 = 14 - i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_2 + 4z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$ ;  $z_2 = -5 + 5i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi]$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 8i = 0$ , б)  $z^3 + 3z^2 + 3z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[3]{x^2 - 7}}{\sqrt{x}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{5 - 3x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ ;

4)  $\int \cos\left(1 - \frac{3x}{4}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{\sqrt{|\ln^3(2x+1)|}}{2x+1} dx$ ;      6)  $\int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt{\cos 5x}}$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}$ ;      8)  $\int \sin^2 3x \cos x dx$ ;      9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ ;

10)  $\int \frac{2x+3}{5x^2+2} dx$ ;      11)  $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx$ ;      12)  $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$ ;

13)  $\int |x+9| \ln x dx$ ;      14)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^3+1}{x^2|x+1|} dx$ ;      16)  $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8} dx$ ;

17)  $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{3+4x^2}}$ ;      2)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$ .

3)  $\int_0^\pi |4x+2| \cos \frac{x}{2} dx$ ;      4)  $\int_0^{1/5} \arcsin 5x dx$ .

5)  $\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{1+x} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ ;      7)  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x \sqrt{e^x + 1} dx}{e^x - 1}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^\infty \frac{2x+1 dx}{4x^2+4x+5}$ ;      б)  $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = \sqrt{x}/2$ ,  $x = 16$ ,  $2xy = 1$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = |x + y - 4| |x^2 - y|$ ;      б)  $z = \sin \sqrt{x - y^3}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; \pi/2; \pi)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \operatorname{tg} \sqrt{xy^3}$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $y' = e^{2x} / \ln y$ ;      б)  $y = x |y' - \sqrt[3]{e^y}|$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$ ,  $y|_1 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy'' = y' \ln |y'/x|$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1/y^3, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $9y'' + y' = 0$ ;      б)  $y'' - 4y' - 21y = 0$ ;      в)  $y'' + y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = |x^2 - 2|$ ;      б)  $f(x) = 4 \cos x$ ;      в)  $f(x) = xe^{3x}$ ,  $y|_0 = 1$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

## Варіант 6

1. Дано числа  $z_1 = 3 - 5i$ ,  $z_2 = -2 - 4i$ ,  $z_3 = 3i - 1$ . Знайти  $3z_1 + z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 3 - 3i$ ;  $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi]$  знайти  $z_1^6 - 3$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 - 9i = 0$ , б)  $z^3 + 16z^2 + 73z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2x^2 - 5}{\sqrt[4]{x}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{4 - 7x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 9}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{2x-4}{5}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} e^{\arcsin 2x}}$ ;      6)  $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$ ;

7)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x} dx}{\sin^2 3x}$ ;      8)  $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ ;

10)  $\int \frac{x-3}{4x^2+1} dx$ ;      11)  $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx$ ;      12)  $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$ ;

13)  $\int \ln|x^2+8| dx$ ;      14)  $\int \arccos|x-2| dx$ ;

15)  $\int \frac{x^3-3}{|x-1||x^2-1|} dx$ ;      16)  $\int \frac{x^2-13x+40}{|x+1||x^2-4x+13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{3-4x^2}$ ;      2)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$ ;      4)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 2x} dx$ .

5. а)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ;      б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$ ;      в)  $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x |e^x + 3|}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{|x+2| dx}{\sqrt[3]{x^2+4x+1}^4}$ ;      б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 3x}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 32 - x^2$ ,  $y = -4x$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x + y - x^2 y^3$ ;      б)  $z = \operatorname{tg} |x^3 y^4|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $3x^2 y^2 + 2xyz^2 - 2x^3 z + 4y^3 z = 4$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; 1; 2)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \cos |x^2 y - 5|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = \sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}}$ ,  $y = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $3^{x^2+y} dy + x dx = 0$ ;      б)  $y' = y/x - 1$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$ ,  $y|_1 = 4$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy'' + y' = \ln x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - 2y'^2 = 0, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $2y'' + 3y' + y = 0$ ;      б)  $y'' + 4y' = 0$ ;      в)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $4y'' - 5y' + y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = |x + 2| e^x$ ;      б)  $f(x) = \sin 3x$ ;      в)  $f(x) = x^2 + 3x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \operatorname{ctg} x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

### Варіант 7

1. Дано числа  $z_1 = 9 + 7i$ ,  $z_2 = 8i - 3$ ,  $z_3 = i - 1$ . Знайти  $5z_1 - z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -4 - 4i$ ;  $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^9 + i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - 8i = 0$ , б)  $z^3 + \sqrt{3}z^2 + 3z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[5]{x^4} + 4}{\sqrt{x}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{5x-3}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{2x^2+7}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{4-x}{2}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{\sqrt{|\ln^7(3x+1)|}}{3x+1} dx$ ;

6)  $\int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{|1+4x^2| \arctg^3 2x}$ ;

8)  $\int \cos 3x \sin^2 4x dx$ ;

9)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+5x^2}}$ ;

10)  $\int \frac{|x-3| dx}{1-4x^2}$ ;

11)  $\int \frac{xdx}{3x^2+5x+1}$ ;

12)  $\int \frac{|3x+2| dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$ ;

13)  $\int e^{-2x} |x+3| dx$ ;

14)  $\int \arctg \sqrt{3x-1} dx$ ;

15)  $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx$ ;

16)  $\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$ ;

18)  $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$ ;

2)  $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ .

3)  $\int_0^2 |3x+4| \sin 3x dx$ ;

4)  $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ .

5)  $\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x+1} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ;

7)  $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$ .

6. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{|3-x^2| dx}{x^2+4}$ ;

б)  $\int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 3 - x$ ,  $y = 0$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x^2 - 2xy^3 + y^4$ ;      б)  $z = \text{ctg} \sqrt{3x^2 - 2yx}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \sin \sqrt{x^3 y}$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ ,  $x = -3$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $|\cos|x - 2y| + \cos|x + 2y|| y' = \sec x$ ;      б)  $y'x + x + y = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{2}{x}y = x^2$ ,  $y|_1 = -\frac{4}{5}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' \text{tg} x = y' + 1$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = y' + y'^2, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 10y' + 21y = 0$ ;      б)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ;      в)  $y'' + 4y' = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $4y'' + 7y' - 2y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 3e^{-2x}$ ;      б)  $f|x| = |x - 1| \cos 2x$ ;      в)  $f|x| = x^2 + 3$ ,  $y|_0 = 1$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$$

## Варіант 8

1. Дано числа  $z_1 = -2 + 4i$ ,  $z_2 = 3 - 9i$ ,  $z_3 = 18 + 2i$ . Знайти  $5z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 7 + 7i$ ;  $z_2 = -\sqrt{12} - 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 + i = 0$ , б)  $z^3 + 3\sqrt{2}z^2 + 5z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{3\sqrt[3]{x} + 2x}{\sqrt{x}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{3 - 2x}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 2x^2}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{x+5}{4}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x} dx}{\cos^2 2x}$ ;

6)  $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$ ;

7)  $\int x e^{1-4x^2} dx$ ;

8)  $\int \sin 2x \cos^2 3x dx$ ;

9)  $\int \frac{7x}{5x^2 + 1} dx$ ;

10)  $\int \frac{|3x-1| dx}{4-x^2}$ ;

11)  $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4} dx$ ;

12)  $\int \frac{|x-7| dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$ ;

13)  $\int x e^{x+2} dx$ ;

14)  $\int \arcsin|x-1| dx$ ;

15)  $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx$ ;

16)  $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$ ;

18)  $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \sqrt[5]{3-2x} dx$ ;

2)  $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/5} |x^2+3| \sin 5x dx$ ;

4)  $\int_0^1 \frac{\ln|x+1|}{|x+1|^2} dx$ .

5)  $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+3} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ ;

7)  $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^{2x}+1}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx$ ;

б)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = \sqrt{2x^2 - y^5}$ ; б)  $z = \operatorname{ctg} \left( \frac{y^2}{x} \right)$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x + y + z + 2 = xyz$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; -1; -1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arcsin(x - 2y)$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x - y - 1 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 5$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $y' = e^{x^2} x \sqrt{1 + y^2}$ ; б)  $(4x^2 + 3xy + y^2) dx + (4y^2 + 3xy + x^2) dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{y}{x} = 3x$ ,  $y|_1 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 2xy'^2 = 0$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 6y' = 0$ ; б)  $y'' + 10y' + 29y = 0$ ; в)  $y'' - 8y' + 7y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - y' - 6y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = x^2 + 2$ ; б)  $f(x) = \cos x - \sin x$ ; в)  $f(x) = xe^{3x}$ ;  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$$

## Варіант 9

1. Дано числа  $z_1 = 7 - i$ ,  $z_2 = -2 + 8i$ ,  $z_3 = 10 + 4i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_3 - 2z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -1 - i$ ;  $z_2 = -\sqrt{12} + 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^5 + 2i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 4z^2 + 8z = 0$ , б)  $z^3 + i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2x^3 - 3}{\sqrt[5]{x^2}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{5 + 3x}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 3x^2}}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{2x-1}{3}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{\ln^4|3x+1|}{3x+1} dx$ ;

6)  $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$ ;

7)  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx$ ;

8)  $\int \cos 4x \cos^2 3x dx$ ;

9)  $\int \frac{xdx}{4 - 3x^2}$ ;

10)  $\int \frac{|5x-2| dx}{x^2 + 9}$ ;

11)  $\int \frac{2x-1}{2x^2 + 8x - 6} dx$ ;

12)  $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$ ;

13)  $\int x e^{-7x} dx$ ;

14)  $\int x \ln^2 x dx$ ;

15)  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{|x^2 + x| |x + 1|} dx$ ;

16)  $\int \frac{4x-10}{|x+2| |x^2-2x+10|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx$ ;

18)  $\int \frac{2+3\cos x}{1+\cos x} dx$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \sqrt[4]{1+3x} dx$ ;

2)  $\int_0^1 (x^2 + x^2 e^{x^3}) dx$ .

3)  $\int_0^\pi |3x-4| \cos 2x dx$ ;

4)  $\int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}|2x-3| dx$ .

5)  $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4\sin^2 x + 4\sin 2x}$ ;

7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^\infty \frac{4dx}{x|1+\ln^2 x|}$ ;

б)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = x^2$ ,  $y^2 = 4 - x^2$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = xy^4 - 3x^2y + 1$ ;      б)  $z = \ln|\sqrt{xy^3} - 1|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; 1; -1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arccos|4x - y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 2x$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$ ;      б)  $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$ ,  $y|_1 = 3$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $2xy' y'' = y'^2 + 1$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''|_{1+y} = 5y'^2, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 25y = 0$ ;      б)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ;      в)  $y'' + 2y' + 2y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 16y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 3e^{4x}$ ;      б)  $f|x| = 4\sin x$ ;      в)  $f|x| = |4x + 2|e^x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$$

## Варіант 10

1. Дано числа  $z_1 = 6 + 2i$ ,  $z_2 = -1 - 4i$ ,  $z_3 = 3i - 5$ . Знайти  $3z_1 - z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -5 - 5i$ ;  $z_2 = -7\sqrt{3} + 7i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - 4z^2 + 6z = 0$ , б)  $z^4 - 16 = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{5 - 2\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{3 - 5x}$ ;      3)  $\int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7 - 2x^2}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{5 - 4x}{3}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{\sqrt[5]{\arctg x} dx}{1 + x^2}$ ;      6)  $\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}$ ;

7)  $\int \frac{\sqrt{\tg^3 2x}}{\cos^2 2x} dx$ ;      8)  $\int \sin^2 3x \sin x dx$ ;      9)  $\int \frac{3x dx}{\sqrt{4 + 5x^2}}$ ;

10)  $\int \frac{2x + 5}{5x^2 + 1} dx$ ;      11)  $\int \frac{2 - x}{4x^2 + 16x - 12} dx$ ;      12)  $\int \frac{|2x + 4| dx}{\sqrt{3x^2 + x - 5}}$ ;

13)  $\int x^2 e^{3x} dx$ ;      14)  $\int \arcsin 2x dx$ ;

15)  $\int \frac{4x dx}{|x^2 - 1| |x + 1|}$ ;      16)  $\int \frac{|x^2 + 23| dx}{|x + 1| |x^2 + 6x + 13|}$ ;

17)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x - 7}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{5 - 4x^2}$ ;      2)  $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/2} |2x + 3| \sin x dx$ ;      4)  $\int_1^e |5x - 8| \ln x dx$ .

5)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{|x+1|^3}}$ ;      6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{2 \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$ ;      7)  $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + 3} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} x \sin x dx$ ;      б)  $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x + 3}}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 4x + x^2$ ,  $y = x + 4$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 2x^3y - \frac{x}{y^2}$ ;      б)  $z = \ln|\sqrt{xy} - y^2|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $e^z - xyz - x + 1 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; 1; 0)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arctg|5x + 2y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x$ ;      б)  $y dx + |2\sqrt{xy} - x| dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ ,  $y|_1 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x|x-1|$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''|2y+3| - 2y'^2 = 0, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 3.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 3y' = 0$ ;      б)  $y'' - 7y' - 8y = 0$ ;      в)  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 4y' = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = xe^{4x}$ ;      б)  $f|x| = 3\cos 4x$ ;      в)  $f|x| = 2x^2 + 3$ ,  $y|_0 = 1$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = 1/\sin x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

## Варіант 11

1. Дано числа  $z_1 = 6 - 8i$ ,  $z_2 = 9 + 7i$ ,  $z_3 = 3i - 3$ . Знайти  $4z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$ ;  $z_2 = -4 - 4i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 64 = 0$ , б)  $z^3 + 2z^2 + 4z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt{x^5 - 3x^4}}{x^3} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{5 + 4x}$ ;      3)  $\int \frac{\sqrt{14} dx}{2x^2 - 7}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{2x}{3} + 1\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{dx}{|2x + 5| \ln^3 |2x + 5|}$ ;      6)  $\int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$ ;

7)  $\int \frac{e^{2\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$ ;      8)  $\int \cos^2 3x \sin 4x dx$ ;      9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ ;

10)  $\int \frac{|1 - 2x| dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ ;      11)  $\int \frac{2x - 1}{3x^2 - 6x - 9} dx$ ;      12)  $\int \frac{|7x - 2| dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$ ;

13)  $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$ ;      14)  $\int \arcsin |x + 7| dx$ ;

15)  $\int \frac{dx}{x^3 + x^2}$ ;      16)  $\int \frac{2x^2 + 7x + 7}{|x - 1| |x^2 + 2x + 5|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x - 4}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{|3 - 4x|^5}}$ ;      2)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$ .

3)  $\int_0^2 |3x + 4| \cos 3x dx$ ;      4)  $\int_1^e x \ln^2 x dx$ ;

5)  $\int_0^{\ln^2 2} \frac{\sqrt{x + 2}}{x + 3} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$ ;      7)  $\int_{\ln 3}^0 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7 dx}{|x^2 - 4x| \ln 5}$ ;      б)  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{|x^2 - 1|^3} \ln 2}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = \sqrt{x}/2$ ,  $y = 5 - x$ ,  $x = 0$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$ ;      б)  $z = \arctg|x^2/y^3|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; -1; 2)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arctg|2x - y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = xy - 3x - 2y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 4$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $1 + |1 + xy'|e^y = 0$ ;      б)  $|x - y| y dx - x^2 dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$ ,  $y|_1 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$4y''^2 = 1 + y'^2, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 3y' - 4y = 0$ ;      б)  $y'' + 6y' + 13y = 0$ ;      в)  $y'' + 2y' = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 2y' + 2y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = xe^{4x}$ ;      б)  $f|x| = 2\sin x$ ;      в)  $f|x| = e^x \sin x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y = 1/\sin 2x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$$

## Варіант 12

1. Дано числа  $z_1 = 1 + 3i$ ,  $z_2 = 4 - 9i$ ,  $z_3 = 2i - 4$ . Знайти  $5z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 1 - i$ ;  $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^6 + 3$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 - 4i = 0$ , б)  $z^3 - 2z^2 + 10z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

$$1) \int \frac{2 - 3\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^5}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{6 - 3x}; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x^2}};$$

$$4) \int \sin\left(3 - \frac{4x}{5}\right) dx; \quad 5) \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx; \quad 6) \int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt{\sin^3 5x}};$$

$$7) \int \frac{dx}{e^{\operatorname{ctg} x} \sin^2 x}; \quad 8) \int \sin^2 2x \sin 5x dx; \quad 9) \int \frac{3x dx}{\sqrt{1 - 2x^2}};$$

$$10) \int \frac{2x - 4}{x^2 + 16} dx; \quad 11) \int \frac{2x - 1}{3 + x - 2x^2} dx; \quad 12) \int \frac{|x - 8| dx}{\sqrt{4x^2 + x - 5}};$$

$$13) \int |3x - 2| e^{-x/3} dx; \quad 14) \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$15) \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx; \quad 16) \int \frac{19x - x^2 - 34}{|x + 1| |x^2 - 4x + 13|} dx;$$

$$17) \int \frac{\sqrt{x + 4}}{x} dx; \quad 18) \int \frac{7 + 6\sin x - 5\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

5 Обчислити визначені інтеграли.

$$1) \int_2^3 \frac{dx}{8x^2 - 9}; \quad 2) \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx.$$

$$3) \int_0^{\pi/2} |5x + 8| \sin 3x dx; \quad 4) \int_4^5 \arccos |x - 4| dx.$$

$$5) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 + \sqrt{\sin x}} dx; \quad 6) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{7 \cos^2 x + 16 \sin^2 x}; \quad 7) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x + 2}}{e^x + 3} dx.$$

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$а) \int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{|1 + 9x^2| \operatorname{arctg}^2 3x}; \quad б) \int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 2 - 2x^2$ ,  $y = -1 - x$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x^2 - 2y^3 + 5xy$ ;      б)  $z = \cos|x - \sqrt{xy^3}|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; -2; 2)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \ln|4x^2 - 5y^3|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + xy - 2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 4x^2 - 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $yy' \operatorname{ctg} x + y^2 = 2$ ;      б)  $xy + y^2 = |2x^2 + xy|y'$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + 2xy = -2x^3$ ,  $y|_1 = e^{-1}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$2y'^2 = |y - 1|y'', \quad y|_0 = 2, \quad y'|_0 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 25y = 0$ ;    б)  $y'' - 10y' + 16y = 0$ ;    в)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $5y'' - 6y' + y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = x^2 + 3$ ;    б)  $f|x| = \cos x - \sin x$ ;    в)  $f|x| = x^2 e^x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$$

### Варіант 13

1. Дано числа  $z_1 = -3 - 5i$ ,  $z_2 = 8 + 8i$ ,  $z_3 = 4 - i$ . Знайти  $3z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ;  $z_2 = -2\sqrt{6} - \sqrt{8}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 2i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - 27i = 0$ , б)  $z^3 - 3z^2 + 4z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{x^3 - \sqrt[4]{x^3}}{3x^2} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{6 + 5x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{3x^2 - 2}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{2-3x}{4}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln|3x+4|}}{3x+4} dx$ ;      6)  $\int \frac{\sin 5x dx}{\cos^4 5x}$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2} \sqrt[4]{\arctg 2x}}$ ;      8)  $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$ ;

10)  $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}} dx$ ;      11)  $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1} dx$ ;      12)  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx$ ;

13)  $\int |x-1| \ln x dx$ ;      14)  $\int \arcsin|x+4| dx$ ;

15)  $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx$ ;      16)  $\int \frac{4x^2+38}{|x+2| |x^2-2x+10|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{2+3x^2}$ ;      2)  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ .

3)  $\int_0^{\pi/4} |4x+6| \cos 4x dx$ ;      4)  $\int_0^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$ .

5)  $\int_2^5 \frac{x^2}{|x-1|\sqrt{x-1}} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos^2 x + 2}$ ;      7)  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 3}{e^{2x} + 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2} \sqrt{\pi \cdot \arctg|x/2|}}$ ;      б)  $\int_0^3 \frac{x^3 \sqrt{9} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $x = |y - 2|^3$  та  $x = 4y - 8$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = \left( \left| \frac{x+y}{x} \right| + x^2 y^3 \right)$ ;      б)  $z = \sin \left( \frac{1}{|x-2y|} \right)$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 2; 0)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = e^{\sqrt{x}+2y}$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = xy|4 - x - y|$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 6 - x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\frac{e^{-x^2} dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$ ;      б)  $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{xy}{2|1-x^2|} = \frac{x}{2}$ ,  $y|_0 = \frac{2}{3}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 4y' = 2x^2$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$1 + y'^2 = yy', \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 3y' - 18y = 0$ ;      б)  $y'' - 6y' = 0$ ;      в)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = x^2 - 2x$ ;      б)  $f(x) = -3\cos 2x$ ;      в)  $f(x) = e^{-2x} x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$$

## Варіант 14

1. Дано числа  $z_1 = 6 - 7i$ ,  $z_2 = -4 - 3i$ ,  $z_3 = 1 + 7i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_3 - 2z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -3 - 3i$ ;  $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^7 + 4i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 - 1 = 0$ , б)  $z^3 + 3\sqrt{2}z^2 + 6z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{1 - 7x}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 2x^2}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{3 - 4x}{2}\right) dx$ ;

5)  $\int e^{1 - 2\sin x} \cos x dx$ ;

6)  $\int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$ ;

7)  $\int \frac{\arctg^4 5x dx}{1 + 25x^2}$ ;

8)  $\int \sin^2 3x \cos 4x dx$ ;

9)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ ;

10)  $\int \frac{|2x - 1| dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$ ;

11)  $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x - 2} dx$ ;

12)  $\int \frac{|x - 6| dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$ ;

13)  $\int |x - 6| e^{2x} dx$ ;

14)  $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} dx$ ;

16)  $\int \frac{8}{|x + 1| |x^2 + 6x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x + 10} dx$ ;

18)  $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_3^8 \sqrt{3x + 1} dx$ ;

2)  $\int_0^{1/2} \frac{2x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ .

3)  $\int_0^2 x^2 \cos|x + 9| dx$ ;

4)  $\int_{1/2}^1 \arcsin|1 - x| dx$ .

5)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x + 1}}{x - 3} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$ ;

7)  $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{|x^2 + 2x| \ln 3}$ ;

б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $x = y^2 + 1$ ,  $x + y = 3$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = |x - y|^2 + 2y^2x^3$ ;      б)  $z = \text{tg} \left| \frac{2x - y^2}{x} \right|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 + 3xy - yz - 4x - 3y - z = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; -1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arcsin(4x + y)$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 2$ ,  $y = -1$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $e^x \sin y dx + \text{tg} y dy = 0$ ;      б)  $|2\sqrt{xy} - y| dx + x dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + xy = -x^3$ ,  $y|_0 = 3$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy'' - y' = 2x^2 e^x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' + yy'^3 = 0, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 6y' + 13y = 0$ ;      б)  $y'' - 2y' - 15y = 0$ ;      в)  $y'' - 8y' = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 2y' - 15y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = 4x$ ;      б)  $f(x) = x \sin 5x$ ;      в)  $f(x) = |2x + 8| e^x$ ,  $y|_0 = 1$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$$

## Варіант 15

1. Дано числа  $z_1 = -5 - 2i$ ,  $z_2 = 6 + 8i$ ,  $z_3 = 5i - 1$ . Знайти  $2z_1 - z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -3 + 3i$ ;  $z_2 = 3 - \sqrt{27}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 8 = 0$ , б)  $z^3 + 6z^2 + 10z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{1+6x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{2x+1}{3}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^3|4x+3|}}{4x+3} dx$ ;      6)  $\int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$ ;

7)  $\int x^3 e^{3x^4+2} dx$ ;      8)  $\int \cos 5x \cos^2 3x dx$ ;      9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5}}$ ;

10)  $\int \frac{|3x+4| dx}{5-2x^2}$ ;      11)  $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4} dx$ ;      12)  $\int \frac{|2x+3| dx}{\sqrt{2x^2-x+6}}$ ;

13)  $\int |x+3| e^{-x} dx$ ;      14)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ ;

15)  $\int \frac{x^3 - 4x + 5}{|x^2 - 1| |x - 1|} dx$ ;      16)  $\int \frac{2x^2 + 4x + 20}{|x + 1| |x^2 - 4x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{1}{\sqrt{x} |2x-1|} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_{1/2\sqrt{5-4x^2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ ;      2)  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/7} |2x+1| \cos 7x dx$ ;      4)  $\int_1^{\sqrt{3}} \arctg |1/x| dx$ .

5)  $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$ ;      7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx$ ;      б)  $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $x = 4 - y^2$ ,  $x - y + 2 = 0$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x^2y^3 + |x - y|^3$ ;      б)  $z = \text{ctg} \sqrt{x/|x - y|}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; 1; -1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arccos|x - 5y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 4|x - y| - x^2 - y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x - 2y = 4$ ,  $x = 0$ ,  $x + 2y = 4$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $|1 + e^{3y}| x dx = e^{3y} \sqrt{2x^2 + 1} dy$ ;      б)  $xy' + y |\ln|y/x| - 1| = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x|x+1|^2$ ,  $y|0| = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $x|y'' + 1| + y' = 0$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - y'^2 = 0, \quad y|0| = 1, \quad y'|0| = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 2y' + y = 0$ ;      б)  $y'' + 6y' + 25y = 0$ ;      в)  $y'' - 4y' = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 3y' = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = x^3 - 4x$ ;      б)  $f|x| = e^{3x} \cos x$ ;      в)  $f|x| = x \sin x$ ,  $y|0| = 0$ ,  $y'|0| = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

## Варіант 16

1. Дано числа  $z_1 = 2 + 5i$ ,  $z_2 = -6 + i$ ,  $z_3 = 2 - 4i$ . Знайти  $2z_1 - z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ ;  $z_2 = i - \sqrt{3}$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 2$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - z^2 + 2z = 0$ , б)  $z^3 + 27 = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{3 - 2x}$ ;      3)  $\int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{1+x}{2}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{dx}{|2x+1| \sqrt[4]{|\ln|2x+1|}}$ ;      6)  $\int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$ ;

7)  $\int \frac{\arcsin^3 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ ;      8)  $\int \cos^2 2x \cos 3x dx$ ;      9)  $\int \frac{x dx}{7x^2 - 4}$ ;

10)  $\int \frac{2x-3}{4+3x^2} dx$ ;      11)  $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx$ ;      12)  $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$ ;

13)  $\int |x+1| e^{2x} dx$ ;      14)  $\int \arctg \sqrt{6x-1} dx$ ;

15)  $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{3x+13}{x|x^2+2x+5|} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{2x+3}}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$ ;      2)  $\int_0^{\sqrt{8}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/4} 3x \cos 4x dx$ ;      4)  $\int_2^3 x \ln|x-1| dx$ .

5)  $\int \frac{29 \sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x^2}} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/6} \frac{2dx}{3\sin 2x - 5\cos 2x}$ ;      7)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$ ;      б)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = |x - 2|^3$  та  $y = 4x - 8$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 2x^3y - 4xy^5$ ;      б)  $z = \ln|y^2 - e^{-x}|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; 1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \operatorname{ctg}|x + 1/y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 3x + y - xy$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = x$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $|1 + x| e^{x+3y} dy = x dx$ ;      б)  $|y - xy'| \cos|y/x| = x$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x} = x^2$ ,  $y|1| = 0$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $|1 - x^2| y'' - xy' = 2$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = y' e^y, \quad y|0| = 0, \quad y'|0| = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 4y = 0$ ;    б)  $y'' - 10y' + 25y = 0$ ;    в)  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + y' + y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 2x - 1$ ;    б)  $f|x| = 2\sin x$ ;    в)  $f|x| = 2e^{-x}$ ,  $y|0| = 0$ ,  $y'|0| = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

### Варіант 17

1. Дано числа  $z_1 = 4i - 2$ ,  $z_2 = 3 + 6i$ ,  $z_3 = 1 - 8i$ . Знайти  $5z_1 + z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ;  $z_2 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^6 - 1$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - \sqrt{3}z^2 + 7z = 0$ , б)  $z^4 + 9i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^3}{x^2} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{3x + 9}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 3}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{3 + 2x}{4}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{x}{e^{3x^2 - 1}} dx$ ;

6)  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$ ;

7)  $\int \frac{\arccos^7 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$ ;

8)  $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$ ;

9)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{5 + 3x^2}}$ ;

10)  $\int \frac{1 - 2x}{\sqrt{5 - 4x^2}} dx$ ;

11)  $\int \frac{x + 6}{3x^2 - 8x - 3} dx$ ;

12)  $\int \frac{x - 3}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1}} dx$ ;

13)  $\int |x - 2| e^{5x - 1} dx$ ;

14)  $\int |x + 1| \ln^2 x dx$ ;

15)  $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx$ ;

16)  $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$ ;

17)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{x + 3}}$ ;

18)  $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 2\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{4 + 3x^2}$ ;

2)  $\int_0^1 \frac{12x^5}{\sqrt{x^6 + 1}} dx$ .

3)  $\int_0^\pi |4x + 3| \cos 3x dx$ ;

4)  $\int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$ .

5)  $\int_0^4 \frac{dx}{3x + \sqrt{2x + 1}}$ ;

6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x}$ ;

7)  $\int_1^{\ln 2} \frac{dx}{e^x |3 + e^x|}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^\infty \frac{16x dx}{16x^4 - 1}$ ;

б)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 1 - x^2$  та  $y = 2x - 2$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

**а)**  $z = x^2y - 3y \cdot \sin x$ ;      **б)**  $z = \arcsin \sqrt{xy^3}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$ , яка задана неявно в точці  $M_0(-1; 0; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \sin \left( x + \sqrt{y} \right)$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = xy - x - 2y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

**а)**  $y' \cdot \sin x = y \ln y$ ;      **б)**  $\left( y^2 - 3x^2 \right) dy + 2xy dx = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2 \sin x$ ,  $y \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $2xy' y'' = y'^2 - 1$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'^2 + 2yy'' = 0, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

**а)**  $y'' - y' - 2y = 0$ ;    **б)**  $y'' + 9y = 0$ ;    **в)**  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 2y' + 5y = f(x)$ , якщо:

**а)**  $f(x) = 4x + 3$ ;    **б)**  $f(x) = 3e^{2x}$ ;    **в)**  $f(x) = e^{-x} \cdot \cos 2x$ ,  $y|_0 = 2$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

## Варіант 18

1. Дано числа  $z_1 = -9 - i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = -6 - 3i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_3 + 4z_2$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -i + 1$ ;  $z_2 = -3 - \sqrt{3}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^5 + 2i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + \sqrt{2}z^2 + 4z = 0$ , б)  $z^3 + 27i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2\sqrt[5]{x} - x^2}{\sqrt[4]{x}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{2 - 3x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 3}$ ;

4)  $\int \cos|3 - 5x| dx$ ;      5)  $\int \frac{dx}{|1 - 2x|\sqrt[3]{\ln^2|1 - 2x|}}$ ;      6)  $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} x dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{|1 + 4x^2|\sqrt{\arctg 2x}}$ ;      8)  $\int \cos^2 2x \cos 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ ;

10)  $\int \frac{2x + 1}{5x^2 + 1} dx$ ;      11)  $\int \frac{2x - 1}{3x^2 - 9x + 6} dx$ ;      12)  $\int \frac{x - 1}{\sqrt{3x^2 - x + 5}} dx$ ;

13)  $\int x^2 e^{-x} dx$ ;      14)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ;

15)  $\int \frac{3x^2 + 1}{|x - 1||x^2 - 1|} dx$ ;      16)  $\int \frac{12 - 6x}{|x + 1||x^2 - 4x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x - 3}}$ ;      18)  $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{2 + \cos x} dx$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$ ;      2)  $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 + 1} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/4} |3x - 1| \cos 4x dx$ ;      4)  $\int_0^1 \frac{\arcsin|x/2|}{\sqrt{2 - x}} dx$ .

5)  $\int_0^5 \frac{dx}{3x + \sqrt{3x + 1}}$ ;      6)  $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{2\sin^2 x - \cos^2 x}$ ;      7)  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 2} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$ ;      б)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{|3 - x|^5}}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 4 - x^2$  та  $y = x^2 - 2x$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = x^3 y^4 - x \cos y$ ;      б)  $z = \arctg|x + \sqrt{y}|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $3x - 2y + z = xz + 5$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; 1; -1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \tg|x/y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $xy' = |2x - 1| \cdot \ctg y$ ;      б)  $|x + 2y| dx - xdy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $y|_0 = 0$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' + y'^2 = 0, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 4y' = 0$ ;    б)  $y'' - 4y' + 13y = 0$ ;    в)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $2y'' + y' - y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 4x + 1$ ; б)  $f|x| = x \sin x$ ; в)  $f|x| = |x^2 - 5| e^{-x}$ ,  $y|_0 = 1$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

## Варіант 19

1. Дано числа  $z_1 = 6 + 2i$ ,  $z_2 = -4 + 5i$ ,  $z_3 = 7 + 8i$ . Знайти  $3z_1 + z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ;  $z_2 = -\sqrt{12} - 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 3i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 2z^2 + 3z = 0$ , б)  $z^4 + 16i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^6}}{x} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{1-4x}$ ;      3)  $\int \frac{2dx}{9x^2-3}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{2-x}{3}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{x^4 dx}{e^{x^5+1}}$ ;      6)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$ ;

7)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 3x} dx$ ;      8)  $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-4}}$ ;

10)  $\int \frac{x+3}{3x^2+4} dx$ ;      11)  $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$ ;      12)  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$ ;

13)  $\int |x+1| e^{-4x} dx$ ;      14)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$ ;

15)  $\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{2x^2+2x+20}{|x-1||x^2+2x+5|} dx$ ;

17)  $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/4} \frac{dx}{1-8x^2}$ ;      2)  $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$ .

3)  $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ ;      4)  $\int_2^3 x^2 \ln|x-1| dx$ .

5)  $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x} dx$ ;      7)  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{|e^x-1| dx}{\sqrt{e^x+1}}$

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4-1}} dx$ ;      б)  $\int_0^{1/3} \frac{e^{3-1/x}}{x^2} dx$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій та  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^3$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = \sqrt{xy} - 3xy^2$ ;      б)  $z = \cos|x^3 - 2xy|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $e^z + x + 2y + z = 4$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 1; 0)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \operatorname{tg}|xy^2|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 5x^2 - 3xy + y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $(2x^2 + 1) \operatorname{tg} y dy + x^3 \cos^2 y dx = 0$ ;      б)  $|x - y| dx + |x + y| dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' + 2yy'^3 = 0, \quad y|_0 = 2, \quad y'|_0 = \frac{1}{3}.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ;      б)  $y'' + 3y' = 0$ ;      в)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $2y'' - 9y' + 4y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = -2e^{4x}$ ;      б)  $f|x| = e^x \cos 4x$ ;      в)  $f|x| = 2x^2 - x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих:

$$y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$$

## Варіант 20

1. Дано числа  $z_1 = -2 - i$ ,  $z_2 = -8 + 3i$ ,  $z_3 = 1 + 11i$ . Знайти  $2z_3 - z_1 \cdot z_2$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ ;  $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in (0, 2\pi)$  знайти  $z_1^9 + 3$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - \sqrt{3}z^2 + 3z = 0$ , б)  $z^3 + 27 = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5}{x^2} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{2 + 3x}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 9x^2}}$ ;

4)  $\int \cos|3 + 2x| dx$ ;

5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2|1 - 2x|} dx}{2x - 1}$ ;

6)  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$ ;

8)  $\int \sin^2 2x \sin 3x dx$ ;

9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + 5x^2}}$ ;

10)  $\int \frac{3x - 2}{2x^2 + 7} dx$ ;

11)  $\int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx$ ;

12)  $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 9}} dx$

;

13)  $\int 3x^2 e^{1-2x} dx$ ;

14)  $\int \ln|4x^2 + 1| dx$ ;

15)  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx$ ;

16)  $\int \frac{x^2 + 3x - 6}{|x + 1| |x^2 + 6x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x + 1}}$ ;

18)  $\int \frac{dx}{5 \cos x + 10 \sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{3 - 2x^2}$ ;

2)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/3} |5x + 2| \cos 2x dx$ ;

4)  $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$ .

5)  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt[3]{x + 1}} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$ ;

7)  $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} + 1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{|x^2 + 4|}^3};$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln|3x-1| dx}{3x-1}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y^2 = x + 1$ ,  $y^2 = 9 - x$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = 5xy^4 + 2x^2y^7; \quad \text{б) } z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}.$$

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 1; -1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \sin|x^2 - y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x - y + 1 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$\text{а) } (1 + e^x) y dy - e^y dx = 0; \quad \text{б) } (y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0.$$

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$ ,  $y|_{-1} = \frac{3}{2}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' x \ln x = y'$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, \quad y|_1 = \frac{\pi}{2}, \quad y'|_1 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

$$\text{а) } y'' - 2y' + 10y = 0; \quad \text{б) } y'' + y' - 2y = 0; \quad \text{в) } y'' - 2y' = 0.$$

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 49y = f|x|$ , якщо:

$$\text{а) } f|x| = x^2 + 4x; \quad \text{б) } f|x| = 3 \sin 7x; \quad \text{в) } f|x| = x e^{3x}, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$$

## Варіант 21

1. Дано числа  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 4 - 7i$ ,  $z_3 = -8 - 3i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_2 + 3z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -3 - 3i$ ;  $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 2i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 4z^2 + 16z = 0$ , б)  $z^4 - 16i = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{2 - 5x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{7x^2 - 4}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{3 - 5x}{2}\right) dx$ ;      5)  $\int e^{\sin x + 1} \cos x dx$ ;      6)  $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2} \arcsin 5x}$ ;      8)  $\int \cos^2 3x \sin 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{4 - 5x^2}}$ ;

10)  $\int \frac{5 - x}{3x^2 + 1} dx$ ;      11)  $\int \frac{3x - 2}{8 - 2x - x^2} dx$ ;      12)  $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx$ ;

13)  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ ;      14)  $\int \operatorname{arctg} 3x dx$ ;

15)  $\int \frac{x + 2}{x^3 + x^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$ ;

17)  $\int \frac{x + 1}{x + \sqrt{x + 2}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x - \sin x}$ .

5 Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$ ;      2)  $\int_{3/4}^{4/3} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$ .

3)  $\int_0^{\pi/4} |3x - 2| \cos 4x dx$ ;      4)  $\int_1^2 |y - 1| \ln y dy$ .

5)  $\int_1^5 \frac{\sqrt{2x - 1}}{2x + 5} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x}$ ;      7)  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}$ ;      б)  $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = y \cdot \operatorname{tg} x + y\sqrt{x}$ ;      б)  $z = \cos|\sqrt{x} - y^2|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $z^3 + 3xyz + 3y = 7$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \operatorname{arctg}|x^3 + \sqrt{y}|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x + y - 1 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $|y^2 + 3| dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$ ;      б)  $y^2 + x^2 y' = xy y'$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x+1} = e^x |x+1|$ ,  $y|0| = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy'' - y' = x^2 e^x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$2yy'' = y'^2, \quad y|0| = 1, \quad y'|0| = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 4y = 0$ ;    б)  $y'' + 2y' + 17y = 0$ ;    в)  $y'' - y' - 12y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $3y'' + 10y' + 3y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = e^{-3x}$ ;    б)  $f|x| = 2\cos 3x$ ;    в)  $f|x| = 2x^2 + 5$ ,  $y|0| = 0$ ,  $y'|0| = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$

## Варіант 22

1. Дано числа  $z_1 = -1 - 9i$ ,  $z_2 = 6 + 2i$ ,  $z_3 = 12 - i$ . Знайти  $5z_1 + z_2 \cdot z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$ ;  $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^6 - 1$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - \sqrt{5}z^2 + 5z = 0$ , б)  $z^3 - 1 = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt{x^3 - 7x^5}}{x^2} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{3x - 2}$ ;

3)  $\int \frac{3dx}{7x^2 - 4}$ ;

4)  $\int \cos\left(4 + \frac{x}{2}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln|3x+1|} dx}{3x+1}$ ;

6)  $\int \frac{\cos x}{\sin x + 2} dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\cos^2 2x \sqrt{\operatorname{tg}^3 2x}}$ ;

8)  $\int \sin 2x \cos^2 7x dx$ ;

9)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+4x^2}}$ ;

10)  $\int \frac{5+x}{3x^2+1} dx$ ;

11)  $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx$ ;

12)  $\int \frac{5x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$ ;

13)  $\int |x-4| \ln x dx$ ;

14)  $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx$ ;

15)  $\int \frac{4x^2}{|x^2-2x+1| |x+1|} dx$ ;

16)  $\int \frac{36x}{|x+2| |x^2-2x+10|} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{|x+1| \sqrt{x+4}}$ ;

18)  $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$ ;

2)  $\int_0^1 x e^{-2x^2} dx$ .

3)  $\int_0^{\pi/4} |3x-2| \cos 8x dx$ ;

4)  $\int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx$ .

5)  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} dx$ ;

6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4\sin^2 x - \sin 2x}$ ;

7)  $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{16+x^2}^5}$ ;

б)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{|1-x| \ln^2 |1-x|}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x^2y + 2y^3x^4$ ;      б)  $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3} + x$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$ , яка задана неявно в точці  $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arcsin|x - y^3|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x + y + 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\sin y \cos^2 x dy = \cos y \sin x dx$ ;      б)  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left|\frac{\pi}{2}\right| = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' x \ln x = 2y'$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - y'^2 = y^4, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + y' - 6y = 0$ ;      б)  $y'' + 9y' = 0$ ;      в)  $y'' - 4y' + 20y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 3y' + 2y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = xe^{2x}$ ;      б)  $f|x| = 3\cos 4x$ ;      в)  $f|x| = x + 2e^x$ ;  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 1$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

### Варіант 23

1. Дано числа  $z_1 = 3 + 6i$ ,  $z_2 = 9 - 2i$ ,  $z_3 = -2 - 7i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_2 + 2z_3$ ;  $z_1/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 4 - 4i$ ;  $z_2 = -\sqrt{3} - i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^7 + 2i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - \sqrt{2}z^2 + 5z = 0$ , б)  $z^4 + 16 = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2x^4}{x} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{2x + 3}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}$ ;

4)  $\int \sin|4 + 5x| dx$ ;      5)  $\int \frac{x dx}{e^{1-2x^2}}$ ;      6)  $\int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{|1 + 9x^2| \arctg^5 3x}$ ;      8)  $\int \cos^2 3x \cos 8x dx$ ;      9)  $\int \frac{4x dx}{2 - 5x^2}$ ;

10)  $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{7 - 3x^2}} dx$ ;      11)  $\int \frac{x + 4}{2x^2 - 7x + 1} dx$ ;      12)  $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx$ ;

13)  $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$ ;      14)  $\int \arctg 4x dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx$ ;      16)  $\int \frac{9x - 9}{|x + 1| |x^2 - 4x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{\sqrt{x + 2} dx}{x - 3}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ ;      2)  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 4}} dx$ .

3)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$ ;      4)  $\int_0^1 e^{-4x} x^2 dx$ .

5)  $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} - 1}{2 + \sqrt{x}} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{5 \cos 2x + 2 \sin^2 x}$ ;      7)  $\int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi |x^2 + 4x + 5|}$ ;      б)  $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln |2 - 3x|} dx}{2 - 3x}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $xy = 6$ ,  $x + y = 7$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$ ;      б)  $z = xe^{-x^2+y^3}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; \pi/2; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arccos|2x + y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $y' = |2y^2 + y| \operatorname{tg} x$ ;      б)  $xy' = y - xe^{y/x}$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ ,  $y|\pi| = \frac{1}{\pi}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $x^2y'' + xy' = 1$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = -\frac{1}{2y^3}, \quad y|0| = \frac{1}{2}, \quad y'|0| = \sqrt{2}.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' - 49y = 0$ ;    б)  $y'' - 4y' + 5y = 0$ ;    в)  $y'' + 2y' - 3y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 4y' + 4y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = \sin 2x + 2e^x$ ; б)  $f|x| = x^2 - 4$ ; в)  $f|x| = x^2 e^{2x}$ ,  $y|0| = 0$ ,  $y'|0| = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$$

## Варіант 24

1. Дано числа  $z_1 = 8 + 2i$ ,  $z_2 = -1 + 3i$ ,  $z_3 = 4 - 3i$ . Знайти  $5z_1 - z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 4 - 4i$ ;  $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 5$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 + 9 = 0$ , б)  $z^3 - z^2 + z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{3\sqrt{x^7} - 4}{x^3} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{2 + 7x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{3 - 4x}{7}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$ ;      6)  $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$ ;

7)  $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ;      8)  $\int \cos 2x \sin^2 5x dx$ ;      9)  $\int \frac{2x dx}{3 + 5x^2}$ ;

10)  $\int \frac{3x - 3}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx$ ;      11)  $\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 2x - 7} dx$ ;      12)  $\int \frac{|x - 9| dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$ ;

13)  $\int x^3 e^{-x^2} dx$ ;      14)  $\int \arccos x dx$ ;

15)  $\int \frac{3x^2 + 2}{x|x + 1|^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{5x + 13}{|x + 1||x^2 + 6x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x - 2}}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{6 - 5x^2}$ ;      2)  $\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$ .

3)  $\int_0^2 |3x + 2| \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ ;      4)  $\int_{-1}^0 x \ln|1 - x| dx$ .

5)  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$ ;      7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_{-\infty}^0 \left( \frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx$ ;      б)  $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $x = 4 - y^2$  та  $x = y^2 - 2y$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = y^2 - 3xy - x^4y^3$ ;      б)  $z = e^{-\sqrt{x^2+y^3}}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$ , яка задана неявно в точці  $M_0(4; 3; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \sin \sqrt{x/y}$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = x + 1$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $|\sin(2x + y) - \sin(2x - y)| dx = dy / \sin y$ ;      б)  $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ,  $y|_0 = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 4y' = \cos 2x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 10y' = 0$ ;      б)  $y'' - 6y' + 8y = 0$ ;      в)  $4y'' + 4y' + y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 7y' + 12y = f(x)$ , якщо:

а)  $f(x) = 2e^x$ ;      б)  $f(x) = 3x \sin 2x$ ;      в)  $f(x) = xe^{3x}$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

## Варіант 25

1. Дано числа  $z_1 = 3 - 5i$ ,  $z_2 = 2 + 7i$ ,  $z_3 = -3 - 6i$ . Знайти  $z_2 \cdot z_3 - 3z_1$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{12} - 2i$ ;  $z_2 = -2 + 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^9 - 3i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - 8 = 0$ , б)  $z^3 + 3z^2 + 9z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt{x} - 3x^2}{2\sqrt{x^3}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{7 - 3x}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 8x^2}}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{2 - 3x}{4}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{dx}{|4x + 3| \ln^4 |4x + 3|}$ ;

6)  $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$ ;

7)  $\int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ ;

8)  $\int \cos^2 4x \sin 3x dx$ ;

9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ ;

10)  $\int \frac{|5x + 2| dx}{\sqrt{2x^2 + 9}}$ ;

11)  $\int \frac{x - 3}{4x^2 + 2x - 3} dx$ ;

12)  $\int \frac{2x + 7}{\sqrt{x^2 + 5x - 4}} dx$ ;

13)  $\int |x^2 - 3| e^x dx$ ;

14)  $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ ;

15)  $\int \frac{x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ ;

16)  $\int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 + 8} dx$ ;

17)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx$ ;

18)  $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x}}$ ;

2)  $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt[4]{2 - 5x^2}}$ .

3)  $\int_0^{\pi/3} \left(\frac{4x + 1}{5}\right) \sin 2x dx$ ;

4)  $\int_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2 - x}} dx$ .

5)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 3}{x + 1} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}$ ;

7)  $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 1} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$ ;

б)  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 11 - x^2$ ,  $y = -10x$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x^2 - y^2x^3 + y^4$ ;      б)  $z = \arccos(x^2 + y)$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$ , яка задана неявно в точці  $M_0(3; 1; 4)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \cos(3x^2 - y^3)$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2} dy + \cos y \sqrt{1+x^2} dy$ ;      б)  $(y^2 - 2xy) dx - x^2 dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{2y}{x+1} = |x+1|^3$ ,  $y|_0 = \frac{1}{2}$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + y' = \sin x$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y|_1 - \ln y|_1 y'' + |1 + \ln y|_1 y'^2 = 0 \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 5y = 0$ ;      б)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ;      в)  $y'' + 6y' + 8y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 9y' = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 4x - 3$ ;      б)  $f|x| = e^{2x} \sin x$ ;      в)  $f|x| = \sin 3x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos(e^x)$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$$

## Варіант 26

1. Дано числа  $z_1 = -2 - 6i$ ,  $z_2 = 1 - 18i$ ,  $z_3 = 2 + 3i$ . Знайти  $4z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 6 - 6i$ ;  $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 + 1 = 0$ , б)  $z^3 - \sqrt{5}z^2 + 5z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{5 - 2x}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x^2}}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{2 + 5x}{3}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx$ ;      6)  $\int \sin^4 8x \cos 8x dx$ ;

7)  $\int \frac{\sqrt{\tg 4x}}{\cos^2 4x} dx$ ;      8)  $\int \sin^2 3x \sin 7x dx$ ;      9)  $\int \frac{3x dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$ ;

10)  $\int \frac{3 - 2x}{x^2 - 8} dx$ ;      11)  $\int \frac{x + 2}{2x^2 - 3x + 1} dx$ ;      12)  $\int \frac{3x - 4}{\sqrt{2x^2 - 6x + 1}} dx$ ;

13)  $\int x e^{-4x} dx$ ;      14)  $\int \ln \frac{2 - x}{2 + x} dx$ ;

15)  $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{|x^2 - x| |x + 1|} dx$ ;      16)  $\int \frac{4x^2 + 7x + 5}{|x - 1| |x^2 + 2x + 5|} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x - 2}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 3}$ ;      2)  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ .

3)  $\int_0^{\pi} |3x + 4| \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ ;      4)  $\int_1^2 \ln |3x + 2| dx$ .

5)  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$ ;      7)  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3}}{e^x + 2} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 |x + 1|}$ ;      б)  $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = 3\sqrt{x}$ ,  $xy = 3$ ,  $x = 4$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = |x^2 + 3y|^2 + x^3 y^2$ ;      б)  $z = \arcsin|x - y^2|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$ , яка задана неявно в точці  $M_0(-2; -1; 2)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arctg|3x + 2y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = x + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $y' \sqrt{1 - x^2} - x \cdot \cos^2 y = 0$ ;      б)  $|x + 2y| dx + x dy = 0$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - y \cos x = -\sin 2x$ ,  $y|_0 = 3$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $x^2 y'' = y'^2$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y''|_{1+y} = y'^2 + y', \quad y|_0 = 2, \quad y'|_0 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $y'' + 6y' + 10y = 0$ ;      б)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ;      в)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 4y' + 5y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = x^2 + 3$ ;      б)  $f|x| = x \cos 2x$ ;      в)  $f|x| = -2x e^x$ ;  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - y' = e^{2x} \sin|e^x|$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$$

## Варіант 27

1. Дано числа  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = -5 - 3i$ ,  $z_3 = 1 - 9i$ . Знайти  $3z_2 - z_3 \cdot z_1$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 3 - \sqrt{3}i$ ;  $z_2 = -2 - 2i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^5 + 2i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 - 64 = 0$ , б)  $z^3 - 4z^2 + 12z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt[4]{x^5} - 3x^3}{x^2} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{2x+7}$ ;      3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{4-2x}{3}\right) dx$ ;      5)  $\int \frac{\sqrt{|\ln^3(5x+6)|}}{5x+6} dx$ ;      6)  $\int \sin^5 4x \cos 4x dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{|1+9x^2| e^{\arctg 3x}}$ ;      8)  $\int \cos^2 4x \cos 3x dx$ ;      9)  $\int \frac{4x dx}{5+3x^2}$ ;

10)  $\int \frac{x-5}{8-4x^2} dx$ ;      11)  $\int \frac{|3x-2| dx}{x^2+5x-1}$ ;      12)  $\int \frac{|2x+5| dx}{\sqrt{3x^2+9x-4}}$ ;

13)  $\int |3x+2| e^{-3x} dx$ ;      14)  $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ ;

15)  $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} dx$ ;

17)  $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx$ ;      18)  $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{dx}{8x^2+9}$ ;      2)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

3)  $\int_0^3 |2x+1| \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$ ;      4)  $\int_0^2 x \ln|x+7| dx$ .

5)  $\int_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{x-3} dx$ ;      6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$ ;      7)  $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x+2}} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x |\ln x - 1|^2}$ ;      б)  $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = |x-1|^2$ ,  $y^2 = x-1$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = \frac{x^3}{y} - x^2 y^3; \quad \text{б) } z = \ln|y^2 - e^{-x}|.$$

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $x^3 + 3xyz - z^3 = 27$ , яка задана неявно в точці  $M_0(3; 1; 3)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \ln|5x^2 - 3y^4|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 4 - 2x^2 - y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{1-x^2}$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$\text{а) } e^x \operatorname{tg} y dx = |1 - e^x| \sec^2 y dy; \quad \text{б) } |2x - y| dx + |x + y| dy = 0.$$

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - 4xy = -4x^3$ ,  $y|_0 = -1/2$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $2xy'' y' = y'^2 - 4$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = y' / \sqrt{y}, \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 2.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

$$\text{а) } y'' - y = 0; \quad \text{б) } 4y'' + 8y' - 5y = 0; \quad \text{в) } y'' - 6y' + 10y = 0.$$

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 3y' + 2y = f|x|$ , якщо:

$$\text{а) } f|x| = |x-7| e^{-x}; \quad \text{б) } f|x| = 3 \sin x; \quad \text{в) } f|x| = x^2 + 1, \quad y|_0 = 0, \quad y'|_0 = 2.$$

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

## Варіант 28

1. Дано числа  $z_1 = -3 - 2i$ ,  $z_2 = 9 - i$ ,  $z_3 = 6 + 11i$ . Знайти  $5z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ;  $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^7 + 5$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 + 4i = 0$ , б)  $z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^2}} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{2x + 9}$ ;

3)  $\int \frac{dx}{4x^2 + 7}$ ;

4)  $\int \sin\left(\frac{4x + 2}{2}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}}$ ;

6)  $\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt[3]{\cos 4x}}$ ;

7)  $\int \frac{x^2 dx}{e^{2x^3 + 1}}$ ;

8)  $\int \cos 4x \sin^2 5x dx$ ;

9)  $\int \frac{x dx}{3x^2 - 1}$ ;

10)  $\int \frac{x + 4}{7x^2 + 3} dx$ ;

11)  $\int \frac{x - 7}{4x^2 + 3x - 1} dx$ ;

12)  $\int \frac{|4x + 3| dx}{\sqrt{2x^2 - x + 5}}$ ;

13)  $\int x e^{-5x} dx$ ;

14)  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ;

15)  $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$ ;

16)  $\int \frac{6x}{x^3 - 1} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x + 6}} dx$ ;

18)  $\int \frac{dx}{4 - 4 \sin x + 3 \cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$ ;

2)  $\int_0^2 x^5 \sqrt{3 + 2x^2} dx$ .

3)  $\int_0^4 |3x + 2| \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$ ;

4)  $\int_{-1}^0 |x + 1| e^{-2x} dx$ .

5)  $\int_0^{13} \frac{x + 1}{\sqrt[3]{2x + 1}} dx$ ;

6)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}$ ;

7)  $\int_{\ln 6}^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3} dx}{e^x - 2}$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{|6x^2 - 5x + 1| \ln \frac{3}{4}}$ ;

б)  $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{|16 - x^2|^3}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $x = \sqrt{4 - y^2}$  та  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

**а)**  $z = 7x - x^3y^2 + y^4$ ;      **б)**  $z = \cos\left(\frac{|x - y|}{|x^2 + y^2|}\right)$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$ , яка задана неявно в точці  $M_0(1; 1; 3)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \text{arctg}|x - 4y|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = -1$ ,  $y = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

**а)**  $y' + \sin|x + y| = \sin|x - y|$ ;      **б)**  $2x^3y' = y|2x^2 - y^2|$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ ,  $y|1| = 1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'''x \ln x = y''$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1 + y'^2, \quad y|0| = 0, \quad y'|0| = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

**а)**  $y'' + 8y' + 25y = 0$ ;      **б)**  $y'' + 9y' = 0$ ;      **в)**  $9y'' + 3y' - 2y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' - 8y' + 16y = f|x|$ , якщо:

**а)**  $f|x| = 2x + 5x^2$ ;      **б)**  $f|x| = \cos 4x$ ;      **в)**  $f|x| = 2xe^{4x}$ ;  $y|0| = 0$ ,  $y'|0| = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$$

## Варіант 29

1. Дано числа  $z_1 = 5 + 8i$ ,  $z_2 = 9i - 1$ ,  $z_3 = -8 - 3i$ . Знайти  $z_1 \cdot z_2 - 3z_3$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = -5 - 5i$ ;  $z_2 = -3 + \sqrt{27}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + 4i$ ;  $\sqrt[4]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^3 + 81 = 0$ , б)  $z^3 - 2\sqrt{5}z^2 + 10z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{\sqrt{x^5 - 3}}{4x^2} dx$ ;

2)  $\int \frac{dx}{7x - 3}$ ;

3)  $\int \frac{2dx}{4 + 3x^2}$ ;

4)  $\int \cos\left(\frac{1 - 3x}{4}\right) dx$ ;

5)  $\int \frac{\ln^6 |4x + 9|}{4x + 9} dx$ ;

6)  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}}$ ;

7)  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx$ ;

8)  $\int \sin^2 3x \sin 5x dx$ ;

9)  $\int \frac{x dx}{3x^2 + 1}$ ;

10)  $\int \frac{3x + 5}{\sqrt{2x^2 - 1}} dx$ ;

11)  $\int \frac{3x + 5}{2x^2 + x - 6} dx$ ;

12)  $\int \frac{3x - 7}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}} dx$ ;

13)  $\int x^2 e^{x+3} dx$ ;

14)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x + 1}} dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ ;

16)  $\int \frac{5x^2 + 17x + 36}{|x + 1| |x^2 + 6x + 13|} dx$ ;

17)  $\int \frac{1}{3 + \sqrt{x - 6}} dx$ ;

18)  $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \sqrt[4]{|3 + 5x|^3} dx$ ;

2)  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx$ .

3)  $\int_0^{\pi} |2x + 3| \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx$ ;

4)  $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx$ .

5)  $\int_1^6 \frac{\sqrt{x + 3}}{x + \sqrt{x + 3}} dx$ ;

6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$ ;

7)  $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}$ ;

б)  $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}$ .

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $xy = 2$ ,  $y = 7e^x$ ,  $y = 2$ ,  $y = 7$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = e^{y-x} |x^2 + y^3 x|$ ;      б)  $z = \sin \sqrt{y/|x+y|}$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; 1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \ln |xy^3 - 4|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ ,  $x = 0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $\cos^3 y y' - \cos |2x + y| = \cos |2x - y|$ ;      б)  $x^2 y' = y |x + y|$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - 3x^2 y = \frac{x^2 |1 + x^3|}{3}$ ,  $y|_0 = 0$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y y'' - 2y y' \ln y = y'^2 \quad y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 1.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $6y'' + 7y' - 3y = 0$ ;      б)  $y'' + 16y = 0$ ;      в)  $4y'' - 4y' + y = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + y' - 2y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 2x + 3$ ;      б)  $f|x| = x \cos 2x$ ;      в)  $f|x| = |2x - 1| e^{-x}$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 2$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$$

### Варіант 30

1. Дано числа  $z_1 = 1 - 3i$ ,  $z_2 = 2 - 7i$ ,  $z_3 = -4 - 8i$ . Знайти  $5z_1 + z_3 \cdot z_2$ ;  $z_2/z_3$ .

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 3 - 3i$ ;  $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^8 + i + 1$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

3. Розв'язати рівняння: а)  $z^4 - 4 = 0$ , б)  $z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z = 0$ .

4. Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

1)  $\int \frac{2x^3 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}} dx$ ;      2)  $\int \frac{dx}{6x+1}$ ;      3)  $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2+3}}$ ;

4)  $\int \sin|1-2x| dx$ ;      5)  $\int xe^{3x^2+1} dx$ ;      6)  $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$ ;

7)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 2x}}{\sin^2 2x} dx$ ;      8)  $\int \cos^2 4x \cos 7x dx$ ;      9)  $\int \frac{x}{\sqrt{4+9x^2}} dx$ ;

10)  $\int \frac{2-3x}{2x^2+3} dx$ ;      11)  $\int \frac{x-4}{x^2+7x+11} dx$ ;      12)  $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx$ ;

13)  $\int |x-9| \ln \frac{x}{2} dx$ ;      14)  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ;

15)  $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2} dx$ ;      16)  $\int \frac{2x+22}{|x+2| |x^2-2x+10|} dx$ ;

17)  $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$ ;      18)  $\int \frac{dx}{2-3\cos x + \sin x}$ .

5. Обчислити визначені інтеграли.

1)  $\int_0^1 \frac{2dx}{4-3x^2}$ ;      2)  $\int_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{\cos^2|x^2|}$ .

3)  $\int_0^1 |2x+3| \cos|2-x| dx$ ;      4)  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ .

5)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$ ;      6)  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{4\cos^2 x - 5\sin^2 x}$ ;      7)  $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-1}{e^x+3} dx$ .

6. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)  $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ;      б)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{|2x-1|^2}$ .



7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $xy=1$ ,  $y=x^2$ ,  $y=2$ ,  $x=0$ .

8. Знайти частинні похідні та повний диференціал функцій:

а)  $z = 3x^2y^3 + 5|x - 2y|^2$ ;      б)  $z = \arctg|2x - y|$ .

9. Обчислити значення частинних похідних функції  $z^2 = xy - z + x^2 - 4$ , яка задана неявно в точці  $M_0(2; 1; 1)$ .

10. Знайти другі частинні похідні функції  $z = \mathbf{tg}|xy^2|$  та переконатися, що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

11. Дослідити функцію  $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $y=0$ ,  $y=6$ ,  $x=1$ ,  $x=0$ .

12. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

а)  $3y^{2-x^2} = yy'/x$ ;      б)  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ .

13. Знайти розв'язок задачі Коші  $y' - y \cos x = \sin 2x$ ,  $y|_0 = -1$ .

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $|1 + x^2| y'' = 2xy$ , яке припускає пониження порядку.

15. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y'' = 1/\sqrt{y}, \quad y|_0 = y'|_0 = 0.$$

16. Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

а)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ;    б)  $y'' + 12y' + 37y = 0$ ;    в)  $y'' - 2y' = 0$ .

17. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 3y' - 4y = f|x|$ , якщо:

а)  $f|x| = 6xe^{-x}$ ;    б)  $f|x| = x^2 \sin 2x$ ;    в)  $f|x| = e^x \sin x$ ,  $y|_0 = 0$ ,  $y'|_0 = 0$ .

18. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$

19. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$$

## Розв'язання типового варіанта завдання

1. Дано числа  $z_1 = 3 + 2i$ ,  $z_2 = 4 - i$ ,  $z_3 = i - 1$ . Знайти  $z_1 \cdot z_2 - 3z_3$ ;  $z_2/z_1$ .

Обчислюємо:

$$z_1 \cdot z_2 - 3z_3 = |3 + 2i| |4 - i| - 3|i - 1| = |12 + 8i - 3i - 2i^2| - 3|i - 1| = \\ = 14 + 5i - 3i + 3 = 17 + 2i.$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4 - i}{3 + 2i} = \frac{|4 - i| |3 - 2i|}{|3 + 2i| |3 - 2i|} = \frac{10 - 11i}{9 + 4} = \frac{10}{13} - \frac{11}{13}i.$$

2. Представити комплексні числа  $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ ;  $z_2 = 8i$  в тригонометричній формі при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  знайти  $z_1^6 + 2i$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ .

Представимо основу  $1 - i\sqrt{3}$  в тригонометричній формі:

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

і скористаємося формулою Муавра:

$$|1 - i\sqrt{3}|^6 = 2^6 \left( \cos \left( 6 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left( 6 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) \right) = 64 |\cos 10\pi + i \sin 10\pi| = 64.$$

Отже,  $z_1^6 + 2i = 64 + 2i$ .

Далі запишемо модуль та аргумент числа  $z = 8i$ :  $\rho = |z| = 8$  та  $\varphi = \arg z = \pi/2$  і скористаємося формулою значень  $\sqrt[n]{z}$  для  $n = 3$ . Покладаючи в цій формулі послідовно  $k = 0, 1, 2$ , дістаємо такі три значення  $\sqrt[3]{8i}$ :

$$w_0 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi/2}{3} + i \sin \frac{\pi/2}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi/2 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 2\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi/2 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 4\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i.$$

3. Розв'язати рівняння: **а)**  $z^3 - 2z^2 + 4z = 0$ , **б)**  $z^3 + 125 = 0$ .

**а)**  $z^3 - 2z^2 + 4z = 0 \Leftrightarrow z|z^2 - 2z + 4| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  або  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .

Звідки  $z_1 = 0$ ,  $z_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ .

**б)**  $z^3 + 125 = 0$ , тоді  $z^3 = -125$ ,  $z = \sqrt[3]{-125}$ .

Запишемо модуль та аргумент числа  $z = -125$ :  $\rho = |z| = 125$  та  $\varphi = \arg z = \pi$  і, використавши формулу значень  $\sqrt[3]{z}$ , дістаємо такі три значення  $\sqrt[3]{-125}$ :

$$w_0 = \sqrt[3]{125} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 5 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{125} |\cos \pi + i \sin \pi| = 5|-1 + 0i| = -5,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{125} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 5 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Отже, корені рівняння  $\frac{5}{2} \pm i \frac{5\sqrt{3}}{2}$  та  $-5$ .

**4.** Знайти невизначені інтеграли (в завданнях 1 – 3, результат інтегрування перевірити диференціюванням):

$$1) \int \frac{3 - 2x^4 + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$$

Поділимо чисельник підінтегральної функції на знаменник та зведемо інтеграл до інтегрування степеневих функцій використовуючи формулу:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

$$\int \frac{3 - 2x^4 + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx = 3 \int x^{-\frac{1}{4}} dx - 2 \int x^{\frac{15}{4}} dx + 3 \int dx = 3 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} - 2 \frac{x^{\frac{19}{4}}}{\frac{19}{4}} + 3x + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19} \sqrt[4]{x^{19}} + 3x + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left( 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19} \sqrt[4]{x^{19}} + 3x + C \right)' = 4 \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - \frac{8}{19} \cdot \frac{19}{4} x^{\frac{15}{4}} + 3 = 3 \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 2\sqrt[4]{x^{15}} + 3 = \frac{3 - 2x^4 + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{9 - 11x}.$$

Зведемо до табличного інтеграла  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ .

$$\text{Маємо: } \int \frac{dx}{9 - 11x} = -\frac{1}{11} \int \frac{d|9 - 11x|}{9 - 11x} = -\frac{1}{11} \ln|9 - 11x| + C.$$

Виконаємо перевірку результату:

$$\left( -\frac{1}{11} \ln|9 - 11x| + C \right)' = -\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{9 - 11x} \cdot (-11) = \frac{1}{9 - 11x}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{3} dx}{3 - 4x^2}.$$

Винесемо множник 4 із знаменника, щоб звести даний інтеграл до табличного

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$$

$$\text{Маємо } \int \frac{\sqrt{3} dx}{3 - 4x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{dx}{\frac{3}{4} - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{3}}{2x - \sqrt{3}} \right| + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left( \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{3}}{2x - \sqrt{3}} \right| + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} \cdot \frac{2|2x - \sqrt{3}| - 2|2x + \sqrt{3}|}{|2x - \sqrt{3}|^2} = \frac{1}{4} \frac{4x - 2\sqrt{3} - 4x - 2\sqrt{3}}{4x^2 - 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3 - 4x^2}.$$

4)  $\int \cos|2 - 5x| dx.$

$$\int \cos|2 - 5x| dx = -\frac{1}{5} \int \cos|2 - 5x| d|2 - 5x| = -\frac{1}{5} \sin|2 - 5x| + C.$$

5)  $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3|x+2|}}{x+2} dx.$

$$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3|x+2|}}{x+2} dx = \int |\ln|x+2||^{\frac{3}{7}} d|\ln|x+2|| = \frac{7}{10} \ln^{\frac{10}{7}}|x+2| + C = \frac{7}{10} \sqrt[7]{\ln^{10}|x+2|} + C.$$

6)  $\int |\cos^5 2x \cdot \sin 2x| dx.$

$$\int \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int |\cos 2x|^5 d \cos 2x = -\frac{1}{2} \frac{\cos^6 2x}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{12} + C.$$

7)  $\int \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2}.$

$$\int \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2} = \int \arctg^2 x d \arctg x = \frac{\arctg^3 x}{3} + C$$

8)  $\int \sin^2 3x \cos 5x dx.$

Використовуючи тригонометричні формули, представимо підінтегральну функцію у вигляді суми:

$$\int \sin^2 3x \cos 5x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x \cos 6x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{4} \int \cos 11x - \frac{1}{4} \int \cos x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{11} \sin 11x - \frac{1}{4} \sin x + C =$$

$$= \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{44} \sin 11x - \frac{1}{4} \sin x.$$

9)  $\int \frac{7x dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$

$$\int \frac{7x dx}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{7}{8} \int \frac{d|9-4x^2|}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{7}{8} \cdot 2\sqrt{9-4x^2} + C = -\frac{7}{4} \sqrt{9-4x^2} + C.$$

$$10) \int \frac{3-7x}{4x^2+5} dx.$$

Розіб'ємо інтеграл на два. Перший з яких зведеться до табличного, а в другому інтегралі внесемо  $x$  під знак диференціалу, оскільки  $|4x^2+5|' = 8x$  і з урахуванням константи,  $7x dx = \frac{7}{8} d|4x^2+5|$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{3-7x}{4x^2+5} dx &= 3 \int \frac{dx}{4x^2+5} - 7 \int \frac{x dx}{4x^2+5} = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{5}{4}} - \frac{7}{8} \int \frac{d|4x^2+5|}{4x^2+5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \\ & - \frac{7}{8} \ln|4x^2+5| + C = \frac{3}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8} \ln|4x^2+5| + C. \end{aligned}$$

$$11) \int \frac{3x-6}{2-5x-x^2} dx.$$

Виділимо у чисельнику підінтегрального виразу похідну квадратного тричлена та представимо даний інтеграл у вигляді суми двох, залишивши похідну в чисельнику першого дробу, а константу у другому:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-6}{2-5x-x^2} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2} dx - \frac{3}{2} \cdot 9 \int \frac{dx}{2-5x-x^2} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \int \frac{dx}{x^2+5x-2} = -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \int \frac{dx}{\left|x+\frac{5}{2}\right|^2 - \frac{25}{4} - 2} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \int \frac{d\left|x+\frac{5}{2}\right|}{\left|x+\frac{5}{2}\right|^2 - \frac{33}{4}} = -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{33}} \ln \left| \frac{x+\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}}{x+\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + C = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{\sqrt{33}} \cdot \ln \left| \frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$12) \int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx.$$

Аналогічно попередньому прикладу. Маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}} dx - \frac{25}{3\sqrt{3}} \cdot 9 \int \frac{dx}{\sqrt{-\left|x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right|}} = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d|1-4x-3x^2|}{\sqrt{1-4x-3x^2}} = -\frac{25}{3\sqrt{3}} \int \frac{d\left|x+\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{-\left|x+\frac{2}{3}\right|^2 - \frac{7}{9}}} = -\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}} \int \frac{d\left|x+\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{\frac{7}{9} - \left|x+\frac{2}{3}\right|^2}} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

$$13) \int |x-7| e^{5x} dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами  $\int u dv = uv - \int v du$ .

$$\int |x-7| e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x-7, \quad du = dx \\ dv = e^{5x} dx, \quad v = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right| = |x-7| \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \frac{x-7}{5} e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + C.$$

14) Аналогічно попередньому прикладу

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1}, \quad du = \frac{-1}{1+3x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3 dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{3x-2}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x\sqrt{3x-2}} dx = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} + \frac{1}{3} \sqrt{3x-2} + C.$$

$$15) \int \frac{7x - x^3 - 4}{|x+1| |x^2 - 5x + 6|} dx.$$

Оскільки підінтегральна функція є неправильний дріб, то шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити його у вигляді суми цілого многочлена та правильного раціонального дробу, який розіб'ємо на елементарні дроби.

$$\int \frac{7x - x^3 - 4}{|x+1| |x^2 - 5x + 6|} dx = \int \left( -1 - \frac{4x^2 - 8x - 2}{|x+1| |x-2| |x-3|} \right) dx = -x - 2 \int \frac{2x^2 - 4x - 1}{|x+1| |x-2| |x-3|} dx;$$

$$\left| \frac{2x^2 - 4x - 1}{|x+1| |x-2| |x-3|} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}; \right.$$

$$2x^2 - 4x - 1 = A|x-2| |x-3| + B|x+1| |x-3| + C|x+1| |x-2|;$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \quad \left| \begin{array}{l} 5 = 12A, \quad A = \frac{5}{12} \\ -1 = -3B, \quad B = \frac{1}{3} \\ 5 = 4C, \quad C = \frac{5}{4} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Маємо:

$$-x - 2 \int \left( \frac{\frac{5}{12}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{4}}{x-3} \right) dx = -x - \frac{5}{6} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \ln|x-2| - \frac{5}{2} \ln|x-3| + C.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використали метод частинних значень.

$$16) \int \frac{2+x}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx.$$

$$\int \frac{2+x}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \int \frac{2+x}{x|x^2 + 2x + 5|} dx;$$

$$\left| \frac{2+x}{x|x^2 + 2x + 5|} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2x + 5}; \quad 2+x = A|x^2 + 2x + 5| + |Bx+C| \cdot x; \right.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B, \quad A = \frac{2}{5} \\ x^1 & 1 = 2A + C, \quad B = -\frac{2}{5} \\ x^0 & 2 = 5A, \quad C = \frac{1}{5} \end{array};$$

$$\int \left( \frac{\frac{2}{5}}{x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2x-1}{x^2+2x+5} \right) dx = \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \left( \frac{2x+2-3}{x^2+2x+5} \right) dx = \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \frac{|2x+2| dx}{x^2+2x+5} +$$

$$+ \frac{3}{5} \int \frac{dx}{|x+1|^2+2^2} = \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln|x^2+2x+5| + \frac{3}{10} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використали метод невизначених коефіцієнтів.

$$17) \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx.$$

Замінімо корінь на нову змінну та зведемо ірраціональний вираз до раціонального.

$$\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t \\ x = t^2 + 2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2+3}{3-t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^3+3t}{3-t} dt - 2 \int \frac{t^3+3t}{t-3} dt =$$

$$= -2 \int \left( t^2 + 3t + 12 + \frac{36}{t-3} \right) dt = -2 \left( \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 12t + 36 \ln|t-3| + C \right) = -\frac{2}{3} \sqrt{x-2}^3 - 3|x-2| -$$

$$-24\sqrt{x-2} - 72 \ln|\sqrt{x-2}-3| + C.$$

$$18) \int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}.$$

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку.

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{6t-2+2t^2+1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2+6t-1} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2+2t+1-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{|t+1|^2 - \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ln \left| \frac{t+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{t+1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} + 2} \right| + C.$$

5. Обчислити визначені інтеграли.

$$1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+2x^2}}.$$

Для обчислення визначених інтегралів застосуємо формулу Ньютона-

Лейбніца  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+2x^2}} = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}} (1+2x^2)^{-\frac{1}{3}} d(1+2x^2) = \frac{3(1+2x^2)^{\frac{2}{3}}}{8} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{8} \left( 7^{\frac{2}{3}} - 1 \right).$$

$$2) \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2)^{1/2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$3) \int_0^{\pi} x \sin 3x dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами у визначеному

інтегралі  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

$$\int_0^{\pi} x \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{x}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x dx = -\frac{\pi}{3} \cos 3\pi + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} (\sin 3\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{3}.$$

$$4) \int_1^e \ln^2 x dx.$$

Застосувавши два рази метод інтегрування частинами, одержимо:

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = e \ln^2 e - 2 \left( x \ln x - x \right) \Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

$$5) \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{3 + \sqrt[3]{x-2}} dx.$$



$$\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{3+\sqrt[3]{x-2}} dx = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x-2} \\ x = t^3 + 2 \\ dx = 3t^2 dt \\ \text{їдè } x=3 \quad t=1 \\ \text{їдè } x=29 \quad t=3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{t}{3+t} \cdot 3t^2 dt = 3 \int_1^3 \frac{t^3 + 27 - 27}{t+3} dt =$$

$$= 3 \int_1^3 \left( t^2 - 3t + 9 - \frac{27}{t+3} \right) dt = 3 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 27 \ln|t+3| \right) \Big|_1^3 = 3 \left( 9 - \frac{27}{2} - 27 \ln 6 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 27 \ln 4 \right) =$$

$$= \left( 27 \ln \frac{3}{2} - \frac{10}{3} \right) \cdot 3 = 81 \ln \frac{3}{2} - 10.$$

$$6) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{4+3\cos 2x}.$$

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{4+3\cos 2x} = \left. \begin{array}{l} \text{tg } x = t \\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \text{їдè } x=0 \quad t=0 \\ \text{їдè } x=\pi/3 \quad t=\sqrt{3} \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2 \left( 4+3\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{7+t^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{7}} - 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$7) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \\ x = \ln|t+1| \\ dx = \frac{dt}{t+1} \\ \text{при } x=0 \quad t=0 \\ \text{при } x=\ln 2 \quad t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t dt}{t+1} = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = t - \ln|t+1| \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

6. Обчислити невідомі інтеграли або довести їх розбіжність:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{|x+2|^2 + 5} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{|x+2|^2 + 5} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt{5}} \right) +$$

$$+ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \operatorname{arctg} \frac{b+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

б)  $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \left( 3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} \right) dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^1 \left( 3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{9}{7} x^{\frac{7}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \frac{9}{7} x^{\frac{7}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{0+\varepsilon_2}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{9}{7} |0-\varepsilon_1|^{\frac{7}{3}} + 6|0-\varepsilon_1|^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{7} + 6 \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \frac{9}{7} + 6 - \frac{9}{7} |0+\varepsilon_2|^{\frac{7}{3}} - 6|0+\varepsilon_2|^{\frac{1}{3}} \right) = 14 \frac{4}{7}.$$

7. Обчислити площу фігури, обмеженою графіками функцій  $y = x^2 - 3x$  та  $y + 3x - 4 = 0$ .

Знайдемо точки перетину параболи та прямої  $M_1, M_2$  (рисунок 1):

$$x^2 - 3x = -3x + 4; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2.$$

$$M_1(-2; 10) \text{ та } M_2(2; -2).$$

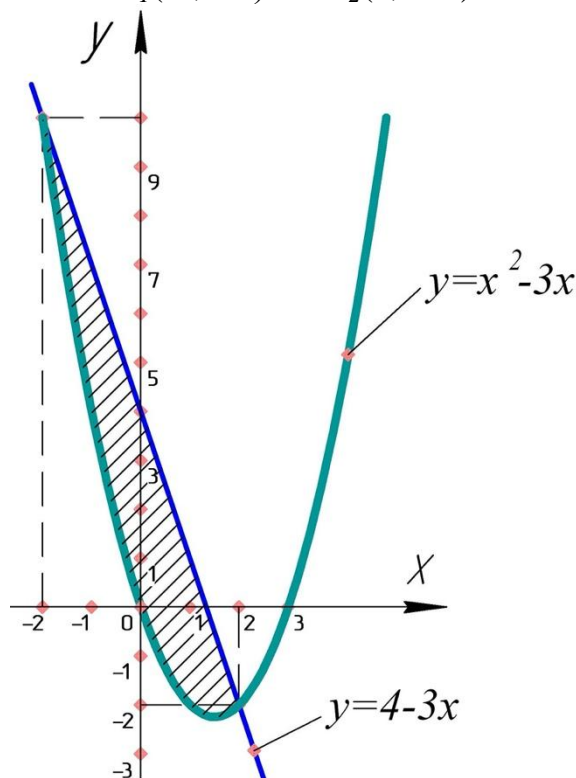


Рисунок 1 – Зображення області

Маємо:

$$S = \int_{-2}^2 |4 - 3x - x^2 + 3x| dx = \int_{-2}^2 |4 - x^2| dx = \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

**8.** Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

**а)**  $z = 2x^5 y^2 - 4x^3 y - 5x + 3y$ ;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 \cdot 5x^4 - 4y \cdot 3x^2 - 5 + 0 = 10x^4 y^2 - 12x^2 y - 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^5 \cdot 2y - 4x^3 \cdot 1 - 0 + 3 = 4x^5 y - 4x^3 + 3.$$

Згідно формули  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ , маємо:

$$dz = |10x^4 y^2 - 12x^2 y - 5| dx + |4x^5 y - 4x^3 + 3| dy.$$

**б)**  $z = \ln |y^3 + e^{2x}|$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x}}{y^3 + e^{2x}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{y^3 + e^{2x}};$$

$$dz = \frac{1}{y^3 + e^{2x}} |2e^{2x} dx + 3y^2 dy|.$$

**9.** Обчислити значення частинних похідних функції

$4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz - z^2 - 3 = 0$ , яка задана неявно в точці  $M_0(0; 1; -1)$ .

Позначимо  $F(x, y, z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz - z^2 - 3$ , тому

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z; \quad F'_y = -9y^2 + 2xz; \quad F'_z = 2xy - 4x + 2z.$$

Оскільки  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$ , одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Обчислимо значення  $\frac{\partial z}{\partial x}$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в точці  $M_0(0; 1; -1)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{0; 1; -1} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{0; 1; -1} = -4,5.$$

**10.** Знайти другі частинні похідні функції  $z = \arccos \sqrt{x/y}$  та переконатися,

що  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

Спочатку знаходимо перші частинні похідні:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{yx-x^2}};$$

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}{2\sqrt{y^3}\sqrt{y-x}} = \frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3-xy^2}}.$$

Диференціюючи кожну з отриманих похідних по  $x$  та по  $y$ , знаходимо другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|yx-x^2|^3}} \cdot (y-2x) = \frac{y-2x}{4\sqrt{|yx-x^2|^3}};$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|yx-x^2|^3}} \cdot x = \frac{x}{4\sqrt{|yx-x^2|^3}};$$

$$z''_{yy} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y^3-xy^2|^3}} \cdot (3y^2-2xy) = -\frac{\sqrt{x} \cdot |3y^2-2xy|}{4\sqrt{|y^3-xy^2|^3}};$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y^3-xy^2|^3}} + \sqrt{x} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{|y^3-xy^2|^3}} \cdot (-y^2) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3-xy^2+xy^2}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{|y^3-xy^2|^3}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{\sqrt{x} \cdot y^3 \cdot \sqrt{|y-x|^3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{|y-x|^3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{|yx-x^2|^3}}.$$

Зазначимо, що мішані частинні похідні  $z''_{xy}$  та  $z''_{yx}$  рівні.

**11.** Дослідити функцію  $z = xy - y^2 + 3x + 4y$  на екстремум в усій області визначення та знайти найбільше та найменше значення функції в області  $\bar{D}$ , яка обмежена лініями  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y-1=0$  (рисунк 2).

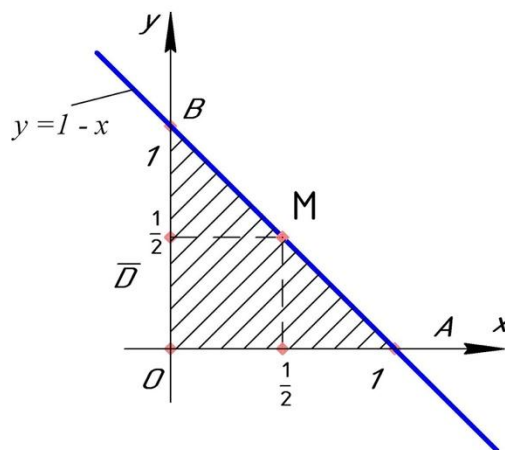


Рисунок 2 – Зображення області  $\bar{D}$

Знайдемо частинні похідні функції  $z'_x = y+3$ ,  $z'_y = x-2y+4$ .

Прирівнюючи їх до нуля одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = y + 3 = 0 \\ z'_y = x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

з якої знайдемо стаціонарну точку даної функції  $M(-10; -3)$ . З'ясуємо, чи буде ця точка точкою екстремуму. Для цього спочатку знайдемо другі частинні похідні даної функції  $z''_{x\bar{o}} = 0$ ,  $z''_{\bar{o}y} = 1$ ,  $z''_{y\bar{o}} = -2$ . Використовуючи останні умови екстремуму, маємо  $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$ , тобто в точці  $M(-10; -3)$  екстремуму не має, тому дана функція не має локального екстремуму.

Далі побудуємо область  $\bar{D}$ , тобто трикутник  $OAB$  і дослідимо функцію на межі області  $\bar{D}$ . Сторона  $OA$ :  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;  $z(x, 0) = 3x$ ;  $z'_x = 3$ , тобто стаціонарних точок на відрізку  $OA$  немає. В точках  $O$  і  $A$  відповідно  $z(0; 0) = 0$ ;  $z(1; 0) = 3$ .

На стороні  $OB$ :

$x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ;  $z(0, y) = 4y - y^2$ ;  $z'_y = 4 - 2y$ ;  $4 - 2y = 0$ .  $y = 2 > 1$ , тому стаціонарних точок на відрізку  $OB$  також немає.  $z(0, 1) = 3$  в точці  $B$ .

Сторона  $AB$ :

$y = 1 - x$ ,  $z(x, 1 - x) = x(1 - x) - (1 - x)^2 + 3x + 4(1 - x) = -2x^2 + 2x + 3$ , тоді  $z'_x = -4x + 2$  і з  $z' = 0$  випливає, що  $x = \frac{1}{2}$ . Стаціонарна точка  $M(1/2; 1/2)$  належить межі області  $\bar{D}$ . Значення функції в ній  $z(1/2; 1/2) = 3,5$ . Порівнюючи всі отримані значення функції, бачимо, що  $z_{\text{НАЙБ.}} = z(1/2; 1/2) = 3,5$ ;  $z_{\text{НАЙМ.}} = z(0; 0) = 0$ .

**12.** Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

**а)**  $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ .

Маємо рівняння з відокремленими змінними. Перетворимо його до виду  $y(1 - x^2)dy = -x(y^2 + 1)dx$  і відокремимо змінні.

Одержимо:  $\frac{ydy}{y^2 + 1} = -\frac{xdx}{1 - x^2}$ .

Проінтегруємо обидві частини в останній рівності.

$$\int \frac{ydy}{y^2 + 1} = -\int \frac{xdx}{1 - x^2} + C; \frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln \tilde{N}$$

$$y^2 + 1 = C|x^2 - 1|, \quad y^2 = C|x^2 - 1| - 1.$$

Загальним розв'язком початкового рівняння є функція:

$$y = \pm \sqrt{C|x^2 - 1| - 1}.$$

$$6) y - x \frac{dy}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}.$$

З даного рівняння знаходимо  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}. \text{ Це однорідне рівняння першого порядку, тому}$$

розв'язуємо його за допомогою заміни  $\frac{y}{x} = u(x)$ . Звідки:

$$y = x \cdot u(x); \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux}; \quad u'x + u = \frac{u-1}{1+u};$$

$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u = -\frac{u^2-1}{u+1}; \quad x \frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{1+u}.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{u+1}{u^2+1} du = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|, \quad \frac{1}{2} \ln|u^2+1| + \arctg u = \ln \left| \frac{C}{x} \right|,$$

$$\arctg u = \ln \left| \frac{C}{x\sqrt{u^2+1}} \right|, \quad \arctg \frac{y}{x} = \ln \frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ — загальний інтеграл}$$

початкового рівняння.

### 13. Знайти розв'язок задачі Коші.

$$dy - e^{-x} dx + ydx - xdy = xydx, \quad y(0) = \ln 5.$$

Відокремлюючи похідну перетворимо рівняння до виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x} \cdot y = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Маємо лінійне рівняння першого порядку виду  $y' + P(x)y = Q(x)$ ,

$$\text{де } P(x) = 1; \quad Q(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки  $y = u(x) \cdot v(x)$ .

$$\text{Маємо: } y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

$$u'v + u \left( \frac{dv}{dx} + v \right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \quad (1)$$

Знаходимо  $v(x)$  з умови  $\frac{dv}{dx} + v = 0$ :

$$\frac{dv}{dx} = -v; \quad \frac{dv}{v} = -dv; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx, \quad \ln|v| = -x, \quad v = e^{-x}.$$

Підставимо одержаний вираз для  $v(x)$  в рівняння (1):

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x}; \quad du = \frac{dx}{1-x};$$

$$\int du = \int \frac{dx}{1-x}; \quad u = -\ln|1-x| + \ln C; \quad u = \ln \frac{C}{|1-x|}.$$

Тоді  $y = u \cdot v = e^{-x} \ln \frac{C}{|1-x|}$  є загальним розв'язком початкового рівняння. Знайдемо  $C$ , використовуючи початкову умову:

$$y|_0 = \ln C = \ln 5, \quad C = 5.$$

Отримаємо частинний розв'язок:

$$y = e^{-x} \ln \frac{5}{|1-x|}.$$

**14.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y''(e^x+1) + y' = 0$ , яке припускає пониження порядку.

Це рівняння не містить явно змінну  $y$ , тому зробимо підстановку  $y' = z(x)$ , тоді  $y'' = z'(x)$  і  $z'(e^x+1) + z = 0$ ,  $\frac{dz}{dx}(e^x+1) = -z$ ,  $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{e^x+1}$ .

Шляхом заміни  $e^x+1 = t$  знаходимо:

$$\ln|z| = \ln|e^x+1| - \ln e^x + \ln C, \quad \text{звідси } z = C_1 \frac{e^x+1}{e^x}, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{e^x+1}{e^x},$$

$$y = C_1 \int \frac{e^x+1}{e^x} dx = C_1 |x - e^{-x}| + C_2.$$

**15.** Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке припускає пониження порядку.

$$y^3 y'' = -1, \quad y|_1 = 1, \quad y'|_1 = 0.$$

В даному рівнянні відсутня змінна  $x$ , тому понизимо порядок, використовуючи підстановку  $y' = p(y)$ . Тоді  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . Далі,  $y^3 p \frac{dp}{dy} = -1$ ,

$$p dp = -\frac{dy}{y^3}, \quad \int p dp = -\int \frac{dy}{y^3}, \quad \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2y^3} + C_1, \quad p = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}.$$

Знайдемо  $C_1$ :  $p = y'$ ,  $y'|_1 = 0$ ,  $y|_1 = 1$ , тоді  $0 = \pm \sqrt{1+2C_1}$ , звідки  $C_1 = -\frac{1}{2}$ .

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx, \quad \mp \frac{1}{2} \int \frac{d|1-y^2|}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx,$$

$$C_2 \mp \sqrt{1-y^2} = x.$$

Знайдемо  $C_2$ :  $C_2 \mp \sqrt{1-1} = 1$ ,  $C_2 = 1$ .

Шуканий розв'язок має вигляд:

$$x = \mp \sqrt{1-y^2} + 1.$$

**16.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

**а)**  $4y'' - 11y' + 6y = 0$ ;

**б)**  $4y'' - 4y' + y = 0$ ;

**в)**  $y'' - 2y' + 37y = 0$ .

Для кожного з даних рівнянь складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його. За виглядом отриманих коренів характеристичного рівняння записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

**а)**  $4\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$ , корені  $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ ,  $\lambda_2 = 2$  – дійсні різні, тому

$$y = C_1 e^{\frac{3}{4}x} + C_2 e^{2x};$$

**б)**  $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ , корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$  – дійсні рівні, тому

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}};$$

**в)**  $\lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0$ , корені  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 6i$  – комплексно-спряжені, тому

$$y = e^x | C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x |.$$

**17.** Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною:  $y'' + 16y = f(x)$ .

**а)**  $f_1(x) = e^{2x}$ ;

**б)**  $f_2(x) = 1 - 4x$ ;

**в)**  $f_3(x) = 12 \cos 2x$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ .

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:  $y'' + 16y = 0$ ,  $\lambda^2 + 16 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm 4i$  – корені характеристичного рівняння, звідки загальний розв'язок однорідного рівняння.  $y_{CI} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ .

**а)**  $f(x) = e^{2x}$ . За виглядом спеціальної правої частини частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:  $y_{\times H} = A e^{2x}$ .

Знаходимо  $y'_{\times H} = 2A e^{2x}$ ,  $y''_{\times H} = 4A e^{2x}$ . Підставимо  $y'_{\times I}$ ,  $y''_{\times H}$  в початкове рівняння та знайдемо  $A$ :  $4A e^{2x} + 16A e^{2x} = 10 e^{2x}$ ,  $20A = 10$ ,  $A = \frac{1}{2}$ ,

тоді  $y_{CH} = \frac{1}{2} e^{2x}$  і загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y_{ZH} = y_{ZO} + y_{CH} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \frac{1}{2} e^{2x}.$$



б)  $f(x) = 1 - 4x$ . За виглядом спеціальної правої частини частинний розв'язок матиме таку структуру:  $y_{\times H} = Ax + B$ .

Знаходимо  $y'_{\text{чн}} = A$ ,  $y''_{\text{чн}} = 0$ . Підставимо  $y'_{\text{чн}}$ ,  $y''_{\text{чн}}$  в початкове рівняння та знайдемо  $A$  та  $B$ :  $16Ax + 16B = 1 - 4x$ ,  $A = -\frac{1}{4}$ ,  $B = \frac{1}{16}$  тоді

$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}$  і загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}.$$

в)  $f(x) = 12 \cos 2x$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ . За виглядом спеціальної правої частини частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:  $y_{\times H} = A \cos 2x + B \sin 2x$ .

Знаходимо  $y'_{\text{чн}} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$ ,  $y''_{\text{чн}} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$ .

Підставимо  $y'_{\text{чн}}$ ,  $y''_{\text{чн}}$  в початкове рівняння та знайдемо  $A$  і  $B$ :

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 16A \cos 2x + 16B \sin 2x = 12 \cos 2x, \quad \begin{array}{l} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \left| \begin{array}{l} 12A = 12, \\ 12B = 0, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1, \\ B = 0, \end{array} \right.$$

тоді  $y_{\text{чн}} = \cos 2x$  і загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \cos 2x.$$

Відшукаємо константи  $C_1$  та  $C_2$  з початкових умов.

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \cos 0 = 1, C_1 = 0.$$

$$y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - 2 \sin 2x,$$

$$y'(0) = 4C_2 \cos 0 - 2 \sin 0 = 1, C_2 = \frac{1}{4}.$$

Одержимо частинний розв'язок рівняння:  $y = \frac{1}{4} \sin 4x + \cos 2x$ .

**18.** Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних сталих.

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - y = 0, \lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, y_{\text{сг}} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x.$$

Вважаємо, що  $C_1$  та  $C_2$  функції від  $x$ , тобто:

$$y_{\text{зн}} = C_1(x) \cdot e^{-x} + C_2(x) \cdot e^x.$$

Визначаємо  $C_1(x)$  і  $C_2(x)$  з системи:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x), \end{cases}$$

яка для даного рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^x = \frac{2e^x}{e^x - 1}. \end{cases}$$

Знаходимо з неї  $C_2'(x)$ ,  $C_1'(x)$ , а потім за допомогою інтегрування знаходимо функції  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2. \quad \Delta(C_1') = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{2e^x}{e^x - 1} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{2e^{2x}}{e^x - 1};$$

$$\Delta(C_2') = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{2e^x}{e^x - 1} \end{vmatrix} = \frac{2}{e^x - 1};$$

За формулами Крамера маємо:

$$C_1(x) = \frac{\Delta(C_1')}{\Delta} = \frac{-e^{2x}}{e^x - 1}; \quad C_2(x) = \frac{\Delta(C_2')}{\Delta} = \frac{1}{e^x - 1};$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1} = \begin{vmatrix} e^x = t, \\ x = \ln t, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{vmatrix} = -\int \frac{t^2 dt}{t|t-1|} = -\int \frac{|t-1| + 1}{t-1} dt = -\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= -t - \ln|t-1| + C_1 = -e^x - \ln|e^x - 1| + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1} = \begin{vmatrix} e^x = t, \\ x = \ln t, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t|t-1|} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2 = \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right|.$$

Маємо такий загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(-e^x - \ln|e^x - 1| + C_1\right) \cdot e^{-x} + \left(\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C_2\right) \cdot e^x =$$

$$= C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x + e^x \cdot \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| - e^{-x} \cdot \ln|e^x - 1| - 1.$$

**19.** Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

Це однорідна система. Розв'яжемо її методом виключення. Про диференціюємо перше рівняння. Одержимо:  $x'' = -7x' + y'$ . Заміняючи в останньому рівнянні  $y'$  його виразом з другого рівняння системи, маємо  $x'' = -7x' - 2x - 5y$ . В останньому рівнянні замість  $y$  підставимо вираз  $y = x' + 7x$ , який знайшли з першого рівняння системи. Отримаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно  $x(t)$ :

$$x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x), \quad x'' + 12x' + 37x = 0.$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i;$$

$$x = e^{-6t} | C_1 \cos t + C_2 \sin t |.$$

Знаходимо  $x'$ , а потім  $x$  та  $x'$  підставимо в  $y = x' + 7x$ .

$$\begin{aligned} x' &= -6e^{-6t} | C_1 \cos t + C_2 \sin t | + e^{-6t} | -C_1 \sin t + C_2 \cos t | = \\ &= e^{-6t} | C_1 | -6 \cos t - \sin t | + C_2 | -6 \sin t + \cos t | |. \end{aligned}$$

Маємо:  $y = e^{-6t} | C_1 | \cos t - \sin t | + C_2 | \cos t + \sin t | |.$

Шуканий розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = e^{-6t} | C_1 \cos t + C_2 \sin t | \\ y = e^{-6t} | C_1 | \cos t - \sin t | + C_2 | \cos t + \sin t | |. \end{cases}$$

## Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.
2. Грималюк В. П. Вища математика: У 2 ч.: Навч. посіб. / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. — К.: Віпол, 2004. — Ч. 1. — 376 с.2
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. Юрик. — К.: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.
4. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн./ Дубовик В. П., Юрик І. І. — К.: А.С.К., 2005. — 648 с.
5. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.
6. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
7. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

### Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. <http://www.nbuv.gov.ua/> – сайт «Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського».
2. — сайт Національний університет «Чернігівська політехніка»
3. <http://kpi.ua/> – сайт «Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».