МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Чернігівська політехніка»

Диференціальні рівняння І порядку

методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
з дисципліни "Вища математика"
для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 6 від 1.12. 2020р.

Чернігів - 2021

Диференціальні рівняння І порядку методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей ./Укл.: С.П. Корнієнко, В.П. Мурашковська– Чернігів:2021, - 56с.

Укладачі:

Корнієнко Світлана Петрівна, доцент, кандидат технічних наук
Мурашковська Віра Петрівна, старший викладач

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, Чернігівського національного технологічного університету

Зміст

Вступ

Ці методичні вказівки укладені у відповідності до Навчальної програми з вищої математики для інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Дана робота призначена для студентів, які вивчають вищу математику і містять завдання до індивідуальних розрахунково–графічних робіт з вищої математики за темою: диференціальні рівняння і передбачені робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями.

Курс вищої математики разом із курсами інших загальноосвітніх дисциплін складає основу фундаментальної підготовки сучасних інженерів та економістів. Сучасне життя потребує від майбутніх фахівців оволодіти основними математичними навичками, які вони отримують, вивчаючи курс вищої математики в університеті.

Основною формою навчання студента є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення матеріалу за навчальними посібниками, розв'язання задач, самоперевірки, виконання контрольних, розрахунково-графічних робіт. Допомогою в оволодінні матеріалом стають також лекційні та практичні заняття та консультації, під час яких студент може звертатись до викладача з питаннями, які викликали труднощі під час самостійної роботи.

Проте студент повинен розуміти, що тільки при систематичній наполегливій самостійній роботі із використанням навчальних посібників і наступного розв'язання рекомендованих задач допомога викладача університету стане справді ефективною. Завершальним етапом вивчення окремих частин курсу вищої математики є складання заліків та іспитів у відповідності з навчальним планом.

Метою індивідуальних розрахунково-графічних робіт, поданих в методичних вказівках, є допомога студенту поглибити теоретичні знання, засвоїти основні формули, навчитись розв'язувати ряд простих типів задач та перевірка результатів самостійної роботи студента з вивчених тем. Розв'язування поданих завдань, також дозволяє студенту зрозуміти степінь засвоєння їм відповідного розділу курсу, вказує на прогалини, які виникли під час вивчення матеріалу, допомагає сформулювати питання викладачам під час консультацій.

Виконуючи домашню розрахунково-графічну роботу студент повинен самостійно розв'язати запропоновані викладачем індивідуальні домашні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи або останні дві цифри номера залікової книжки.

Розв'язання завдань з поясненнями подається на аркушах формату А4 (запис в яких виконується з одного боку). Умову завдань необхідно переписувати повністю без скорочень, після чого надавати розв'язання цього завдання, супроводжуючи його необхідним поясненням і з посиланням на відповідні формули, теореми, правила тощо. Побудови графіків потрібно виконувати олівцем на тому ж аркуші, де і відповідне розв'язання, або на папері з масштабною сіткою. На титульній сторінці розрахунково-графічної роботи вказують номер варіанту, прізвище та ініціали студента, групу, прізвище та ініціали викладача.

Після перевірки роботи викладачем, якщо є зауваження, студент повинен розв'язати неправильно виконані завдання заново і повторно подати його на перевірку. Після позитивної оцінки викладача робота підлягає захисту. Результат цієї роботи враховується при складанні студентом заліку або іспиту.

Окрім завдань до розрахунково-графічної роботи методичні вказівки містять рекомендовану літературу з відповідної теми курсу вищої математики.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних занять, як довідковий матеріал та в якості задачника при проведенні самостійних та модульно – контрольних робіт.

1 ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Вивчаючи різноманітні процеси і природні явища, та розв’язуючи задачі з фізики, техніки, біології, економіки, не завжди можна безпосередньо встановити прямий зв’язок між величинами, які описують той чи інший процес. Найчастіше, одержують математичні залежності у вигляді рівнянь, до яких крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій входять ще і швидкісні зміни функцій, відносно незалежних величин, тобто похідні від шуканих функцій. Інакше кажучи невідома функція знаходиться під знаком похідної. Такі рівняння називають диференціальними.

Розглянемо найпростіший приклад:

Знайти закон прямолінійного руху точки, якщо швидкість руху в будь-який момент пропорційна часу.

Припустимо, що $S = S(t)$ – функція, яка визначає шуканий закон руху в залежності від часу t. Враховуючи фізичний зміст похідної, маємо що $v = S'(t)$ і умову задачі, що $v = kt$, де k – коефіцієнт пропорційності. Одержимо, що $S'(t) = kt$. Ми одержали шукану функцію під знаком похідної – це диференціальне рівняння.

Одержане рівняння $S'(t) = kt$ означає, що потрібно знайти таку функцію $S(t)$, похідна якої буде дорівнювати kt. Згадавши правила знаходження похідних елементарних функцій, неважко помітити, що $S(t) = k\frac{t^2}{2} + c$, де c – довільна стала, (дійсно $\left(k\frac{t^2}{2} + c\right)' = kt$, тобто підтверджується початкове рівняння $S'(t) = kt$). Отже, ми одержали безліч функцій $S(t)$ які відрізняються одна від одної значеннями сталої c. Але потрібно серед них знайти ту функцію, яка відповідає умові нашої задачі, тобто є її розв’язком.

Спробуємо задати додаткові умови для визначення сталої c у початковий момент часу $t = 0$ і шлях $S = 0$. Таким чином, початкові умови $S(0) = 0$, підставимо у вираз для $S(t)$, одержимо $0=\frac{k\cdot 0}{2}+c$; $c=0$, тоді $S(t)=\frac{kt^2}{2}$. Зауважимо, що у випадку, коли тіло падає в пустоті, то $k=g$, де g – прискорення вільного падіння, то шлях пройдений тілом, що падає визначається законом $S(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Ми розглянули приклад найпростішого диференційного рівняння – рівняння виду: $y'=f(x)$, де $f(x)$ – відома функція аргумента x, $y=y(x)$ – шукана функція аргумента x. Згадавши, що $y'=\frac{dy}{dx}$ одержимо рівняння $\frac{dy}{dx}=f(x)$. Розв'язки цього рівняння неважко одержати, виходячи з основних властивостей невизначеного інтеграла, а саме: $\int dy=y+c$, і $\int f(x)dx=F(x)+c$, де $(F(x))'=f(x)$, тоді $\int dy=\int f(x)dx+c$; $y=\int f(x)dx+c$ або $y=F(x)+c$, де $F(x)$ – первісні функції для функції $f(x)$ і c – довільна стала.

Отже, розв'язуючи рівняння $y'=f(x)$ ми завжди одержимо множину розв'язків $y=\int f(x)dx+c$, яку називають загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Мати безліч розв'язків – характерна властивість диференціальних рівнянь. Тому, розв'язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна одночасно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб вибрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка притаманна саме цьому процесу потрібно мати певну додаткову інформацію, наприклад, початковий стан процесу, без якої задача є невизначеною. Розв'язок, який утворюється із загального при окремому значенні сталої c називають окремим або частинним розв'язком. Отже, окремий розв'язок найпростішого диференціального рівняння цілком визначається, якщо задати певне (початкове) значення y_0 функції $y(x)$, тобто

y_0 – це значення якому повинна дорівнювати функція $y(x)$ при деякому початковому значенні x_0 – незалежної змінної: $y_0 = y(x_0)$. Числа y_0, x_0 – називають початковими даними, а рівняння $y_0 = y(x_0)$ – початковою умовою.

Отже, якщо відомо достатньо інформації про перебіг того чи іншого фізичного процесу або явища, то можна спробувати побудувати його математичну модель. Найчастіше такою моделлю є диференціальні рівняння, одним з розв'язків якого і є шукана функціональна характеристика. Тому потрібно знати прийоми розв'язування певних типів диференціальних рівнянь і рівнянь, що зводяться до них.

1.1 Загальні теоретичні відомості про диференціальні рівняння

Рівняння називають ***диференціальним***, якщо воно містить як змінну x, шукану функцію $y = y(x)$ і похідні шуканої функції y', y'', …, $y^{(n)}$. Найвищий порядок похідної шуканої функції, яка входить в це рівняння визначає ***порядок диференціального рівняння***. Наприклад:

$y''' + 2y' + y = \sin x$ – диференціальне рівняння 3-го порядку;

$(y'')^2 + 1 = 0$ – диференціальне рівняння 2-го порядку;

$y' + 2y = \cos x$ – диференціальне рівняння 1-го порядку.

Якщо шукана функція $y = y(x)$ залежить від однієї змінної x то диференціальне рівняння називають ***звичайним диференціальним рівнянням***.

Рівняння виду $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ називають ***загальним диференціальним рівнянням n-го порядку***.

Розв'язати звичайне диференціальне рівняння означає знайти таку функцію $y = y(x)$, яка диференційовна на певному інтервалі (a, b), і разом із своїми похідними задовольняє диференціальному рівнянню, причому функцію $y = y(x)$ будемо називати ***загальним розв'язком диференціального рівняння***. При цьому, як сказано вище, ми одержуємо нескінченну множину розв'язків.

В загальному випадку, ***загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку*** має вид $y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, тобто містить n сталих.

Часто одержують розв'язок в неявному виді $\Phi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ і його називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння n-го порядка.

Якщо кожній сталій $c_1, c_2, ..., c_n$ надати певного числового значення, то одержимо частинні розв'язки. Графік кожного частинного розв'язку називають ***інтегральною кривою*** диференціального рівняння.

Для того, щоб із загального розв'язку виділити один частинний розв'язок потрібно надати початкові умови:
при $x = x_0$; $y_0 = y(x_0)$; $y'_0 = y'(x_0)$; $y''_0 = y''(x_0)$, …, $y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0)$, яких достатньо для знаходження значень n сталих і тим самим знаходження частинного розв'язку.

1.2 Загальні теоретичні відомості про диференціальні рівняння 1-го порядку та їх геометрична інтерпретація

Диференціальним рівнянням 1-го порядку називають рівняння виду $F(x, y, y') = 0$, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'. Рівняння може не містити явно x або y, але обов'язково повинно містити похідну y' (бо в протилежному випадку воно не буде диференціальним). Якщо це рівняння нерозв'язне відносно похідної y', то його називають неявним диференціальним рівнянням 1-го порядку. Якщо воно розв'язне відносно похідної y'. То рівняння записують у виді $y' = f(x, y)$ (або $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$), де $f(x, y)$ − задана і неперервна в деякій області D простору R^2 функція двох змінних x і y. Область $D \subset R^2$ називають ***област[і]ю визначення*** диференціального рівняння. Рівняння $y' = f(x, y)$ ще називають диференціальним рівнянням 1-го порядку, записаним в ***нормальній формі***.

Якщо функція $f(x,y)$ в околі точки $(x_0,y_0)\in D$ є необмеженою, тобто $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\to\infty$, то розглядають диференціальне рівняння $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(x,y)}$, яке називається перевернутим до диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$. Перевернутим рівнянням користуються тоді, коли воно розв'язується легше, нж рівняння $y'=f(x,y)$.

Якщо рівняння $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ записані у виді $dy-f(x,y)dx=0$ і в випадку коли $f(x,y)=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, то помноживши обидві частини рівняння на вираз $N(x,y)\neq 0$, одержимо диференціальне рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ в так званій ***симетричній формі*** запису.

Загальним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку, розв'язаного відносно похідної $y'=f(x,y)$ на скінченому або нескінченому інтервал (a,b) або $(-\infty,+\infty)$ будемо називати таку функцію $y=y(x)$, яка:

1) на інтервалі (a,b) має неперервну похідну $y'(x)$ і при $x\in(a,b)$ не виходить за межі області D;
2) $\forall x\in(a,b)$ виконується рівність $y'(x)=f(x,y(x))$, тобто ця функція задовольняє рівнянням $F(x,y(x),y'(x))=0$ і $y'(x)=f(x,y'(x))$.

Якщо рівняння $\Phi(x,y)=0$ задає функцію $y=y(x)$ неявно, то співвідношення $\Phi(x,y)=0$ називають ***загальним інтегралом***.

Графік розв'язку диференціального рівняння називають інтегральною кривою диференціального рівняння.

Якщо при розв'язуванні диференціального рівняння приходять до знаходження невизначених інтегралів відомих функцій, то кажуть, що рівняння ***інтегрується в квадратурах***.

Теорема Коші (про існування і єдність розв'язку).

Якщо функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені і неперервні у відкритій області D площини Oxy і точка $(x_0, y_0) \in D$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y' = f(x,y)$, який задовольняє вимозі $y = y_0$ при $x = x_0$, тобто $y_0 = y(x_0)$.

Отже, умова $y(x_0) = y_0$ – це початкова умова, згідно з якою розв'язок $y = y(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в зданій точці x_0.

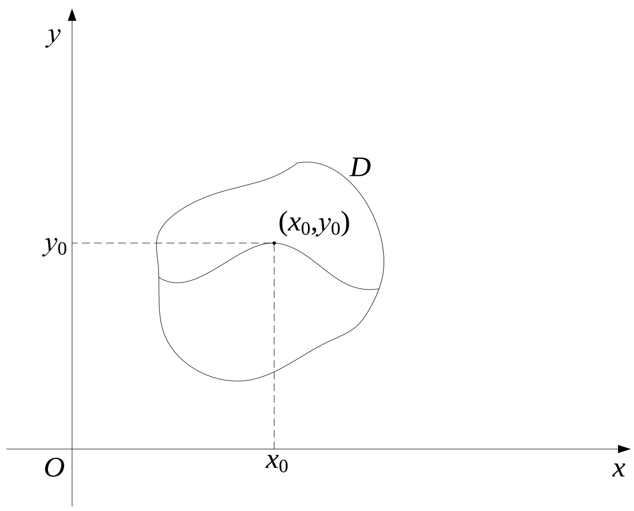


Рис. 1.

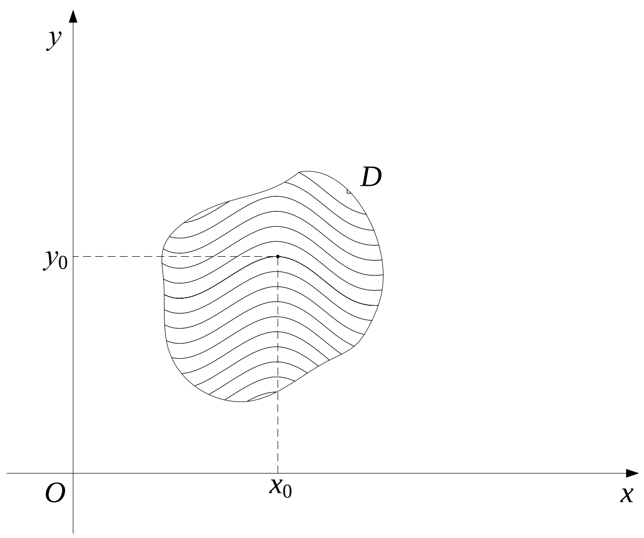


Рис. 2.

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку. Геометрично теорема Коши стверджує, що через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить єдина інтегральна крива (рис.1).

Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи за межі області D, то дістанемо різні інтегральні криві (рис. 2). Це наочно показує, що рівняння $y' = f(x,y)$ має безліч розв'язків, $y = y(x,c)$, де c – довільна константа.

Різні інтегральні криві залежать від параметра c. Множину інтегральних кривих називають ***сім'єю***, або ***інтегральною сім'єю кривих***, або ***однопараметричною сім'єю***

кривих.

Задачу знаходження розв’язку, який задовольняє початковій умові називають задачею Коші, або задачею знаходження частинного розв’язку $y = y(x, c_0)$.

Геометрично розв’язати задачу Коші означає з сім’ї інтегральних кривих виділити ту, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Точки площини, в яких не виконується умова теореми Коші (може $f(x, y)$ або $f'_y(x, y)$ розривні в цих точках) називають ***особливими***. Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих, або не проходить жодної. Розв’язок диференціального рівняння в кожній точці якого порушується умова єдності називають ***особливим розв’язком***. По суті – це розв’язок диференціального рівняння, який не можна одержати із загального $y = y(x, c)$ ні для яких значень початкових умов.

Графік особливого розв’язку називають ***особливою інтегральною кривою***. Нехай на площині Oxy задано сім’ю інтегральних кривих. Лінія L називається ***обвідною*** сім’ї кривих, якщо вона в кожній своїй точці дотикається до однієї інтегральної кривої і в різних точках дотикається до різних кривих.

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є ***обвідною*** сім’ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв’язком.

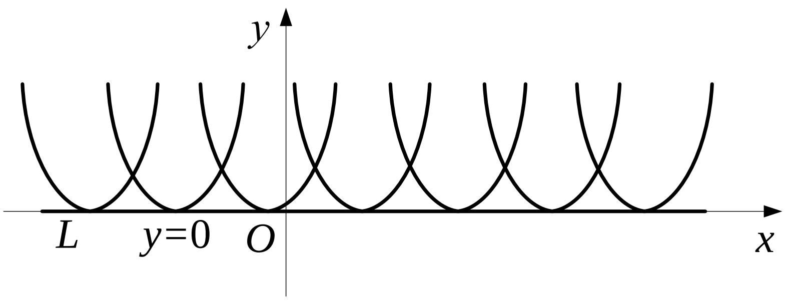


Рис. 3.

Наприклад, рівняння $y' = \sqrt{y}$ має сім’ю інтегральних кривих парабол $y = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2$ (рис. 3). Крім того $y = 0$ є також розв'язком цього рівняння. Цей розв'язок особливий, оскільки функція $f(x,y)=\sqrt{y}$ має $f'_y=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ і при $y=0$ розривна. Пряма $y=0$ дотикається до сім'ї парабол і є обвідною.

Тому можна сказати, що явна функція $y=y(x,c)$, яка залежить від аргументу x і сталої c називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння 1-го порядка.

Для довільної точки площини (x_0,y_0) можна знайти значення $c=c_0$. Що функція $y=y(x,c_0)$ задовольняє початкову умову $y_0=y(x_0,c_0)$, тоді функція $y=y(x,c_0)$ називається частинним розв'язком. Частинний розв'язок утворюється із загального при певному значенні сталої c_0, яка задовольняє початковим умовам.

Якщо загальний розв'язок записаний неявно, тобто за допомогою рівняння $\Phi(x,y,c)=0$, то його називають ***загальним інтегралом***, і відповідно частинний розв'язок $\Phi(x,y,c_0)=0$ – частинним інтегралом.

Розглянемо геометрично рівняння $y'=f(x,y)$. Нехай множина D – область визначення диференціального рівняння, є множиною точок (x,y) на площині Oxy. Візьмемо довільну точку $M_0(x_0,y_0)\in D$ і підставимо в праву частину рівняння $y'=f(x_0,y_0)$, тобто, це значення похідної $y'(M_0)$, яка, як відомо, є кутовим коефіцієнтом дотичної, проведеної в точку (x_0,y_0) до інтегральної кривої, яка проходить через цю точку: $y'(x_0,y_0)=k_{0дот}=\operatorname{tg}\alpha_0$ $\alpha_0=\operatorname{arctg}(y'(x_0,y_0))=\operatorname{arctg}(f(x_0,y_0))$. Аналогічно в точці $M_1(x_1,y_1)$ рівняння ставить у відповідність напрям $y'(M_1)=f(x_1,y_1)=k_{1дот}=\operatorname{tg}\alpha_1$, $\alpha_1=\operatorname{arctg}(y'(x_1,y_1))=\operatorname{arctg}(f(x_1,y_1))$, тобто рівняння $y'=f(x,y)$ кожній точці $(x,y)\in D$ ставить у відповідність значення кута $\alpha=\operatorname{arctg}(f(x,y))$.

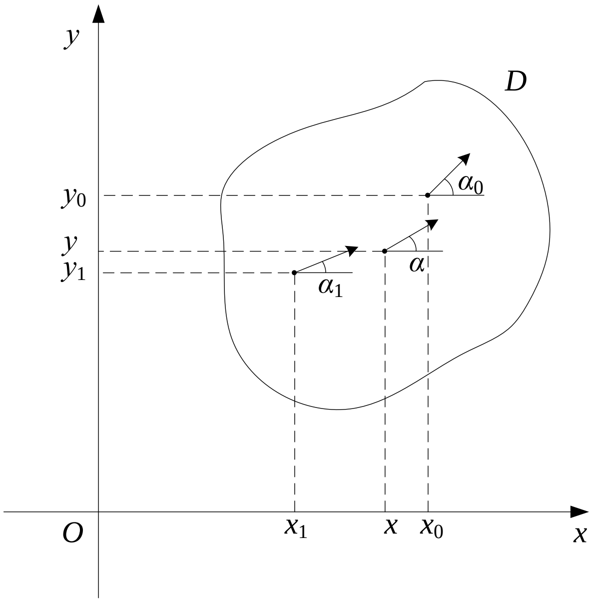


Рис. 4.

Кожній точці $M\left(x,y\right)\in D$ відповідає стрілка з кутовим коефіцієнтом $\text{tg}\alpha=f\left(x,y\right)$. Інколи зображують не стрілками, а маленькими відрізками. Ми можемо побудувати декілька стрілок (рис. 4), але потрібно уявити собі, що ці стрілки – відрізочки проведені в кожній точці області D. Одержаний рисунок називається ***полем напрямів***. Тобто рівняння $y'=f\left(x,y\right)$ задає так зване поле напрямів, і інтегральна крива повинна проходити так, щоб в кожний своїй точці йти вздовж поля напрямів, тобто дотикатись до відрізочка в цій точці (рис. 5).

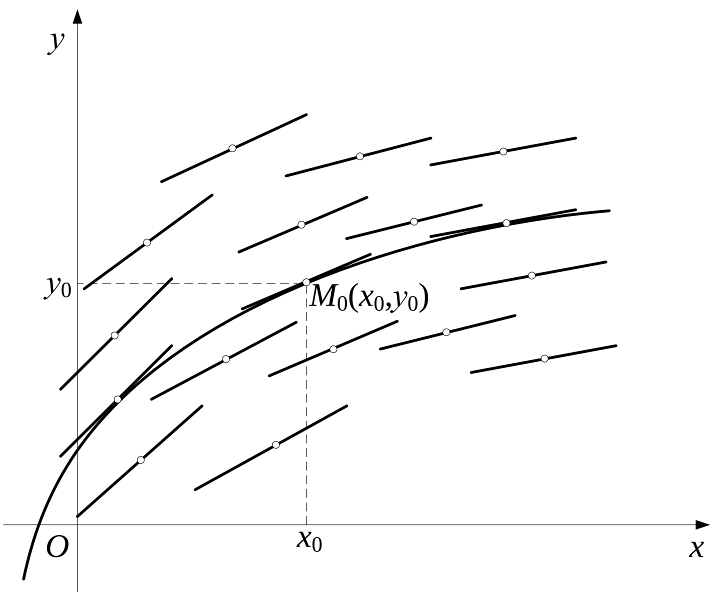


Рис. 5.

Таким чином, рівняння $y'=f\left(x,y\right)$ визначає на площині Oxy поле напрямів, а розв’язок цього рівняння – інтегральну криву, яка в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

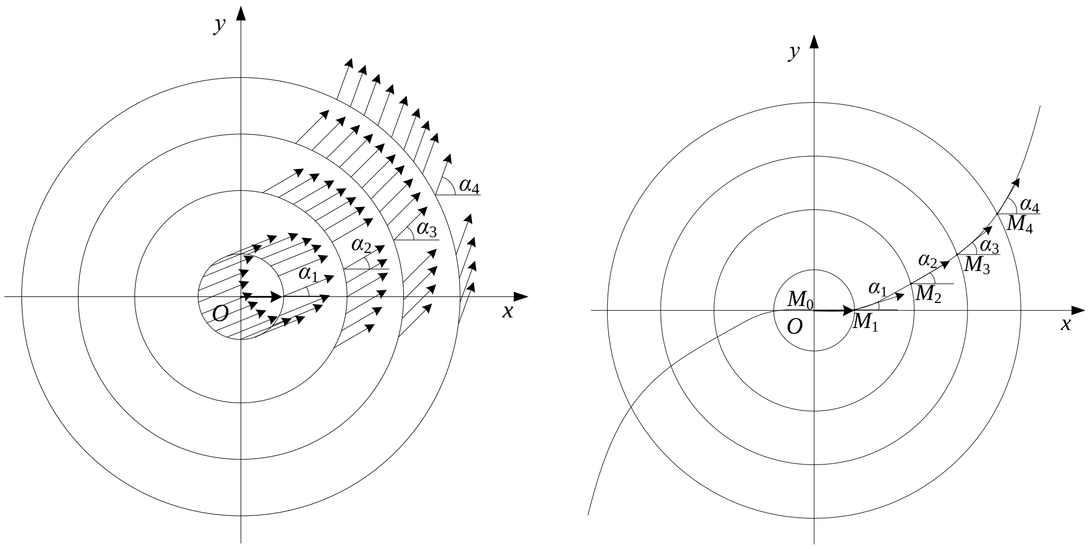
Знаючи поле напрямів диференціального рівняння можна побудувати його інтегральні криві. Для полегшення побудови поля напрямів використовують метод ізоклін. ***Ізокліною*** називається крива на площині Oxy в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих мають один і той самий напрям (Ізокліна – це геометричне місці точок, в яких напрям поля однаковий).

Тобто усі інтегральні криві, які перетинають ізокліну в точках перетну нахилені до осі Oxy під одним і тим самим кутом. Звідси назва «ізокліна» – лінія однакового нахилу (напряму).

Рівняння $y' = f(x, y)$ визначає ізокліну, яка відповідає кутовому коефіцієнту $y' = a = const$, тобто $f(x, y) = a$, де a – довільний параметр. Різним значенням параметра a на площині Oxy відповідають різні ізокліни, при чому напрям кожної ізокліни визначається кутом $\alpha = \mathrm{arctg}\ a$.

<u>Приклад.</u> Знайти поле напрямів диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ і інтегральну криву, яка проходить через точку $O(0,0)$

Складаємо рівняння ізокліни: $x^2 + y^2 = a$, бачимо, що ізоклінами є кола з центром в точці $O(0,0)$ і радіуса $\sqrt{a}$, якщо $a_0 = 0$, то одержимо точку $(0,0)$ напрям поля в якій $\mathrm{arctg}0 = 0^\circ$, $\alpha = 0$ збігається з віссю Ox; якщо $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то



а) б)

Рис. 6.

$\alpha_1=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha_1=30^\circ$ – це означає, що у кожній точці цього кола напрям дорівнює 30°. Якщо $a_2=\dfrac{1}{2}$, то $\alpha_2=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\approx 26^\circ$, якщо $a_3=1$, то $\alpha_3=\operatorname{arctg}1=45^\circ$ – напрям цієї ізолінії 45°; $a_4=\sqrt{3}$, то $\alpha_4=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=60^\circ$ (рис.6а).

Проведемо з точки $0,0$ відрізок під кутом $\alpha_0=0$ до перетину з найближчою ізокліною, одержимо M_1. З M_1 під кутом $\alpha_1=30^\circ$ відрізок до перетину з ізокліною, одержимо M_2. З M_2 під кутом $\alpha_2=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\approx 26^\circ$, одержимо точку M_3. З точки M_3 відрізок під кутом α_3, одержимо M_4. Ламана $M_0M_1M_2M_3M_4$ і є наближеним зображенням розв'язку рівняння (рис. 6б). Ця ламана тим точніше зображає розв'язок, чим густіше розташовані ізокліни. Можна намалювати інтегральну криву, яка б в кожній точці дотикалась до відрізка напряму поля.

Приклад. Побудувати інтегральні криві для рівняння $y'=\dfrac{|xy|}{xy}$.

Областю визначення цього рівняння є вся площина Oxy крім прямих $x=0$ і $y=0$; тому в області визначення:

$$y'=\begin{cases}1, & xy>0;\\ -1, & \textit{якщо } xy<0.\end{cases}$$

Розглянемо рівняння $y' = 1 \Rightarrow dx = dy$; $\int dy = \int dx + c$; $y = x + c$ – загальний розв'язок.

Геометрично – це множина прямих, за умови

$$xy > 0 \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0; \\ x > 0; \end{cases} \; I\ \textit{чверть}\ ; \\ \begin{cases} y < 0; \\ x < 0; \end{cases} \; III\ \textit{чверть}\ . \end{array}\right.$$

Виходячи з цього, частини прямих розташовані в I і в III чвертях (рис. 7).

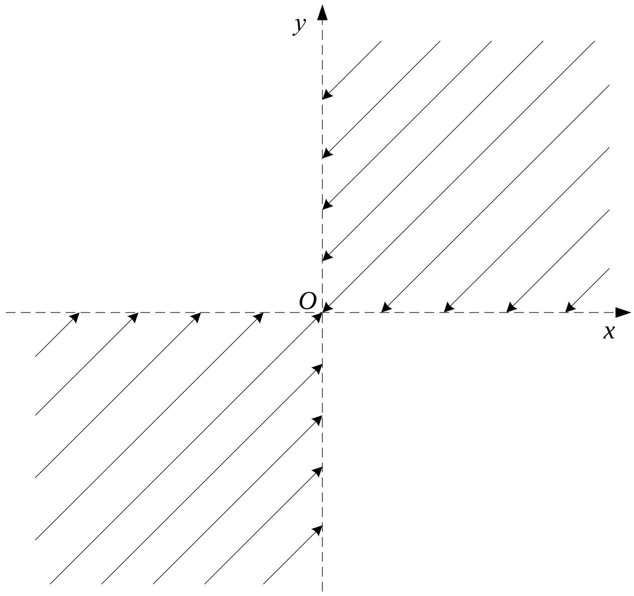


Рис. 7.

Розв'язуючи $y' = -1$; $dy = -dx$; $\int dy = -\int dx + c$; $y = -x + c$ – множина прямих за умови $xy < 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0; \\ x < 0; \end{cases} \; II\ \textit{чверть}\ ; \\ \begin{cases} y < 0; \\ x > 0; \end{cases} \; VI\ \textit{чверть}\ . \end{array}\right.$$

Виходячи з цього, частини прямих розташовані в II і в VI чвертях (рис. 8).

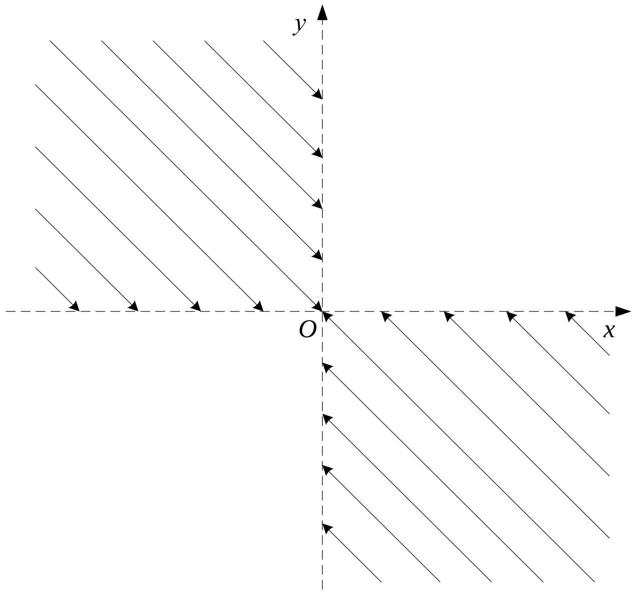


Рис. 8.

Остаточно одержуємо (рис. 9):

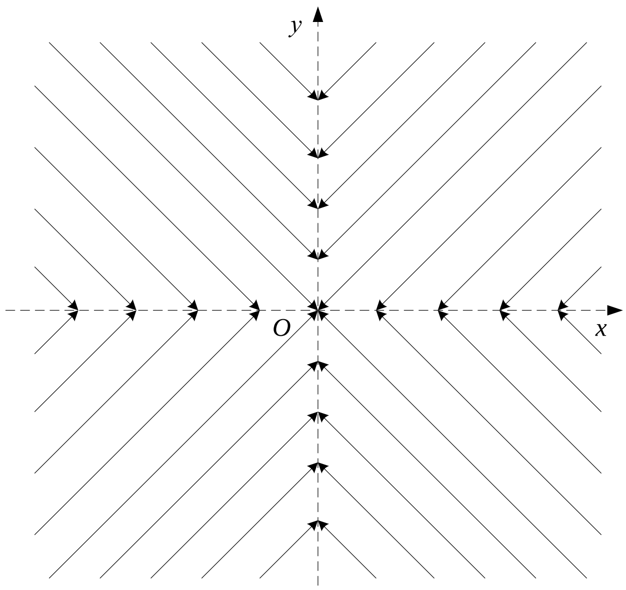


Рис. 9.

1.3 Диференціальні рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними і звідні до них

Розглянемо типи рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Зрозуміло, що не всі диференціальні рівняння, які інтегруються в квадратурах мають розв'язок, який виражається через елементарні функції. Проте існують окремі типи диференціальних рівнянь для яких це можливо.

Найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$ або $\frac{dy}{dx} = f(x)$, загальний розв'язок якого ми вже одержували: $y = \int f(x)\,dx + c$.

Задамо початкову умову: $y_0 = y(x_0)$, де $x_0 \in (a,b)$. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку (a,b), то для диференціального рівняння $y' = f(x)$ виконується умова теореми Коші, тобто через точку (x_0, y_0) можна провести тільки одну інтегральну криву, тобто єдиний розв'язок, який можна записати $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

<u>*Приклад.*</u> *Розв'яжемо диференціальне рівняння* $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$, *знайти розв'язок при* $x_0 = 0$.

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \sin^2 x dx = y_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}(1-\cos 2x)\,dx = y_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} dx - \frac{1}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\cos 2x\, d(2x) =$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}(x - x_0) - \frac{1}{4}(\sin 2x - \sin 2x_0) = y_0 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{2}\sin 2x_0\right)$$ при $x_0 = 0$.

$y_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + y_0$ – єдиний розв'язок для заданої початкової умови.

Розглянемо рівняння, яке явно не містить явно аргумента x, $\frac{dy}{dx} = f(y)$, тобто припустивши, що $f(y) \neq 0$.

$\frac{dy}{f(y)} = dx$; $x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$ – загальний розв'язок.

Аналогічно, маючи початкові умови x_0, y_0 одержимо єдиний розв'язок $x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}$, що відповідає заданим початковим умовам.

Розглянемо $f(y) = 0$, тобто $y = y_0$ – корінь цього рівняння, який є ще й коренем рівняння $y' = f(y)$. Геометрично $y = y_0$ – це пряма паралельна осі Ox. Якщо через точку цієї прямої проходить тільки одна інтегральна крива, то це окремий розв'язок, якщо через точку (x_0, y_0) цієї прямої проходить безліч інтегральних кривих, то $y = y_0$ особливий розв'язок.

<u>*Приклад*</u>*. Розв'язати диференціальне рівняння* $y' = \sqrt[3]{y}$.

Перепишемо рівняння в виді $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$. Припустимо, що $y \neq 0$, $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx$;

$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} + c = \int dx$; $x = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + c$ – загальний інтеграл.

$x - c = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}$; $y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(x - c)$; $y = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x - c)\right)^3}$;

$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}(x - c)^3}$ – загальний розв'язок.

На площині Oxy це сім'я віток парабол за припущенням $y \neq 0$.

Розглянемо $y = 0$, він задовольняє рівнянню, і є особливим оскільки через кожну точку осі Ox проходять три інтегральні криві – дві з сім'ї парабол і одна вісь Ox (рис. 10).

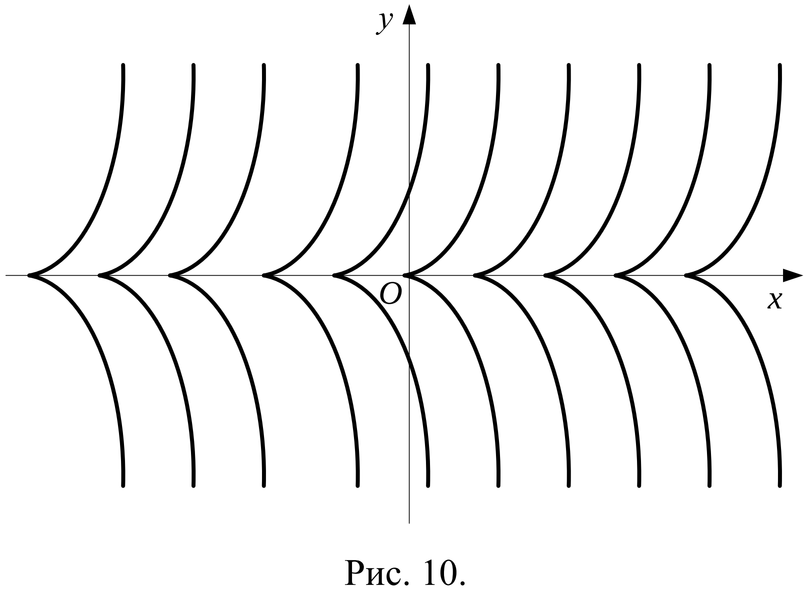


Рис. 10.

Якщо диференціальні рівняння 1-го порядку записано за допомогою симетричної формі $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ і функція $M(x,y)$ не залежить від y, а $N(x,y)$ не залежить від x, то одержимо рівняння $M(x)dx + N(y)dy = 0$, яке називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***.

Знайти розв’язок цього рівняння можна за допомогою інтегрування обох частин рівняння $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$.

Потрібно зауважити, що всі подальші методи розв’язування диференціальних рівнянь 1-го порядку базуються на зведенні цих рівнянь до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо в диференціальному рівнянні 1-го порядку, записаному в симетричній формі:

$$M(x,y) = M_1(x) \cdot N_1(y)$$
$$N(x,y) = M_2(x) \cdot N_2(y)$$

то одержимо рівняння:

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0.$$

Поклавши, що $N_1(y) \neq 0$; $M_2(x) \neq 0$ і помноживши обидві частини на $\frac{1}{N_1(y) \cdot M_2(x)}$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Після інтегрування одержимо загальний інтеграл:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$$

Потрібно сказати, що при множенні рівняння на $\frac{1}{N_1(y) \cdot M_2(x)}$ можна втратити розв’язки $N_1(y) \cdot M_2(x) = 0$, визначаючи з цього рівняння розв’язки $y = \varphi(x)$ потрібно перевірити, чи є ці розв’язки розв’язками рівняння

$M_1(x)\cdot N_1(y)dx+M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0$, якщо ні, то розв’язок відкидають, якщо так, то перевіряють чи входить одержаний розв’язок до загального інтегралу. Якщо він входить до загального інтегралу, то ми одержали частинний розв’язок, якщо не входить – то особливий.

Розглянемо випадок, коли диференціальне рівняння 1-го порядку розв’язане відносно похідної, тобто записано в нормальному виді $y'=f(x,y)$, де $f(x,y)=g(x)\cdot\varphi(y)$; $y'=g(x)\cdot\varphi(y)$, переписавши $y'=\dfrac{dy}{dx}$ одержимо $\dfrac{dy}{dx}=g(x)\cdot\varphi(y)$. Поклавши $\varphi(y)\neq 0$ можна відокремити змінні помноживши обидві частини на $\dfrac{dx}{\varphi(y)}$, одержимо: $\dfrac{dx}{\varphi(y)}=g(x)dx$, загальний інтеграл якого має вид $\int\dfrac{dx}{\varphi(y)}=\int g(x)dx+c$. Також потрібно перевірити рівняння $\varphi(y)=0$, якщо $\varphi(y_0)=0$, то стала $y=y_0$ є розв’язком рівняння. Цей розв’язок також може бути як частинним, так і особливим.

Розглянемо приклади таких рівнянь.

1) $x^2dx=ydy$; $x^2dx-ydy=0$; $\int x^2dx-\int ydy=c$; $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{y^2}{2}=c$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

2) $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$ обидві частини рівняння поділимо на вираз $(y^2-1)(x^2-1)\neq 0$, одержимо:

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0;\ \int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=c;$$

$\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=c$; помножимо обидві частини рівняння на $\dfrac{1}{2}$;

$$\frac{1}{2}c=c;\ \ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|y^2-1\right|=c;\ c=\ln c;\ \ln\left((x^2-1)(y^2-1)\right)=\ln c;$$

$(x^2-1)(y^2-1)=c$ – загальний інтеграл.

Розв'язок рівняння $(x^2-1)(y^2-1)=0$; $y=\pm1$; $x=\pm1$ не є особливим, оскільки їх одержуємо із загального інтеграла при $c=0$.

3) $(1+x)ydx-(1+y)xdy=0$. Покладемо, що $xy\neq0$, поділимо обидві частини рівняння на xy, одержимо:

$$\frac{1+x}{x}dx-\frac{1+y}{y}dy=0;\ \int\frac{1+x}{x}dx-\int\frac{1+y}{y}dy=c;\ \ln|x|+x-\ln|y|-y=c;$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|+x-y=c \text{ – загальний інтеграл.}$$

Розглянемо $xy=0$; $x=0$, $y=0$ не одержується з загального інтеграла ні для яких значень сталої c, тому $x=0$, $y=0$ – особливі розв'язки.

4) $y'=xy^2+2xy$, запишемо це рівняння: $\frac{dy}{dx}=xy(y+2)$, відокремлюємо змінні помноживши обидві частини на $\frac{dx}{y(y+2)}$, поклавши $y(y+2)\neq0$, тоді:

$$\frac{dy}{y(y+2)}=xdx;\ \int\frac{dy}{y(y+2)}=\int xdx+c;\ \int\frac{dy}{(y+1)^2-1}=\frac{x^2}{2}+c;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1-1}{y+1+1}\right|=\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2};\ \ln\left|\frac{y}{y+2}\right|=x^2+c;\ \frac{y}{y+2}=e^{x^2+c};\ \frac{y}{y+2}=e^{x^2}\cdot e^c;\text{ оскільки}$$

$$e^c=c\text{, то: }\frac{y}{y+2}=e^{x^2}c \text{ – загальний інтеграл.}$$

$y(y+2)=0$; $y=0$ або $y=-2$. Якщо $y=0$ то $c=0$; $y=-2$, $c\to\infty$, тому це рівняння особливих розв'язків не має.

5) $e^{x^2}dx-e^{y^2}dy=0$, $\int e^{x^2}dx-\int e^{y^2}dy=c$ – загальний інтеграл, але через елементарні функції невизначені інтеграли не виражаються, хоча розв'язок диференціального рівняння ми одержали.

6) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(1+x^2)dy+ydx=0$, який відповідає умові $y(0)=1$.

Покладемо $y(1+x^2)\neq0$, відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{1+x^2}=0;\ \int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{1+x^2}=c;\ \ln|y|+\mathrm{arctg}x=c$$ – загальний інтеграл.

Використовуємо початкову умову: $y(0)=1 \Rightarrow y_0=1;\ x_0=0$.

Підставляємо $\ln 1+\mathrm{arctg}0=c$; $0+0=c$; $c=0$, тобто $\ln|y|+\mathrm{arctg}x=0$ – частинний розв’язок, або $y=e^{\mathrm{arctg}x}$.

1.4 Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку

Розглянемо ще однорідні диференціальні рівняння, які за допомогою певної підстановки дуже швидко зводяться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Але спочатку потрібно сказати, що функція $f(x,y)$ називається ***однорідною функцією*** n***-го виміру*** відносно змінних x і y, якщо $\forall t\in R,\ t\neq 0$ виконується тотожність $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ і точка $(tx,ty)\in D(f)$.

Наприклад $f(x,y)=x^3-5xy^2$ є однорідною функцією 3-го виміру, оскільки:

$$f(tx,ty)=(tx)^3-5(tx)(ty)^2=t^3x^3-5t^3xy^2=t^3(x^3-5xy^2)=t^3f(x,y).$$

Якщо $f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y)$, то функція $f(x,y)$ – однорідна функція ***нульового виміру***, або просто однорідна.

<u>*Наприклад:*</u> $f(x,y)=\dfrac{3x+2y}{2\sqrt{xy}}$.

$$f(tx,ty)=\frac{3(tx)+2(ty)}{2\sqrt{txty}}=\frac{t(3x+2y)}{2\sqrt{t^2xy}}=\frac{t(3x+2y)}{2t\sqrt{xy}}=t^0\frac{3x+2y}{2\sqrt{xy}}=\frac{3x+2y}{2\sqrt{xy}}=f(x,y)$$

Отже, диференціальне рівняння розв’язане відносно похідної і записане в нормальному виді $y'=f(x,y)$ є ***однорідним***, якщо $f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру, і диференціальне рівняння записане в симетричному виді $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ є однорідним, якщо функція $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями однакового виміру.

Покажемо, що однорідне рівняння $y'=f(x,y)$ дуже швидко зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y=u\cdot x$, де $u=u(x)$ – деяка невідома функція. Тоді знайдемо похідну функцію за правилом диференціювання добутку: $y'=u'x+u$.

Підставимо в рівняння: $u'x+u=f(x,u(x))$. За означенням $f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx,ty)=f(x,y)$, якщо покласти, що $y = ux$ і $t = \frac{1}{x}$, то $f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}ux\right) = f(1,u)$, тобто $u'x + u = f(1,u)$, або $u'x = f(1,u) - u$ – це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln x + c.$$

Проінтегрувавши, і замість u підставивши $u = \frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння.

Але при розв'язуванні ми поділили на $f(1,u) - u$, поклавши при цьому, що $f(1,u) - u \neq 0$, розглянемо випадок, коли $f(1,u) - u = 0$; $f(1,u) = u$, то рівняння запишеться у виді: $y' = u$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c$; $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$; $\ln|y| = \ln|xc|$; $y = xc$ – загальний розв'язок при $x \neq 0$ сім'я півпрямих, до яких потрібно приєднати ще півпрямі $x = 0$ $(y \neq 0)$.

<u>*Розглянемо приклад*</u> $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Права частина цього рівняння $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто:

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2 2x^2} = t^0 \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x,y),$$ тому

застосувавши підстановку $y = ux$ одержимо:

$$u'x + u = \frac{x^2 + u^2x^2}{2x^2};\ u'x + u = \frac{1}{2}(1 + u^2);\ u'x = \frac{1}{2}(1 + u^2) - u;\ u'x = \frac{1}{2}(1 + u^2 - 2u);$$

$$u'x = \frac{1}{2}(u-1)^2:\ \frac{du}{\frac{1}{2}(u-1)^2} = \frac{dx}{x};\ 2\int \frac{du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x} + c;\ -\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|c|;$$

$$-\frac{2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln|cx|;\ -\frac{x}{y - x} = \ln|cx|;\ \frac{x}{x - y} = \ln|cx|;$$

$$cx = e^{\frac{x}{x-y}}$$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

При відокремленні змінних ми ділили на x і на $u-1\ ^{2}$ поклавши $x \neq 0$ і $u \neq 1$, але $x = 0$ не може бути особливим розв’язком, оскільки не входить в область визначення функції $\frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Розглянемо $u = 1$; $\frac{y}{x} = 1$; $y = x$ – ця функція перетворює рівняння в тотожність, тому $y = x$ – особливий розв’язок заданого рівняння.

Розглянемо фізичний зміст деяких диференціальних рівнянь.

1.5 Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно шуканої функції $y = y(x)$ називають рівняння виду $A(x)y' + B(x)y = C(x)$, де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ відомі функції, причому неперервні на деякому інтервалі (a, b). Причому, шукана функція y та її похідна y' входять в це рівняння в першому степені. Така форма запису називається канонічною. Функція $A(x) \neq 0$, оскільки в протилежному випадку (коли $A(x) = 0$) не існує диференціального рівняння.

Оскільки $A(x) \neq 0$, то поділивши обидві частини на $A(x)$, дістанемо $y' + \frac{B(x)}{A(x)} y = \frac{C(x)}{A(x)}$, позначимо $\frac{B(x)}{A(x)} = P(x)$, $\frac{C(x)}{A(x)} = Q(x)$, одержимо $y' + P(x)y = Q(x)$, яке також називають лінійним.

Розглянемо методи інтегрування лінійного диференціального рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$.

1. Якщо $Q(x) = 0$, то рівняння набуває виду $y' + P(x)y = 0$ – яке називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку (ЛОДР-І).

Записавши ЛОДР-І у виді $y' = -P(x)y$, або $\frac{dy}{dx} = -P(x)y$ – одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$; $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx + c$; $\ln|y| = -\int P(x)dx + c$; $y = e^{-\int P(x)dx + c}$;

$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot e^{c}$, оскільки $e^{c} = c$, то $y = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$, де c – довільна стала, – загальний розв'язок ЛОДР-І.

Зауважимо, що відокремлюючи змінних ми поділили на $y \neq 0$, але підстановкою в ЛОДР-І впевнюємось, що $y = 0$ є розв'язком ЛОДР-І, але його можна дістати для випадку $c = 0$, отже $y = 0$ є частинним розв'язком цього рівняння (тобто не є особливим).

Приклад: $y' + y\sin x = 0$.

$\frac{dy}{dx} = -y\sin x$; $\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx + c$; $\ln|y| = \cos x + c$; $y = e^{\cos x + c}$; $y = ce^{\cos x}$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

2. Розглянемо випадок, коли $Q(x) \neq 0$, тобто одержуємо рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, яке називають лінійним неоднорідним рівнянням 1-го порядку (ЛНДР-І).

Існують два методи розв'язування ЛНДР-І:

- метод варіації довільної сталої (або метод Лагранжа);
- метод підстановки Бернуллі (інколи кажуть метод Бернуллі-Фур'є).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) полягає в тому, що загальний розв'язок ЛНДР-І шукають у виді $y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$, де $c(x)$ – деяка невідома функція сталої ($c = c(x)$ – від x).

Оскільки припустивши, що це розв'язок, то функція $y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$ повинна задовольняти ЛНДР-І.

Знайдемо y':

За правилом диференціювання добутку і згадавши, що $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ – похідна невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції, одержуємо:

$$y' = c'(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x)) = c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставимо в ЛНДР-І y і y', одержимо:

$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$, скоротивши подібні доданки одержимо:

$c'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$, або $c'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ – ми одержали вид найпростішого диференціального рівняння $y' = f(x)$, тому $c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$; $c - const$.

Ми знайшли шукану функцію сталої $c(x)$, підставимо її в загальний розв'язок ЛНДР-І:

$$y = c(x)e^{-\int P(x)dx} = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) + ce^{-\int P(x)dx}$$

тобто $y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$.

Якщо проаналізувати загальний розв'язок ЛНДР-І, то перший доданок: $ce^{-\int P(x)dx}$ є загальним розв'язком ЛОДР-І, а другий доданок $e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$ є частинним розв'язком ЛНДР-І, який утворюється із загального ЛОДР за умовою, що $c = 0$. Тому можна зробити такий висновок, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює ***сумі*** загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (за умови $Q(x) = 0$) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (за умови $Q(x) \neq 0$).

Розглянемо приклад: $y' - y = 2x - x^2$ – це ЛНДР-І.

Запишемо відповідне однорідне рівняння і знайдемо його розв'язок: $y' - y = 0$; $\dfrac{dy}{dx} = y$; $\dfrac{dy}{y} = dx$; $\int\dfrac{dy}{y} = \int dx + c$; $\ln|y| = x + c$; $y = e^{x+c}$; $y = ce^{x}$ – загальний розв'язок ЛОДР-І.

Розглянемо задане неоднорідне рівняння $y' - y = 2x - x^2$ і будемо шукати його розв'язок у виді $y = ce^{x}$, де $c = c(x)$ – шукана функція сталої, тобто $y = c(x)e^{x}$.

$y' = c'(x)e^{x} + c(x)e^{x}$, підставимо y і y' у рівняння:

$$c'(x)e^{x}+c(x)e^{x}-c(x)e^{x}=2x-x^{2}, \quad \text{або} \quad c'(x)e^{x}=2x-x^{2};$$

$c'(x)=(2x-x^{2})e^{-x}$ – найпростіше диференціальне рівняння.

$$c(x)=\int(2x-x^{2})e^{-x}dx\begin{bmatrix}u=2x-x^{2} & du=(2-2x)dx\\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$=-(2x-x^{2})e^{-x}+\int(2-2x)e^{-x}dx\begin{bmatrix}u=2-2x & du=-2dx\\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$=(x^{2}-2x)e^{-x}+(2-2x)(-e^{-x})-2\int e^{-x}dx=$$

$$=(x^{2}-2x)e^{-x}+(2x-2)(e^{-x})+2e^{-x}+c.$$

$c(x)=x^{2}e^{-x}+c$, підставляємо $y=c(x)e^{x}=(x^{2}e^{-x}+c)=ce^{x}+x^{2}$ – шуканий загальний розв’язок заданого рівняння.

Розглянемо метод підстановки Бернуллі.

Суть цього метода полягає в тому, що шуканий розв’язок $y=y(x)$ шукають за допомогою підстановки $y=u\cdot v$, де $u=u(x)$, $v=v(x)$ – деякі невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна, але не рівна нулю.
Отже: $y'+P(x)y=Q(x)$ – ЛНДР-І, $y=u\cdot v$ – його загальний розв’язок, тому: $y'=u'v+uv'$, маємо: $u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$, перегрупуємо $u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x)$. Оскільки нам відомо, як розв’язати $y'+P(x)y=0$ ЛОДР-І, то оберемо функцію $v=v(x)$ так, щоб $v'+P(x)v=0$, тому $\frac{dv}{dx}=-P(x)v$; $\frac{dv}{v}=-P(x)dx$; $v=ce^{-\int P(x)dx}$, (покладемо $c=1$, оскільки нас цікавить функція $v(x)$), отже: $v=e^{-\int P(x)dx}$.

Повертаючись до рівняння і враховуючи, що дужки дорівнюють нулю, маємо:
$u'v=Q(x)$, $v=e^{-\int P(x)dx}$, тобто $u'e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$, або $u'=Q(x)e^{\int P(x)dx}$ одержане найпростіше рівняння, інтегруючи яке маємо: $u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c$, знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ підставляємо в рівність $y=u\cdot v$,

$$y=\left(\int Q\;\;x\;\;e^{\int P\;\;x\;\;dx}dx+c\right)e^{-\int P\;\;x\;\;dx},\ \text{або}\quad y=ce^{-\int P\;\;x\;\;dx}+\left(\int Q\;\;x\;\;e^{\int P\;\;x\;\;dx}dx\right)e^{-\int P\;\;x\;\;dx}\ -$$

загальний розв’язок ЛНДР-І.

Для приклада оберемо вже розв’язане рівняння методом Лагранжа і розв’яжемо його методом Бернулі.

<u>*Приклад:*</u> $y'-y=2x-x^2$

$y=u\cdot v$; $y'=u'v+uv'$; $u'v+uv'-uv=2x-x^2$; $u'v+u\;\;v'-v\;\;=2x-x^2$, після накладання умов одержимо систему: $\begin{cases} v'-v=0 \\ u'v=2x-x^2 \end{cases}$.

Перше рівняння системи:

$v'-v=0$; $\dfrac{dv}{dx}=v$; $\dfrac{dv}{v}=dx$; $\ln|v|=x+c$; $v=e^{x+c}$; $v=ce^x$; $c=1$; $v=e^x$.

Розглянемо друге рівняння системи:

$u'v=2x-x^2$; $u'e^x=\;\;2x-x^2\;\;$; $u'=\;\;2x-x^2\;\;e^{-x}$ – найпростіше диференціальне рівняння, інтегруючи яке одержимо: $u=\int\;\;2x-x^2\;\;e^{-x}dx$; двічі інтегруємо частинами (вже розглядали в попередньому прикладі при знаходженні сталої) одержуємо відповідь: $u=x^2e^{-x}+c$, остаточно маємо: $y=u\cdot v$; $y=\;\;x^2e^{-x}+c\;\;e^x=ce^x+x^2$ – загальний розв’язок, одержаний методом Бернулі.

Можна сказати, що розв’язок, одержаний методом Бернулі аналогічний до розв’язку, одержаного методом Лагранжа.

Розглянувши другий метод розв’язування ЛНДР-І бачимо, що структура загального розв’язку ЛНДР-І відповідає структурі, яку ми одержали за допомогою методу Лагранжа. Отже:

Теорема (про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння).

Загальним розв’язком ЛНДР-І є сума його будь-якого частинного розв’язку і загального розв’язку відповідного ЛОДР.

Зауважимо, що до рівнянь, які зводяться до ЛНДР-I належить так зване рівняння Бернуллі, яке має вид: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, де $P(x)$, $Q(x)$ – неперервні на (a,b) функції і n – деяке стале число.

Якщо $n = 0$, то одержимо ЛНДР, якщо $n = 1$, то рівняння допускає відокремлення змінних:

$y' + P(x)y = Q(x)y$; $\quad y' = (P(x) - Q(x))y$, $\quad$ або $\quad \dfrac{dy}{y} = (P(x) - Q(x))dx$;

$\int \dfrac{dy}{y} = \int (P(x) - Q(x))dx + c$; $\ln|y| = \int (P(x) - Q(x))dx + c$ – загальний інтеграл цього рівняння, або $y = ce^{\int (P(x) - Q(x))dx}$ – загальний розв’язок.

Зауважимо також, що $y = 0$ є розв’язком, який одержуємо для $c = 0$.

Покладемо, що $n \neq 1$ і поділимо обидві частини рівняння $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ на y^n, поклавши, що $y \neq 0$:

$y'y^{-n} + P(x)\dfrac{y}{y^n} = Q(x)$; $y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$. Оберемо нову функцію $z = y^{1-n}$ і продиференціюємо обидві частини рівності, одержимо $z' = (1-n)y^{1-n-1}y'$, тобто $z' = (1-n)y^{-n}y'$, звідки бачимо, що $y^{-n}y' = \dfrac{z'}{1-n}$, підставимо в рівняння:

$\dfrac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$; (помножимо на $(1-n)$ обидві частини рівняння):

$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ – тобто ми одержали ЛНДР.

Розв’язавши це рівняння відносно нової шуканої функції z і підставивши в заміну, маємо, що $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ – загальний розв’язок рівняння Бернулі.

Приклад: $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

Поділимо обидві частини на y^2: $y^{-2}y' + \dfrac{1}{x}y^{1-2} = -x$, тобто $y^{-2}y' + \dfrac{1}{x}y^{-1} = -x$. Введемо заміну $z = y^{-1}$; тоді $z' = -y^{-2}y'$, звідки знайдемо, що

$y^{-2}y' = -z'$, тобто підставимо в рівняння: $-z' + \frac{1}{x}z = -x$, або $z' - \frac{1}{x}z = x$ – одержали ЛНДР, яке розв’яжемо за допомогою підстановки $z = u \cdot v$; $z' = u'v + uv'$; $u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x$; $u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = x$, $\Rightarrow \begin{cases} v' - \frac{1}{x}v = 0 \\ u'v = x \end{cases}$. Перше рівняння $v' - \frac{1}{x}v = 0$; $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$; $v = x$, підставимо в друге рівняння $u'v = x$; $u'x = x$; $u' = 1$, тобто $u = \int dx + c$; $u = x + c$, тоді $z = uv$, тобто $z = x\ \ x + c$, звідси $z = y^{-1}$, тобто $z = \frac{1}{y}$ або $y = \frac{1}{z}$, тобто $y = \frac{1}{x\ \ x+c}$ – загальний розв’язок рівняння Бернулі.

Потрібно зауважити, що на практиці рівняння Бернулі простіше розв’язувати одразу за допомогою підстановки $y = uv$, не зводячи до лінійного рівняння.

Покажемо, що розв’язок рівняння Бернулі $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$ простіше одержати зробивши одразу підстановку $y = uv$:

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -x\ \ uv\ \ ^2$; $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -xu^2v^2$; $v' + \frac{v}{x} = 0$; $v' = -\frac{v}{x}$; $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$;

$\ln|v| = -\ln|x|$; $\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$; $v = \frac{1}{x}$.

$u'\frac{1}{x} = xu^2\frac{1}{x^2}$; $u' = -u^2$; $\frac{du}{dx} = -u^2$; $\frac{du}{-u^2} = dx$; $\int\frac{du}{-u^2} = \int dx + c$; $\frac{1}{u} = x + c$; $u = \frac{1}{x+c}$;

$y = uv$, або $y = \frac{1}{x\ \ x+c}$ – загальний розв’язок рівняння Бернулі. Зауважимо, що $y = 0$ задовольняє заданому рівнянню $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$ і є особливим, оскільки його не можна одержати ні для якого значення сталої c.

1.6 Рівняння у повних диференціалах

Вираз виду $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ називається ***повним диференціалом***, якщо існує така функція u двох змінних x і y, $u=u(x,y)$ для якої $du=M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

Диференціальне рівняння, записане у симетричному виді $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ називають ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$, тобто $M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)=0$.

Якщо ця умова виконується, то загальний інтеграл має вид $u(x,y)=c$ (оскільки по суті ми одержали рівняння $du(x,y)=0$, $\int du(x,y)=c$, $u(x,y)=c$).

Теорема. Для того, щоб диференціальне рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ було рівнянням у повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

За умови виконання теореми з'ясуємо методику інтегрування диференціального рівняння у повних диференціалах. Нам потрібно знайти таку функцію $u=u(x,y)$, яка задовольняє умови $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$.

Проінтегруємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ по змінній x, визначимо функцію $u(x,y)$ з точністю до довільної диференційованої функції $\varphi(y)$:

$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx=F(x,y)+\varphi(y)$, де $F(x,y)$ – первісна функції $M(x,y)$ по x. Продиференціюємо одержану функцію по y: $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ і враховуємо, що $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$, маємо, що $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}=N(x,y)$ з якого знаходять функцію $\varphi(y)$. Остаточно розв'язок диференціального рівняння у повних диференціалах записують у виді $u(x,y)=c$.

Приклад: $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$.

$M(x,y)=3x^2+6xy^2$; $N(x,y)=6x^2y+4y^3$.

Спочатку перевіримо рівність $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$: $\frac{\partial M}{\partial y}=12xy$; $\frac{\partial N}{\partial x}=12xy$, рівність виконується, отже задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах, тоді:

$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\varphi(y)$;

$u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\varphi(y)=3\frac{x^3}{3}+6y^2\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$,

отже $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$.

Візьмемо похідну по y функції $u(x,y)$: $\frac{\partial u}{\partial y}=6yx^2+\varphi'(y)$ і враховуємо, що $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$, маємо $6yx^2+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3$, звідси $\varphi'(y)=4y^3$, тому $\frac{d\varphi}{dy}=4y^3$; $d\varphi=4y^3dy$; $\varphi=\int 4y^3dy$, отже $\varphi(y)=y^4$ – шукана функція $\varphi(y)$.

Отже $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$, тому загальний інтеграл заданого рівняння має вид: $x^3+3x^2y^2+y^4=c$.

1.7 Задача про радіоактивний розпад

Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини в залежності від часу, якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ маса речовини була m_0.

Покладемо, що $m = m(t)$, де $m(t)$ – функція маси речовини, яка залежить від часу t, і введемо $k > 0$, k – коефіцієнт пропорційності, оскільки функція за умовою пропорційна кількості речовини, то одержуємо вираз km, але з часом кількість речовини зменшується, тому беремо із знаком «$-$», тобто $(-km)$. Оскільки в умові задачі задана не функція розпаду, а швидкість, тобто похідна деякої функції, то беремо $\frac{dm}{dt}$, отже одержимо рівняння $\frac{dm}{dt} = -km$, причому встановимо початкові умови:

$$m(t_0) = m_0,$$

де t_0 – початковий момент часу, покладемо $t_0 = 0$, маємо $m(0) = m_0$.

Тобто, одержали рівняння, яке дуже швидко зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, причому $m \neq 0$.

$\frac{dm}{m} = -kdt$; $\int \frac{dm}{m} = -k\int dt + c$; $\ln|m| = -kt + c$; $m = e^{-kt+c}$; $m = e^{-kt} \cdot e^{c}$; $e^{c} = c$;

$m = ce^{-kt}$ – загальний розв'язок даного інтегрального рівняння, оскільки задані початкові умови $m(0) = m_0$, то знайдемо розв'язок, який задовольняє умові даної задачі:

$m_0 = ce^{-k\cdot 0}$; $m_0 = ce^{0}$; $c = m_0$,

Отже, $m = m_0 e^{-k\cdot t}$ – розв'язок поставленої задачі.

Зазначимо, що час t, за який розпадається половина початкової речовини визначають з рівняння $\frac{1}{2}m_0 = m_0 e^{-k\cdot t}$; $e^{-k\cdot t} = \frac{1}{2}$; $-kt = \ln\frac{1}{2}$; $-kt = \ln 2^{-1}$; $-kt = -\ln 2$; $kt = \ln 2$;

$t = \dfrac{\ln 2}{k}$ – це час так званого ***періоду напіврозпаду*** радіоактивної речовини, причому він не залежить від початкової кількості речовини.

1.8 Задача про охолодження тіла

Згідно із законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Відомо, що тіло, нагріте до температури T_0, помістили в середовище температура якого стала і дорівнює T_1, причому $T_0 > T_1$. Знайти залежність температури тіла від часу.

Покладемо, що $T = T(t)$ – функція, яка описує залежність температури від часу t. За умовою задачі швидкість охолодження – це похідна функції температури від часу, тобто $\frac{dT}{dt}$, оскільки вона пропорційна, то введемо коефіцієнт пропорційності k, оскільки охолодження, то обираємо знак «$-$», позначимо різницю температури тіла і навколишнього середовища як $T - T_1$, оскільки T_1 – величина стала, а температура тіла T змінна, остаточно маємо: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$ і початкові умови – в початковий момент часу $t_0 = 0$ температура тіла T_0, тобто $T(t_0) = T_0$; $T(0) = T_0$. В одержаному рівнянні відокремлюємо змінні:

$$\frac{dT}{T - T_1} = -kdt; \qquad \int \frac{dT}{T - T_1} = -k\int dt + c; \qquad \ln|T - T_1| = -kt + c; \qquad T - T_1 = e^{-kt+c};$$

$T - T_1 = e^{-kt} \cdot e^c$; $e^c = c$; $T - T_1 = ce^{-kt}$; $T = T_1 + ce^{-kt}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння, серед яких знайдемо той, який задовольняє умові $T(0) = T_0$.

$T_0 = T_1 + ce^{-k0}$; $T_0 = T_1 + c$; $c = T_0 - T_1$, отже $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$ – шукана функція, яка задовольняє умові задачі.

Розглянемо на прикладі:

При температурі повітря $20^\circ C$ нагріте до $100^\circ C$ тіло охолоджується до $60^\circ C$ за 20 хвилин, за скільки часу це тіло охолоне до $30^\circ C$.

В одержаному рівнянні дві невідомі k і t, визначимо k з умови задачі:

$T_0 = 100^\circ C$; $T_1 = 20^\circ C$; $T = 60^\circ C$; $t = 20$ *хв* $= \frac{1}{3}$*год.*

Отже $60 = 20 + (100 - 20)e^{-\frac{1}{3}k}$; $40 = 80e^{-\frac{1}{3}k}$; $\frac{1}{2} = e^{-\frac{1}{3}k}$; $-\frac{1}{3}k = \ln\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}k = -\ln 2$; $k = 3\ln 2$.

Розв'яжемо задачу далі: $T_0 = 100^\circ C$; $T_1 = 20^\circ C$; $T = 30^\circ C$; $k = 3\ln 2$.

$30 = 20 + (100 - 20)e^{-3\ln 2\, t}$; $10 = 80e^{-3\ln 2\, t}$; $\frac{1}{8} = e^{-3\ln 2\, t}$; $-3\ln 2 \cdot t = \ln\frac{1}{8}$; зазначимо, що $-3\ln 2 = \ln 2^{-3} = \ln\frac{1}{8}$, тому $\ln\frac{1}{8} \cdot t = \ln\frac{1}{8}$; $t = 1$, отже за 1 годину тіло нагріте до $100^\circ C$ охолоне до $30^\circ C$, якщо температура навколишнього середовища становить $20^\circ C$.

Висновок

В усіх випадках для складання диференціальних рівнянь в фізиці (або техніці) за основу беремо деякий закон, який містить диференціальний характер, тобто він пов’язує нескінченно малі зміни величин, які розглядаються. Після інтегрування рівняння, одержуємо інтегральний закон, який пов’язує кінцеві значення цих величин.

Отже, виведення загальних диференціальних рівнянь для певної галузі знань – дуже відповідальна справа, оскільки від формування і розв’язування задачі (складання диференціального рівняння) в певній мірі залежить подальший розвиток галузі.

Тому, математична зрілість фізика в значній мірі характеризується тим, на скільки він може формулювати математичні задачі в обраній галузі.

2 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Знайти загальний інтеграл (загальний розв'язок) диференціального рівняння.

1.1. $e^{x+3y}dy = xdx$. (Відповідь: $e^{3y} = 3\ \ C - xe^{-x} - e^{-x}\ \ .)$

1.2. $y'sinx = y\ln y$. (Відповідь: $\ln y = C\ tg(x/2).)$

1.3. $y' = 2x - 1\ \cot y$.(Відповідь: $\ln\ \cos y\ \ = x - x^2 + C.)$

1.4. $sec^2x\ \tan y dy + sec^2y\ tg\ xdy = 0.$ (Відповідь: $C = \ \tan y\ \tan x.)$

1.5. (1+e^x) $ydy - e^y dx = 0.$ (Відповідь: $-e^{-y}\ \ y + 1\ \ = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.)$

1.6. $(y^2 + 3) = dx - \frac{e^x}{x} ydy = 0.$ Відповідь: $\ln(y^2 + 3\ \ = 2\ \ C - xe^{-x} - e^{-x}\ \ .)$

1.7. $\sin x \cos xdy = \cos y \sin xdx$. (Відповідь: $C = \cos x / \cos y.)$

1.8. $y' = \ \ 2y + 1\ \ \tan x.$ (Відповідь: $\overline{2y + 1} = C\ \ \cos x.)$

1.9. $\sin(x + y\ \ + \sin\ \ x - y\ \ )dx + \frac{dy}{\cos y} = 0.$ (Відповідь: $\tan y = C + 2\cos x.)$

1.10. $1 + e^x\ \ yy' = e^x$. (Відповідь: $y^2 = 2\ln C\ \ e^x + 1\ \ .)$

1.11. $\sin x \tan y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0.$ (Відповідь: $\ln\ \sin y\ \ = C + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x.)$

1.12. $3e^x \sin y dx + \ \ \ 1 - e^x\ \ \cos y dy = 0.$ (Відповідь: $\sin y = C(e^x - 1)^3.)$

1.13. $y' = e^{2x}/\ln y$. (Відповідь: $y(\ln y - 1) = \frac{1}{2}e^{2x} + \ C.)$

1.14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0.$ (Відповідь: $3^y = \frac{1}{2}3^{-x^2} + C\ln 3.)$

1.15. $(\cos\ \ x - 2y\ \ + \cos(\ x + 2y))y' = \sec x.$ (Відповідь: $\sin 2y = \tan x + C.)$

1.16. $y' = e^{x^2}x\ \ 1 + y^2\ \ .$ (Відповідь: $arctg\ y = C + \frac{1}{2}e^{x^2}.)$

1.17. $\cot x \cos^2 y dx + \sin^2 x \tan y dy = 0.$ (Відповідь: $\tan^2 y = cot^2 x + 2C.)$

1.18. $\sin x \cdot\ y' = y\cos x + 2\cos x.$ (Відповідь: $y = C\sin x - 2.)$

1.19. $1 + \ \ 1 + y'\ \ = e^y = 0.$ (Відповідь: $C\ \ e^y - 1\ \ = e^{-x}.)$

1.20. $y'\cot x + y = 2.$ (Відповідь: $y = C\cos x + 2.)$

1.21. $\frac{e^{-x^2}dy}{x} + \frac{dx}{cos^2y} = 0.$ (Відповідь: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y = C - \frac{1}{2}e^{x^2}.)$

1.22. $e^x \sin y dx + \tan y dy = 0.$ (Відповідь: $\ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2})| = C - e^x.)$

1.23. $1 + e^{3y}\ \ xdx = e^{3y}dy$. (Відповідь: $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{3}\ln\ \ 1 + e^{3y}\ \ + C.)$

1.24. $(\sin\ \ 2x + y\ \ - \sin\ \ 2x - y\ \ )dx = \frac{dy}{\sin y}$. (Відповідь: $\cot y = C - \sin 2x.)$

1.25. $\cos y dx = 2\ \ \overline{1 + x^2}\,dy + \cos y\ \ \overline{1 + x^2}\,dy.$ Відповідь: $2\ln|\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\ \ \ + y =$ $\ln|x + \ \ \overline{1 + x^2}\ \ + C.)$

1.26. $y'\ \ \overline{1 - x^2} - cos^2 y = 0.$ (Відповідь: $\tan y = \arcsin x + C.)$

1.27. $e^x \tan y dx = \ \ 1 - e^x\ \ sec^2\ ydy$. (Відповідь: $\tan y = C/\ \ e^x - 1\ \ .)$

1.28. $y' + \sin\ \ x + y\ \ = \sin\ \ x - y\ \ .$ (Відповідь: $\ln|\tan\frac{y}{2}| = C - 2\sin x.)$

1.29. $cos^3 y \cdot y' - \cos\ \ 2x + y\ \ = \cos\ \ 2x - y\ \ .$ (Відповідь: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\ \sin 2y =$ $\sin 2x + C.)$

1.30. $3^{y-x^2} = yy'/x$. (Відповідь: $3^{-y^2} = 3^{-x^2} - 2C\ln 3.)$

Завдання 2

Знайти загальний інтеграл (загальний розв’язок) диференціального рівняння.

2.1. $xy + x^3y\ \ y' = 1+y^2$. (Відповідь: $Cx = \overline{1+x^2\ \ 1+y^2}$.)

2.2. $\frac{y'}{7^{y-x}} = 3$. (Відповідь: $7^{-y} = 3\cdot 7^{-x} + C\ln 7$.)

2.3. $y - xy' = 2\ \ 1+x^2y'$. (Відповідь: $y = C\ x\ \ \ \overline{1+2x^2} + 2$.)

2.4. $y - xy' = 1 + x^2y'$. (Відповідь: $y = C\ x\ \ \ x+1\ \ +1$.)

2.5. $x+4\ \ dy - xydx = 0$. (Відповідь: $y = C\ e^x\ \ (x+4)^4$.)

2.6. $y'+y+y^2=0$. (Відповідь: $y\ \ \ y+1\ \ = C - x$.)

2.7. $y^2\ln x\,dx - \ \ y-1\ \ xdy = 0$. (Відповідь: $\frac{1}{y}+\ln y = C + \frac12\ln^2 x$.)

2.8. $x+xy^2\ \ dy + ydx - y^2dx = 0$. (Відповідь: $y + \ln\frac{(y-1)^2}{y} = C + \ln x$.)

2.9. $y'+2y-y^2=0$. (Відповідь: $\overline{y-2\ \ \ y} = Ce^x$.)

2.10. $x^2+x\ \ ydx + \ \ y^2+1\ \ dy = 0$. (Відповідь: $\frac{y^2}{2}+\ln y = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.)

2.11. $xy^3+x\ \ dx + \ \ x^2y^2 - y^2\ \ dy = 0$. (Відповідь: $^3\ \overline{y^3+1} = C\ \ \ \overline{x^2-1}$.)

2.12. $1+y^2\ \ dx - \ \ y+yx^2\ \ dy=0$. (Відповідь: $\frac12\ln\ \ y^2+1\ \ = C + arctg\,x$.)

2.13. $y' = 2xy + x$. (Відповідь: $\frac12\ln\ 2y+1\ \ = x^2\ \ 2 + C$.)

2.14. $y-xy' = 3\ \ 1+x^2y'$. (Відповідь: $y = C^3\ \overline{x}/^3\ \overline{x+3}+3$.)

2.15. $2xyy' = 1-x^2$. (Відповідь: $y^2 = \ln\ x\ \ - \frac{x^2}{2} + C$.)

2.16. $x^2-1\ \ y' - xy = 0$. (Відповідь: $y = C\ \ \overline{x^2-1}$.)

2.17. $y^2x+y^2\ \ dy + xdx = 0$. (Відповідь: $y^3 = 3(C - x + \ln|x+1|)$.)

2.18. $1+x^3\ \ y^3dx - \ \ y^2-1\ \ x^3dy = 0$. (Відповідь: $\ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}$.)

2.19. $xy'-y=y^2$. (Відповідь: $y\ \ \ y+1\ \ = Cx$.)

2.20. $\overline{y^2+1}dx = xydy$. (Відповідь: $\overline{y^2+1} = \ln Cx$.)

2.21. $y' - xy^2 = 2xy$. (Відповідь: $\ln|\,y\ \ \ y+2\ \ | = C + x^2$.)

2.22. $2x^2yy'+y^2=2$. (Відповідь: $\ln\ 2-y^2\ \ = C+1\ \ x$.)

2.23. $y' = \ \ 1+y^2\ \ /(1+x^2)$. (Відповідь: $arctg\,y = C + arctg\,x$.)

2.24. $y'\ \ \overline{1+y^2} = x^2\ \ y$. (Відповідь: $\overline{(1+y^2)^3} = C + x^3$.)

2.25. $y+1\ \ y' = \frac{y}{\overline{1-x^2}} + xy$. (Відповідь: $y + \ln y = arcsin\ x + x^2\ \ 2 + C$.)

2.26. $1+x^2\ \ y' + y\ \ \overline{1+x^2} = xy$. (Відповідь: $y = \frac{C\ \ \overline{1+x^2}}{x+\ \ \overline{1+x^2}}$.)

2.27. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}$. (Відповідь: $2y^2 - y^4 = 4\ln\ x\ \ + 2x^2 + C$.)

2.28. $(xy-y)^2dy + y\ \ 1-x\ \ dx = 0$. (Відповідь: $\frac{y^2}{2} - 2y + \ln\ y\ \ = \ln\ x\ \ + \frac1x + C$.)

2.29. $(x^2y-y)^2y' = x^2y - y + x^2 - 1$. (Відповідь: $\frac{y^2}{2} - y + \ln\ y+1\ \ = \frac12\ln\ \ \frac{x-1}{x+1}\ \ + C$.)

2.30. $\overline{1-y^2}dx + y\ \ \overline{1-x^2}dy = 0$. (Відповідь: $\overline{1-y^2} = \arcsin x + C$.)

Завдання 3

Знайти загальний інтеграл (загальний розв'язок) диференціального рівняння.

3.1. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$. (Відповідь: $\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}$.)

3.2. $y^2 - 3x^2 \ dy + 2xydx = 0$. (Відповідь: $(y^2 - x^2)^2 Cx^2y^3$.)

3.3. $x + 2y \ dx - xdy = 0$. (Відповідь: $y = Cx^2 - x$.)

3.4. $x - y \ dx + \ x + y \ dy = 0$. (Відповідь: $arctg\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^2+x^2}{x^2} = \ln\frac{C}{x}$.)

3.5. $y^2 - 2xy \ dx + x^2dy = 0$. (Відповідь: $y \quad x - y \ = Cx$.)

3.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$. (Відповідь: $e^{y \ x} = Cy$.)

3.7. $xy' - y = x\tan \ y \ x$. (Відповідь: $\sin \ y \ x \ = Cx$.)

3.8. $xy' = y - xe^{y \ x}$. (Відповідь: $e^{-y \ x} = \ln Cx$.)

3.9. $xy' - y = \ x + y \ \ln(\ x + y \quad x)$. (Відповідь: $\ln|1 + y \ x| = Cx$.)

3.10. $xy' = y\cos\ln \ y \ x$. Відповідь: $\cot(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x} \ = \ln Cx$.)

3.11. $y + \ \overline{xy} \ dx = xdy$. (Відповідь: $y = \frac{x}{4}\ln^2 Cx$.)

3.12. $xy' = \ \overline{x^2 - y^2} + y$. (Відповідь: $arcsin \ y \ x \ = \ln Cx$.)

3.13. $y = x \ y' - \ ^x \ \overline{e^y}$. (Відповідь: $-e^{-y \ x} = \ln Cx$.)

3.14. $y' = y \ x - 1$. (Відповідь: $y = x\ln(C \ x)$.)

3.15. $y'x + x + y = 0$. (Відповідь: $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$.)

3.16. $ydx + \ 2 \ \overline{xy} - x \ dy = 0$. (Відповідь: $\overline{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = \ln Cx$.)

3.17. $xdy - ydx = \ \overline{x^2 + y^2}dx$. (Відповідь: $y + \ \overline{x^2 + y^2} = Cx^2$.)

3.18. $4x^2 + 3xy + y^2 \ dx + \ 4y^2 + 3xy + x^2 \ dy = 0$. (Відповідь: $\frac{2}{5}\ln \ \frac{y+x}{x} \ + \frac{9}{5}\ln(\frac{y^2+4x^2}{x^2}) - \frac{3}{10}arctg\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}$.)

3.19. $x - y \ ydx - x^2dy = 0$. (Відповідь: $y = x \ \ln Cx$.)

3.20. $xy + y^2 = \ 2x^2 + xy \ y'$. (Відповідь: $\frac{y}{x} + 2\ln\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}$.)

3.21. $x^2 - 2xy \ y' = xy - y^2$. (Відповідь: $\frac{x}{y} + 2\ln\frac{y}{x} = -\ln Cx$.)

3.22. $2 \ \overline{xy} - y \ dx + xdy = 0$. (Відповідь: $y = x\ln^2 \ Cx$.)

3.23. $xy' + y \ \ln\frac{y}{x} - 1 \ = 0$. (Відповідь: $y = xe^{C \ x}$.)

3.24. $x^2 + y^2 \ dx + 2xydy = 0$. (Відповідь: $y^2 = C^3 \ 3^x - x^2 \ 3$.)

3.25. $y^2 - 2xy \ dx - x^2dy = 0$. (Відповідь: $y - 3x \quad y = \ln^3 \ Cx$.)

3.26. $x + 2y \ dx + xdy = 0$. (Відповідь: $y = C^3 \quad 3x^2 \ - x \ 3$.)

3.27. $2x - y \ dx + \ x + y \ dy = 0$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln(\frac{y^2+x^2}{x^2} \ + arctg\frac{y}{x} = \ln Cx$.)

3.28. $2x^3y' = y \ 2x^2 - y^2$. (Відповідь: $y^2 = x^2 \ \ln(Cx)^4$.)

3.29. $x^2y' = y \ x + y$. (Відповідь: $y = -x \ \ln \ Cx$.)

3.30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. (Відповідь: $y^2 = x^2\ln(Cx)^2$.)

Завдання 4

Знайти частинний розв’язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

4.1. $(x^2+1)y'+4xy=3,\ y(0)=0.$ (Відповідь: $y=(x^3+3x)/(x^2+1)^2.$)
4.2. $y'+y\tan x=\sec x,\ y(0)=0.$ (Відповідь: $y=\sin x.$)
4.3. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}, y(0)=0.$ (Відповідь: $y=e^{-x}\ln\frac{1}{1-x}.$)
4.4. $xy'-2y=2x^4,\ y(1)=0.$ (Відповідь: $y=x^4-x^2.$)
4.5. $y'=2x(x^2+y), y(0)=0.$ (Відповідь: $y=x^2+1-e^{x^2}.$)
4.6. $y'-y=e^x,\ y(0)=1.$ (Відповідь: $y=(x+1)e^x.$)
4.7. $xy'+y+xe^{-x^2}=0,\ y(1)=\frac{1}{2e}.$ (Відповідь: $y=\frac{e^{-x^2}}{2x}.$)
4.8. $\cos y dx=(x+2\cos y)\sin y dy,\ y(0)=\pi/4.$ (Відповідь: $x=(sin^2y-\frac{1}{2})\frac{1}{\cos y}.$)
4.9. $x^2y'+xy+1=0,\ y(1)=0.$ (Відповідь: $y=-(\ln x)/x.$)
4.10. $yx'+x=4y^3+3y^2,\ y(2)=1.$ (Відповідь: $x=y^3+y^2.$)
4.11. $(2x+y)dy=ydx+4\ln y dy,\ y(0)=1.$ (Відповідь: $x=2\ln y+1-y.$)
4.12. $y'=y/(3x-y^2),\ y(0)=1.$ (Відповідь: $x=y^2-y^3.$)
4.13. $(1-2xy)y'=y(y-1),\ y(0)=1.$ (Відповідь: $x(y-1)^2=(y-\ln y-1).$)
4.14. $x(y'-y)=e^x,\ y(1)=0.$ (Відповідь: $y=e^x\ln x.$)
4.15. $y=x(y'-x\cos x),\ y(\pi/2)=0.$ (Відповідь: $y=(\sin x-1)x.$)
4.16. $(xy'-1)\ln x=2y,\ y(e)=0.$ (Відповідь: $y=(\ln^5x-\ln^2x)/3.$)
4.17. $(2e^y-x)y'=1,\ y(0)=0.$ (Відповідь: $x=e^y-e^{-y}.$)
4.18. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x},\ y(1)=0.$ (Відповідь: $y=(x^2-1/x)e^{-x}.$)
4.19. $(x+y^2)dy=ydx,\ y(0)=1.$ (Відповідь: $x=y^2-y.$)
4.20. $(sin^2y+x\cot y)y'=1,\ y(0)=\pi/2.$ (Відповідь: $x=-\sin y\cos y.$)
4.21. $(x+1)y'+y=x^3+x^2,\ y(0)=0.$ (Відповідь: $y=\frac{3x^4+4x^3}{12(x+1)}.$)
4.22. $(xy'-2y+x^2=0,\ y(1)=0.$ (Відповідь: $y=-x^2\ln x.$)
4.23. $xy'+y=\sin x,\ y(\pi/2)=2/\pi.$ (Відповідь: $y=(1-\cos x)/x.$)
4.24. $(x^2-1)y'-xy=x^3-x, y(\sqrt{2})=1.$ (Відповідь: $y=x^2-1.$)
4.25. $(1-x^2)y'+xy=1,\ y(0)=1.$ (Відповідь: $y=x+\sqrt{1-x^2}.$)
4.26. $y'\cot x-y=2cos^2x\cot x,\ y(0)=0.$ (Відповідь: $y=\frac{6\sin x-2sin^3x}{3\cos x}.$)
4.27. $x^2y'=2xy+3, y(1)=-1.$ (Відповідь: $y=-1/x.$)
4.28. $y'+2xy=xe^{-x^2}, y(0)=0.$ (Відповідь: $y=0{,}5x^2e^{-x^2}.$)
4.29. $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0, y(0)=0.$ (Відповідь: $y=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}.$)
4.30. $xy'+y=\ln x+1,\ y(1)=0.$ (Відповідь: $y=\ln x.$)

Завдання 5

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

5.1. $y' + y = x\ \sqrt{y}$. (Відповідь: $y = (xe^{x\ 2} - 2e^{x\ 2} + C)^2e^{-x}$.)

5.2. $ydx + 2xdy = 2y\ \sqrt{x}sec^2ydy$. (Відповідь: $x = (y\tan y + \ln|\cos y| + C)^2/y^2$.)

5.3. $y' + 2y = y^2e^x$. (Відповідь: $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$.)

5.4. $y' = y^4\cos x + y\tan x$. (Відповідь: $y = 1/(\cos x\sqrt[3]{C - \tan x})$.)

5.5. $xydy = \ y^2 + x\ dx$. (Відповідь: $y = x\ \sqrt{2(C - 1/x)}$.)

5.6. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$. (Відповідь: $y = 1/(^2\sqrt{2\ e^x + C\ })$.)

5.7. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$. (Відповідь: $x = \ \sqrt{y/(C - \cos y)}$.)

5.8. $\ 2x^2y\ln y - x\ y' = y$. (Відповідь: $x = 1/(y\ C - \ln^2y\ )$.)

5.9. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$. (Відповідь: $y = \ \sqrt{C - \ \sqrt{x^2} - 1}\sqrt[4]{x^2 - 1}$.)

5.10. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$. (Відповідь: $y = \frac{x^4}{4}(\mathrm{C} + \ln x)^2$.)

5.11. $xy^2y' = x^2 + y^3$. (Відповідь: $y = x\sqrt[3]{3(C - 1\ x)}$.)

5.12. $\ x + 1\ \ y' + y^2\ \ = -y$. (Відповідь: $y = 1/((x + 1)(C + \ln|x + 1|))$.)

5.13. $y'x + y = -xy^2$. (Відповідь: $y = 1/(x\ C + \ln x\ )$.)

5.14. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$. (Відповідь: $y = e^{x^2/2}/\ \sqrt{2(C + x)}$.)

5.15. $xy' - 2\ \sqrt{x^3y} = y$. (Відповідь: $y = x(\frac{x^2}{2} + C)^2$.)

5.16. $y' + xy = x^3y^3$. (Відповідь: $y = e^{-x^2\ 2}/\ \sqrt{x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}$.)

5.17. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$. (Відповідь: $y = e^x\sqrt{x^2 + C}$.)

5.18. $yx' + x = -yx^2$. (Відповідь: $x = 1\ \ (y(C + \ln y))$.)

5.19. $x\ x - 1\ y' + y^3 = xy$. (Відповідь: $y = \ x - 1\ \ \ \sqrt{2\ x - \ln x + C\ }$.)

5.20. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0$. (Відповідь: $y = \ \sqrt{C - x}\ \ x^{3\ 2}$.)

5.21. $\frac{dx}{x} = \ \frac{1}{y} - 2x\ \ dy$. (Відповідь: $x = y\ \ \ y^2 + C\ $.)

5.22. $y' + \sqrt[3]{x}\ \sqrt{y} = 3y$. (Відповідь: $y = e^{3x}(\frac{x}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-2x} + C)^{3\ 2}$.)

5.23. $xy' + y = y^2\ln x$. (Відповідь: $y = 1\ \ \ \ln x + 1 + Cx$).

5.24. $xdx = \ x^2\ \ y - y^3\ dy$. (Відповідь: $x = y\ \ \sqrt{C - y^2}$.)

5.25. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. (Відповідь: $y = 2e^{-x^7}/\ \ \sqrt{2x^2e^{-2x^7} + 4C}$.)

5.26. $y' + y = x\ \ y^2$. (Відповідь: $y = e^{-x}\sqrt[3]{xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C\ }$.)

5.27. $y' - y\tan x + y^2\cos x = 0$. Відповідь: $y = 1\ \ ((x + C)\cos x\ $.)

5.28. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\ \sqrt{y}}{cos^2x}$. (Відповідь: $y = (\frac{x\tan x + \ln\ \cos x\ + C}{x})^2$.)

5.29. $y' - y + y^2\cos x = 0$. (Відповідь: $y' = 2e^x/(e^x(\cos x + \sin x) + C)$.)

5.30. $y' = x\ \ \sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$. (Відповідь: $y = (\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3\ 4} + C)^2\ \ \sqrt{x^2 - 1}$.)

3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння
$y \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 1 + y^2$.

Розв'язок:

Диференціальне рівняння, в якому змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на один і той самий вираз, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Враховуючи що

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишемо це рівняння у вигляді:

$$y \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Помноживши обидві частини рівняння на dx, отримуємо:

$$y \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot dy = (1+y^2) \cdot dx.$$

В результаті поділу отриманого рівняння на добуток $(1+y^2) \cdot \sqrt{1-x^2}$ воно зводиться до вигляду:

$$\frac{y \cdot dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

в якому змінні вже відокремлені. Отже, дане рівняння є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Проінтегруємо обидві частини отриманого рівняння:

$$\int \frac{y \cdot dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ или } \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| = \arcsin x + C.$$

Це загальний інтеграл нашого диференціального рівняння.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| = \arcsin x + C.$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння
$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$.

Розв'язок:

Об'єднаймо члени, що містять dx і dy:

$$20x + 5xy^2 \;\; dx - \;\; 3y + 3x^2y \;\; dy = 0,$$

$$5x \;\; 4 + y^2 \;\; dx - 3y \;\; 1 + x^2 \;\; dy = 0.$$

Розділивши обидві частини отриманого рівняння на добуток

$1 + x^2 \quad 4 + y^2 \quad \neq 0$, зводимо його до виду:

$$\frac{5x}{1+x^2}dx - \frac{3ydy}{4+y^2} = 0;$$

$$\frac{5xdx}{1+x^2} - \quad \frac{3ydy}{4+y^2} = \frac{1}{2} ln\, C, \ \ C>0;$$

$$\frac{5}{2} \quad \frac{d\ \ 1+x^2}{1+x^2} - \frac{3}{2} \quad \frac{d\ \ 4+y^2}{4+y^2} = \frac{1}{2} ln\, C.$$

Застосовуючи формулу $\frac{du}{u} = ln\ \ u\ \ + C$, отрмуємо:

$$\frac{5}{2} ln\ \ 1 + x^2\ \ - \frac{3}{2} ln\ \ 4 + y^2\ \ = \frac{1}{2} ln\, C,$$

$$5\, ln\ \ 1 + x^2\ \ - 3\, ln\ \ 4 + y^2\ \ = ln\, C,$$

$$ln(1 + x^2)^5 - ln(4 + y^2)^3 = ln\, C,$$

$$ln\frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3} = ln\, C, \frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3} = C.$$

Відповідь: $\frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3} = C.$

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 9.$

Розв'язок:

Маємо однорідне рівняння першого порядку, вводимо підстановку:

$$\frac{y}{x} = t, y = t \cdot x, y' = t' \cdot x + t.$$

Дане рівняння перетвориться до виду:

$$t' \cdot x + t = t^2 + t + 9, \frac{dt}{dx} \cdot x = t^2 + 9.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dt}{t^2+9} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\frac{dt}{t^2+9} = \quad \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{3} arctg\frac{t}{3} = ln\ \ x\ \ + \frac{1}{3}C,\ \ arctg\frac{t}{3} = 3\, ln\ \ x\ \ + C, arctg\frac{y}{3x} = 3\, ln\ \ x\ \ + C,$$

$$arctg\frac{y}{3x} - ln\ \ x^3\ \ = C.$$

Відповідь: $arctg\frac{y}{3x} - ln\ \ x^3\ \ = C.$

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$y' = \frac{y}{x} + 5^{-\frac{y}{x}}.$

Розв'язок:

Припустимо $\frac{y}{x} = t,\ y = t \cdot x,\ y' = t' \cdot x + t$ і отримуємо рівняння:

$t' \cdot x + t = t + 5^{-t},$
$\frac{dt}{dx} \cdot x = 5^{-t},$
$5^{t} dt = \frac{dx}{x},$
$5^{t} dt = \quad \frac{dx}{x},$
$\frac{5^{t}}{ln\, 5} = ln\ x\ \ + C,$
$5^{t} = ln\, 5\, (ln\ x\ \ + C),$
$5^{\frac{y}{x}} = ln\, 5\, (ln\ x\ \ + C).$
Відповідь: $5^{\frac{y}{x}} - ln\, 5\, (ln\ x\ \ + C) = 0.$

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші
$y' - \frac{y}{x} = -\frac{ln\, x}{x},\ y(1)=1.$

Розв'язок:

Застосуємо метод варіації довільної сталої. З цією метою розглянемо спочатку відповідне однорідне лінійне рівняння

$y' - \frac{y}{x} = 0$ і знайдемо його загальне рішення:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \quad \frac{dx}{x},$

$ln\ y\ \ = ln\ x\ \ + C_1, y = \pm C_1 x,\ \ \pm C_1 = C,\ \ y = Cx.$

Тому загальний розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді
$y = C\ (x) \cdot x.$
Знаходимо
$y' = C\ '(x) \cdot x + C\ (x)$ і підставляємо y і y' в задане рівняння:
$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = -\frac{ln\, x}{x}$
або $C'(x) \cdot x = -\frac{ln\, x}{x},$
звідки $C(x) = \frac{ln\, x}{x} - \quad \frac{dx}{x^2} = \frac{ln\, x}{x} + \frac{1}{x} + C.$
Інтегруючи, отримуємо: $C(x) = - \quad \frac{ln\, x}{x^2} dx.$
До інтегралу в правій частині останньої рівності застосуємо метод інтегрування частинами, вважаючи, що
$u = ln\, x, dv = \frac{dx}{x^2}.$
Тоді

$du = \frac{dx}{x}, v = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x}, C(x) = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C.$

Отже, загальним розв'язком рівняння є:

$$y = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right) \cdot x$$

або

$$y = \ln x + Cx + 1.$$

Використовуючи початкові умови $x=1, y=1$, з останнього рівняння знаходимо C : $1 = \ln 1 + C + 1$. Отже, $C = 0$.

І отримуємо розв'язок задачі Коші: $y = \ln x + 1$.

Відповідь: $y = \ln x + 1$.

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y' + \frac{5y}{x} = 3x$.

Розв’язок:

Задане рівняння є лінійним. Вирішимо його методом підстановки:

$y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

Рівняння перетвориться до виду:

$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = 3x$.

Об'єднаємо члени з функцією $v(x)$: $v\left(u' + \frac{5u}{x}\right) + uv' = 3x$.

Прирівнюючи до нуля вираз в дужках, отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих функцій $u(x)$, $v(x)$:

$$\begin{cases} u' + \frac{5u}{x} = 0, \\ uv' = 3x. \end{cases}$$

Вирішуємо перше рівняння системи: $\frac{du}{dx} = -\frac{5u}{x}, \frac{du}{u} = -5\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{u} = -5\int\frac{dx}{x},$

$\ln|u| = -5\ln|x| + \ln C_1, \quad C_1>0, \quad |u| = C_1 \cdot |x|^{-5}, \quad u = \pm\frac{C_1}{x^5}.$

Нехай, $C_1=1$, виберемо знак “+” і знайдемо $u = \frac{1}{x^5}$.

Підставимо вираз $u = \frac{1}{x^5}$ в друге рівняння системи.

Отримаємо: $\frac{1}{x^5} \cdot \frac{dv}{dx} = 3x, dv = 3x^6dx, \quad \int dv = 3\int x^6dx, v = \frac{3}{7}x^7 + C.$

Так як $y=u\cdot v$, $u=\frac{1}{x^5}$, $v=\frac{3}{7}x^7+C$, то $y=\frac{1}{x^5}\ \ \frac{3}{7}x^7+C\ \ $.

Відповідь: $y=\frac{1}{x^5}\ \ \frac{3}{7}x^7+C\ \ $.

Приклад 7. Знайти розв'язок задачі Коші
$y'-y\cos x=\sin 2x,\ y(0)=1.$

Розв'язок:

Задане диференціальне рівняння є лінійним. Вводимо підстановку $y=u\cdot v$.

Тоді $y'=u'v+uv'$ і рівняння приводиться до вигляду:

$u'v+uv'-uv\cos x=\sin 2x.$

Об'єднаймо члени, що містять $u(x)$ або $v(x)$:

$$v\ \ u'-u\cos x\ \ +uv'=\sin 2x.$$

Функцію $u(x)$ выберемо так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$u'-u\cos x=0.$$

Отже, $uv'=\sin 2x$. Система в даному випадку запишеться так:

$$u'-u\cos x=0,$$
$$uv'=\sin 2x.$$

Розв'язуємо перше з рівнянь системи:

$u'-u\cos x=0,\ \frac{du}{dx}=u\cos x,\ \frac{du}{u}=\cos x\,dx,$

$\frac{du}{u}=\quad \cos x\,dx,\ \ln\ u\ \ =\sin x+C_1,\ \ u\ \ =e^{\sin x+C_1},\ u=\pm e^{\sin x+C_1}.$

Вважаємо C_1=0 і вибираємо $\quad u=e^{\sin x}$.

Подставимо отриманий вираз до другого рівняння системи:

$e^{\sin x}\cdot v'=\sin 2x,\quad e^{\sin x}\cdot\frac{dv}{dx}=\sin 2x,\quad dv=\frac{\sin 2xdx}{e^{\sin x}},$

$dv=\quad e^{-\sin x}\cdot\sin 2xdx,$

$$v=2\quad e^{-\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx.$$

Для знаходження інтеграла в правій частині рівності застосуємо підстановку

$t=-\sin x$, тогда $dt=-\cos x\,dx$, $\cos x\,dx=-dt,\ v=2\quad e^t\cdot tdt.$

Інтегрування по частинах дає:

$u_1=t,\ dv_1=e^tdt,\ du_1=dt,\ v_1=\quad e^tdt=e^t,\ v=2\ \ te^t-\quad e^tdt\ \ =$

$2\ \ te^t-e^t\ \ +C.$

Отже, $v=2e^t\ \ t-1\ \ +C,$

$$v = -2e^{-\sin x}\left(1 + \sin x\right) + C.$$

отримуємо загальне рішення вихідного рівняння:

$y = e^{\sin x}\left(-2e^{-\sin x}\left(1 + \sin x\right) + C\right)$, або

$$y = -2\left(1 + \sin x\right) + Ce^{\sin x}.$$

Розв'яжемо задачу Коші, використовуючи початкову умову: $y(0) = 1$.

Знайдемо значення *C*, вважаючи в рівнянні *x*=0*, y*=-1:

$$-1 = -2\left(1 + \sin 0\right) + Ce^{\sin 0}, \quad -1 = -2 + C, C = 1.$$

Підставляючи значення $C = 1$, знаходимо частинний розв'язок заданого рівняння, що задовольняє початковій умові. Задача Коші розв'язана.

Відповідь: $y = e^{\sin x} - 2(1 - \sin x)$.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші.

$4y^2dx + \left(e^{\frac{1}{2y}} + x\right)dy = 0, y(e) = \frac{1}{2}$.

Розв'язок:

Будемо вважати *x* функцією від *y* і задане рівняння приведемо до вигляду:

$4y^2\frac{dx}{dy} + e^{\frac{1}{2y}} + x = 0$, або

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{4y^2} \cdot x = -\frac{1}{4y^2} \cdot e^{\frac{1}{2y}}.$$

Рівняння є лінійним відносно функції *x*=*x*(*y*).

Застосуємо підстановку *x*=*uv*, де в силу прийнятої угоди *u*=*u*(*y*), *v*=*v*(*y*).

Таким чином, $\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy}$.

Вихідне рівняння перетвориться так:

$$\frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy} + \frac{1}{4y^2}uv = -\frac{1}{4y^2}e^{\frac{1}{2y}},$$

$$v\left(\frac{du}{dy} + \frac{1}{4y^2}u\right) + u\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{4y^2}e^{\frac{1}{2y}}.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{du}{dy} + \frac{1}{4y^2}u = 0 \\ u\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{4y^2}e^{\frac{1}{2y}} \end{cases}.$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$\frac{du}{dy}+\frac{1}{4y^2}u=0,\ \frac{du}{dy}=-\frac{1}{4y^2}u,\quad \frac{du}{u}=-\frac{1}{4}\quad y^{-2}dy,\, \ln u=\frac{1}{4y},$

$$u=e^{\frac{1}{4y}}.$$

Тоді, друге рівняння системи прийме вигляд:

$e^{\frac{1}{4y}}\frac{dv}{dy}=-\frac{1}{4y^2}e^{\frac{1}{2y}}.$

Розділимо змінні: $dv=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{4y}}\cdot\frac{dy}{y^2};\, v=\quad e^{\frac{1}{4y}}d\quad\frac{1}{4y}\quad=e^{\frac{1}{4y}}+C,$

на підставі формули $\quad e^{u}du=e^{u}+C.$

Отже, загальний розв’язок має вигляд: $x=e^{\frac{1}{4y}}\quad e^{\frac{1}{4y}}+C\quad.$

Використовуємо початкову умову: $\quad y(e)=\frac{1}{2}$:

$e=e^{\frac{1}{2}}\quad e^{\frac{1}{2}}+C\quad,\quad e=e+e^{\frac{1}{2}}\cdot C,\, C$ =0.

Підставляючи це значення *C* в загальне розв'язок, знаходимо частинний розв'язок, що задовольняє початковому умову $\qquad y(e)=\frac{1}{2}$:

$x=e^{\frac{1}{2y}}.$

Цей частинний розв'язок можна також записати у вигляді:

$\frac{1}{2y}=\ln x,\ 2y=\frac{1}{\ln x},\ y=\frac{1}{2\ln x},\ y=\frac{1}{\ln x^2}.$

Відповідь: $y=\frac{1}{\ln x^2}.$

Приклад 9. Знайти розв'язок задачі Коші
$y'-y\cdot tgx=-\frac{2}{3}y^4\cdot\sin x,\, y(0)=1.$

Розв’язок:

Маємо диференціальне рівняння Бернуллі (*n*=4).

Підстановка $\quad y=u\cdot v,\ y'=u'v+uv'$

перетворює рівняння наступним чином:

$u'v+uv'-uvtgx=-\frac{2}{3}u^4v^4\sin x,$

$v\ \ u'-uvtgx\ \ +uv'=-\frac{2}{3}u^4v^4\sin x.$

Складаємо систему диференціальних рівнянь: $\begin{array}{l} u' - utgx = 0, \\ uv' = -\frac{2}{3}u^4v^4 \sin x \end{array}$.

Вирішуємо перше рівняння системи:

$\frac{du}{dx} = u \cdot tgx, \frac{du}{u} = tgxdx, \quad \frac{du}{u} = \quad tgxdx, \ ln\, u \ = -\, ln\cos x + ln\, C_1, \ u \ = \frac{C_1}{\cos x},$

$C_1 > 0, \quad u = \pm\frac{C_1}{\cos x}, \quad u = \frac{1}{\cos x}.$

Перейдемо до вирішення другого рівняння системи:

$uv' = -\frac{2}{3}u^4v^4 \sin x, \ \ \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{3}u^3v^4 \sin x, \ \ \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x}v^4.$

Розділимо змінні:

$v^{-4}dv = -\frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx,$

$v^{-4}dv = \frac{2}{3}\ \cos x\ {}^{-3}d(\cos x),$

$\frac{v^{-3}}{-3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\cos^{-2}}{-2} - \frac{C}{3},$

$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + C,$

$\frac{1}{v^3} = \frac{1+C\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x},$

$v^3 = \frac{\cos^2 x}{1+C\cdot\cos^2 x},$

$v = \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{1+C\cdot\cos^2 x}} = \ \frac{\cos^2 x}{1+C\cdot\cos^2 x}\ {}^{\frac{1}{3}}.$

Використовуючи знайдені вирази функцій $u(x)$ и $v(x)$, знаходимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = \frac{1}{\cos x}\cdot\ \frac{\cos^2 x}{1+C\cdot\cos^2 x}\ {}^{\frac{1}{3}}, \text{ або } \ y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x(1+C\cdot\cos^2 x)}}.$$

Вважаючи, що x=0, y=1, знаходимо:

$1 = \frac{1}{\sqrt[3]{1+C}}, \quad \sqrt[3]{1+C} = 1, \quad 1 + C = 1, \ \ C = 0.$

Шуканий частинний розв'язок: $y = \frac{1}{\cos x}\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}.$

Відповідь: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}.$

Список рекомендованої літератури

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука. Главная редакции физико-математической литературы, 1981. – 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Вища шк., 1993. – 648 с.
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч.3. – Мн. Выш. шк., 1985. – 208 с.
4. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ: Учеб. Для техникумов. – М.: Высш. шк., 1990. – 416 с.
5. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
6. Овчинников В.П. Вища математика: Підручник У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; Пер. з Рос. Є.В. Бондарчук, Ю.Ю.Костриці, Л.П. Оніщенко. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: Навч. Посібник / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К.: Вища шк., 1994. – 455 с.
8. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Підручник: У 2 кн.: Кн. 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.
9. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. http://www.nbuv.gov.ua/ – сайт «Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського».

3. http://kpi.ua/ – сайт «Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».

2. – сайт Національний університет «Чернігівська політехніка»