

**Ольга Бондар<sup>1</sup>, Олексій Извалов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій  
Економіко-технологічного Інституту ім. Р. Ельворті (Кропивницький, Україна)

**E-mail:** [bondarkla@ukr.net](mailto:bondarkla@ukr.net) **ORCID** <https://orcid.org/0000-0001-5877-5667>

<sup>2</sup>кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій  
Економіко-технологічного Інституту ім. Р. Ельворті (Кропивницький, Україна)

**E-mail:** [alexey@globalgamejam.org](mailto:alexey@globalgamejam.org) **ORCID** <https://orcid.org/0000-0002-4935-7153>

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В КОМП'ЮТЕРНИХ НАУКАХ**

*На основі широкого уявлення про математичну модель, як про абстрактний об'єкт, який може бути, зокрема, методом дослідження, у роботі досліджено розв'язки окремих задач, які запропоновано розглянути в якості математичних моделей. Розглянуто приклади визначення або ідентифікації реальних об'єктів програмування за отриманими моделями з їх можливими застосуваннями в комп'ютерних науках. Показано значення даного дослідження для розвитку абстрактного мислення програмістів. Зазначена можливість застосування дослідження в навчанні майбутніх фахівців з комп'ютерних наук, а саме, майбутніх вебдизайнерів, розробників ігрових додатків, фахівців з розпізнавання образів.*

**Ключові слова:** математичне моделювання; інформаційні технології; абстрактне мислення; ігрові додатки; розпізнавання образів.

Рис.: 6. Бібл.: 8.

**Актуальність теми дослідження.** Математичні моделі широко застосовуються у різних галузях людської діяльності. Математичне моделювання посідає провідне місце серед інших методів досліджень, особливо завдяки сучасній комп'ютеризації суспільства. Наприклад, IBM і NASA створюють моделі, щоб зробити наукові знання більш доступними. Ці моделі можна використовувати в різноманітних програмах, від класифікації та визначення об'єктів до відповідей на запитання та пошуку інформації.

Моделювання досягає високої продуктивності в різних областях: астрофізиці, геліофізиці, в біологічних, медичних, фізичних науках. Реалізована у вигляді програмного коду модель об'єкта дослідження тим повніше описує властивості і взаємозв'язки об'єкта, чим точніше є його модель.

Маючи на увазі впровадження відкритого та прозорого штучного інтелекту, іноземні компанії створюють доступні моделі, зокрема, для вдосконалення наукової пошукової системи за допомогою цих моделей.

В цьому контексті дослідження абстрактних математичних моделей з установленням їх відповідності тим чи іншим об'єктам є важливим, оскільки «Більшість математичних моделей – це результат роботи математиків, але не дослідників конкретної проблеми або предметної області» [1, с. 13].

Відтак, включення в методологію навчання фахівців з інформаційних технологій визначення відповідності математичної моделі певному об'єкту з можливими напрямками його застосування є актуальним для розв'язку задач комп'ютерних наук.

**Постановка проблеми.** Зазвичай під моделлю розуміють функцію або відображення прообраза – множини, як правило, відомих вхідних параметрів в образ – множину вихідних параметрів. Задача ідентифікації моделі розглядається, як задача пошуку серед множини можливих моделей тої, яка перетворює заданий прообраз в необхідний образ.

При цьому адекватність моделі визначається не тільки потрібним образом – цілком дослідження, а і відповідністю реальному об'єкту. Ідентифікація цього об'єкта-прообраза за відомою його математичною моделлю є складною проблемою, зокрема, при дослідженні інформаційних систем. Проблема оцінки невизначеності також ускладнює процес обґрунтування правильності моделей, створюючи ситуацію, у якій ані модельована, ані спостережувана поведінка системи не відомі з упевненістю [2].

У багатьох випадках розв'язати проблему дозволяє абстрактне мислення, завдяки якому можна отримати формальне підтвердження (або обґрунтування) адекватності розглядуваної моделі.

Відтак, розвиток абстрактного мислення є важливим для фахівця з інформаційних технологій. Програміст з розвиненим абстрактним мисленням може всебічно оцінити завдання, визначити його логічні частини і їх взаємозв'язок, оцінити складність і знайти оптимальний алгоритм виконання.

При цьому проблема формування образного мислення, яке пов'язане з процесами уяви, вилученням необхідної інформації з пам'яті, об'єднанням образів в структурні моделі є важливою складовою системи підготовки фахівця з комп'ютерних наук.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** До математичних моделей іноді відносять [3] моделі, які використовують математичні формули для представлення зв'язку між різними змінними, параметрами та обмеженнями. Більш широкий погляд демонструє уявлення про математичну модель, як про абстрактний об'єкт, який відповідає проблемі розв'язання того чи іншого класу математичних і прикладних задач [4].

В цьому контексті навіть дослідження певного об'єкта може розглядатися як модель дослідження інших об'єктів з метою їх практичного застосування (рис. 1). Наприклад, у роки другої світової війни дослідження операцій широко застосовувалося для планування бойових дій – операцій. По закінченні війни фахівці з дослідження операцій, продовжуючи свою роботу в збройних силах США і Великої Британії, опублікували ряд результатів у відкритій пресі, що викликало сплеск суспільного інтересу до цього напрямку. Відтак виникла тенденція до застосування методів дослідження операцій у комерційній діяльності, в економіці, промисловості. Таким чином, дослідження військових операцій виявилось моделлю дослідження людської діяльності в багатьох галузях [5].

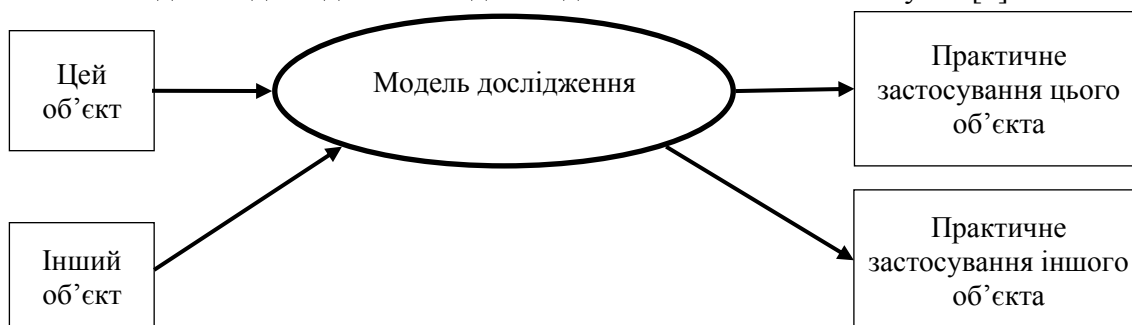


Рис. 1. Модель дослідження як математична модель

Джерело: розроблено авторами.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Процес математичного моделювання часто визначають (з різною мірою деталізації) наступною послідовністю дій: дослідження властивостей певного об'єкта, створення його моделі, вивчення відповідних властивостей моделі і її практичне застосування.

У комп'ютерному програмуванні процес моделювання природньо визначається професійними якостями програмістів, а саме, наявністю у них логічного, гнучкого й динамічного мислення, високого рівня розвитку пам'яті (особливо словесно-логічної) та уваги, розвинутої уяви, що є передумовою для розвитку творчого мислення [6].

Аналогічно тому, як тіло загартовується фізичними вправами, проблема розвитку абстрактного мислення програміста вирішується «розумовими вправами», тобто з набуттям ним відповідного професійного досвіду. Відомий композитор Д. Уільямс казав: «Без практики – теорія марна, після практики теорія – очевидна».

**Метою статті** є формування насамперед у програмістів-початківців уміння бачити в абстрактних математичних моделях множину реальних об'єктів з можливостями їх застосування в комп'ютерних науках (рис. 2).

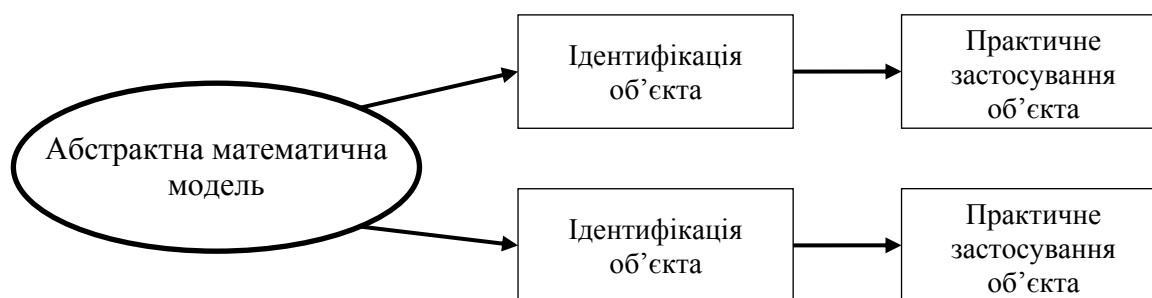


Рис. 2. Схема дослідження моделі

Джерело: розроблено авторами.

**Виклад основного матеріалу.** Зацікавленість даною темою виникла у нас із розгляду кількох задач, які пропонувалися всім бажаючим групою вчених і дослідників, пов'язаних з IBM Research [7].

Аналіз розв'язків показав, що їх можна розглядати, як математичні моделі реальних об'єктів, ідентифікація яких визначає множину прообразів моделі, яка може включати і прообрази, покладені в основу задач зазначеними вченими і дослідниками.

Наведемо формулювання однієї із задач мовою оригіналу [8]:

«This month's puzzle concerns configurations of 4 distinct points in the plane. Suppose we know the 6 distances between pairs of points only take on two values. We ask for a list of the distinct possible configurations. For each configuration give the number of long distances and the number of short distances (which must sum to 6) and the ratio of the long distance to the short distance».

Схематичне зображення розв'язку задачі у вигляді фігур (configurations) показано на рис. 3.

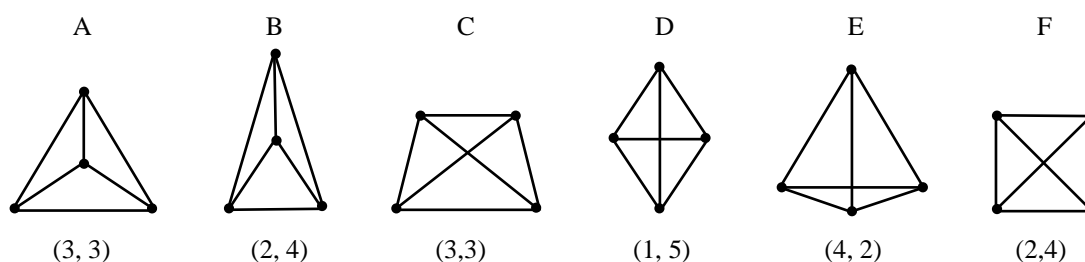


Рис. 3. Схематичне зображення розв'язку задачі

Джерело: розроблено авторами.

Виникає питання – чи можуть ці фігури бути абстрактними моделями реальних об'єктів? Якщо так, то яких об'єктів? Аналізуючи рисунок, ми бачимо, що тільки у фігурах А і В всі 4 точки перетину відрізків є заданими. Інші 4 фігури (С – F) мають ще по одній – п'ятій, точці перетину, яка не є заданою.

Логічно припустити, що ця точка може бути точкою 2D зображення 3D відрізків, які лежать на мимобіжних прямих. Отже, усі фігури на малюнку можна розглядати, як зображення піраміди, тобто 3D об'єкта, на площині. Таким чином, ми розглядаємо їх як моделі, зауваживши, що в умові задачі не вказано, який реальний об'єкт послужив основою для створення конфігурацій.

Перед розробником комп'ютерних ігор або фахівцем з розпізнавання образів при цьому може виникнути такі питання:

- Якими є можливі позиції спостерігача, що бачить у фігурі з рис. 3 правильний тетраедр?

- Які з фігур з рис. 3 можуть мати такий вигляд для спостерігача, що розташований назовні тетраедра?

- Чи є (та який) розв'язок узагальненої задачі – знайти конфігурації чотирьох різних точок на площині, відстані між парами яких приймають інші, ніж два, значення?

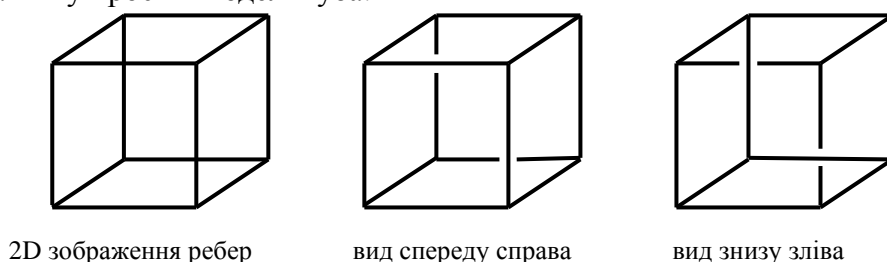
- Які розв'язки має аналогічна задача з більшою за 4 заданих точки на площині?
- Якою є 3D геометрична фігура за вказаними на рисунку її 2D зображеннями?

Зауважимо, що відповіді на окремі питання не є тривіальними. Наприклад, на останнє питання є нескінченно багато відповідей. Щоб їх описати, важливо, на наш погляд, визначити напрями пошуку, тобто алгоритми дій.

Якщо 3D геометрична фігура розглядається як тверде тіло, то для її ідентифікації застосовують з додатковими вхідними параметрами так зване «твердотільне» моделювання, яке використовується в різних системах автоматизованого проектування.

Якщо 3D геометрична фігура розглядається як тіло, утворене тільки поверхнями, то для її ідентифікації є сенс застосовувати поверхневе моделювання.

Нарешті, якщо 3D геометрична фігура розглядається як тіло, утворене тільки ребрами (в нашому випадку прямолінійними) то є сенс застосувати каркасне моделювання. Воно є більш простим у комп'ютерній реалізації, але має основний недолік – неоднозначність інтерпретації каркасної моделі. Наприклад, таку неоднозначність можна бачити (рис. 4) навіть у простій моделі куба.

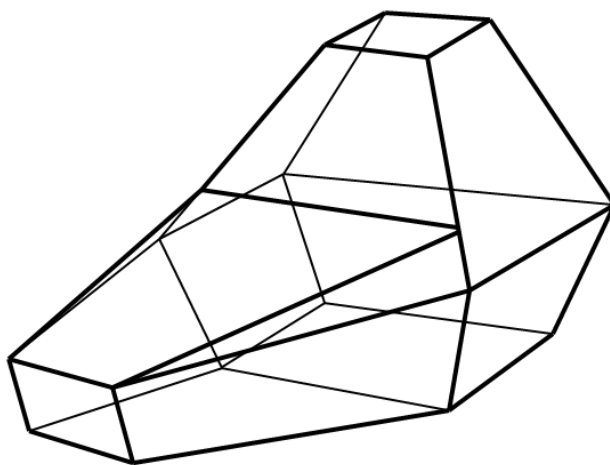


*Рис. 4. Інтерпретація каркасної моделі куба*

Джерело: розроблено авторами.

Каркасне моделювання наразі є дуже важливим для нас у ситуації війни, коли невеликим дронам потрібно розпізнавати ворожу техніку, зокрема, її каркасні моделі. Наприклад, важливо вміти швидко відтворювати просторовий образ автомобіля баггі – невеликого легкого автомобіля високої прохідності (рис. 5).

У наведеному вище прикладі математичною моделлю слугували геометричні об'єкти. Але під моделлю в широкому сенсі розуміють об'єкти будь-якої природи – матеріальні або абстрактні. Розглянемо приклад математичної моделі алгебраїчної системи, сформульований згаданими дослідниками з IBM Research [7] у наступній задачі.



*Рис. 5. Фрагмент каркасу автомобіля баггі з виділеними для 3D моделі ребрами*

Джерело: розроблено авторами.

Визначити четвірки натуральних чисел  $(a, b, c, d)$ , які при заданому натуральному  $m$  задовольняють умові

$$a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = m.$$

Скільки таких четвірок має бути для цього  $m$ ?

Наш досвід роботи з програмістами-початківцями показав, що першою їх думкою було написати код. Але після витрати певного часу на пошук окремих відповідей і за відсутності загальної відповіді (при довільному  $m$ ) їм було запропоновано шукати нові підходи до вирішення – із застосуванням математичної логіки.

Хоча насправді для загальної відповіді виявилось достатньо шкільного курсу алгебри, а код потрібен хіба що для розкладання числа  $m$  на прості множники. Відтак, алгоритм розв'язку для довільного  $m$  виявився цікавою для початківців розумовою вправою.

Цей приклад описує алгебраїчну модель, за якою людина з розвинутим абстрактним мисленням може побачити реальні об'єкти. Наведемо ті з них, які знаходяться «на поверхні».

Аналізуючи умову задачі, ми природньо згадуємо формулу площі круга і кільця, а натуральні числа можуть означати можливість вписати ці фігури у певну сітку.

Аналогічно першій задачі перед програмістом може виникнути ряд питань одного алгоритмічного ряду:

- Скільки є вписаних у сітку кілець заданої площі?
- Скільки є вписаних у сітку кілець заданої площі круга ( $d$  може бути нулем) (рис. б)?
- Скільки варіантів вписати у сітку вписаний вектор обертанням навколо його початку?
- Скільки вписаних у сітку кілець можна отримати з вписаного у сітку прямокутника, площа якого в  $\pi$  разів більша за площу кільця?

У програмуванні розглянуті абстрактні моделі можуть дати можливість визначити загальний інтерфейс, різні реалізації якого можна створити за допомогою поліморфізма.

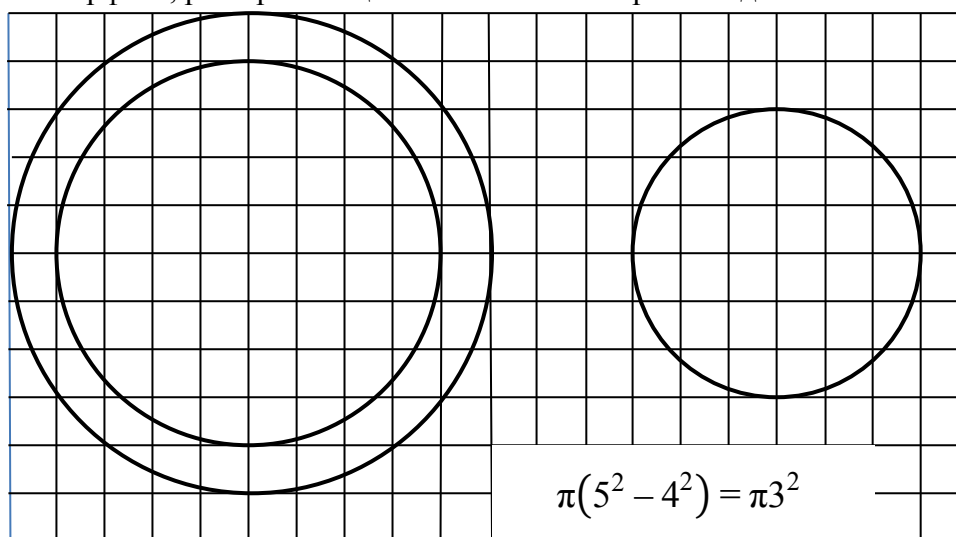


Рис. 6. Вписані у сітку кільце і круг однакових площ

Джерело: розроблено авторами.

**Висновки.** Результатом нашого дослідження є:

- розширення поняття про математичну модель на прикладах метода дослідження, геометричних конфігурацій, алгебраїчних рівнянь;
- аналіз математичних моделей з визначенням їх характерних рис;
- зазначення можливостей застосування математичних моделей в програмуванні.

Це дозволить формувати, в першу чергу, у програмістів-початківців уміння аналізувати абстрактні математичні об'єкти, розглядаючи їх, як моделі тих чи інших явищ.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання даного дослідження в навчальному процесі майбутніх фахівців з комп'ютерних наук, а саме для:

- розвитку абстрактного (образного і логічного) мислення майбутніх вебдизайнерів, розробників ігрових додатків, фахівців з розпізнавання образів;
- ґрунтовного аналізу завдань, уміння оцінити складність алгоритму;
- пошуку нових підходів до вирішення складних проблем у комп'ютерних науках.

### Список використаних джерел

1. Теорія і практика ідентифікації об'єктів управління : монографія / І. Л. Левчук, Г. І. Манко, В. Я. Тришкін, В. І. Корсун. – Дніпро : ДВНЗ УДХТУ, 2019. – 203 с.
2. Thacker, B. H. Concepts of Model Verification and Validation / B. H. Thacker, S. W. Doebeling, F. M. Nemez et al. – Los Alamos : LANL, 2004. – 41 p.
3. Штельма, О. М. Математичне моделювання і оптимізація : конспект лекцій / О. М. Штельма. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 56 с.
4. Основи біомедичного радіоелектронного апаратобудування / С. М. Злепко, С. В. Павлов, Л. Г. Коваль, І. С. Тимчик. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 133 с.
5. Бартіш, М. Я. Дослідження операцій / М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний. – Ч. 1 : Лінійні моделі. – Львів : Видавничий центр Львівського національного університету ім. І. Франка, 2007. – 168 с.
6. Тохтамиш, О. М. Порівняльний аналіз характеристик творчого мислення військових та цивільних програмістів / О. М. Тохтамиш, Д. М. Головка // Педагогічний процес: теорія і практика. – 2016. – № 1 (52). – С. 41-45.
7. IBM Research [Electronic resource]. – Access mode: <https://research.ibm.com>.
8. IBM Research [Electronic resource]. – Access mode: <https://research.ibm.com/haifa/ponderthis/challenges/May2006.html>.

### References

1. Levchuk, I.L. (2019). *Teoriia i praktyka identyfikatsii ob'ektiv upravlinnia [Theory and practice of identification of management objects]*. DVNZ UDHTU.
2. Thacker, B. H. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Los Alamos : LANL.
3. Shtelma, O.M. (2019). *Matematychnye modeliuвання i optymizatsiia [Mathematical modeling and optimization]*. XNUMX.
4. Zlepko, S.M. (2011). *Osnovy biomedychnoho radioelektronnoho aпаратobuduvannya [Basics of biomedical radioelectronic apparatus construction]*. VNTU.
5. Bartish, M. Ya. (2007). *Doslidzhennia operatsii [Operations Research]. Part 1. Liniini modeli. [Linear models]*. Vydavnychiy tsentr Lvivskoho natsionalnoho universytetu im. I. Franka.
6. Tokhtamysh, O.M. (2016). Porivnialnyi analiz kharakterystyk tvorchoho myslennia viiskovykh ta tsyvilnykh prohramistiv [Comparative analysis of the characteristics of creative thinking of military and civilian programmers]. *Pedahohichnyi protses: teoriia i praktyka – Pedagogical process: theory and practice, 1(52)*, 41-45.
7. IBM Research. <https://research.ibm.com>.
8. IBM Research. <https://research.ibm.com/haifa/ponderthis/challenges/May2006.html>.

Отримано 04.03.2024

UDC 519.711:004.94

### *Olha Bondar<sup>1</sup>, Olexiy Izvalov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Technology  
Robert Elvorti Economics and Technology Institute (Kropyvnytskyi, Ukraine)  
E-mail: [bondarkla@ukr.net](mailto:bondarkla@ukr.net). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5877-5667>

<sup>2</sup> PhD in Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Technology  
Robert Elvorti Economics and Technology Institute (Kropyvnytskyi, Ukraine)  
E-mail: [alexey@globalgamejam.org](mailto:alexey@globalgamejam.org). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4935-7153>

### MATHEMATICAL MODELS IN COMPUTER SCIENCES

*Based on a broad idea of a mathematical model as an abstract object that can be, in particular, a research method, the paper analyzes solutions to several problems proposed by a group of scientists and researchers associated with IBM Research [5].*

*In the tasks, it was not reported which objects served as the basis for setting the tasks. Therefore, analyzing each solution, we accepted it as a mathematical model of undefined real objects - prototypes of the model.*

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

Therefore, our task was to determine or identify possible real objects-prototypes of the specified mathematical models. It is possible that among them there could be those that served as the basis for setting the tasks.

Our goal was to help, first of all, novice programmers to form and develop imaginative thinking, in particular, the ability to perceive abstract mathematical objects as models of certain real phenomena.

For this purpose, we have provided several options for interpreting the models. In the geometric model, we saw 2D images of certain 3D geometric shapes. This view can be useful for computer game developers or pattern recognition specialists.

In the algebraic model, we saw the possibilities for applying the formulas for the area of a circle and a ring, as well as the possibility of fitting geometric shapes into a certain grid.

The general result of our research is:

- expansion of the concept of a mathematical model using the examples of the operations research method, geometric configurations and algebraic equations;

- analysis of the considered mathematical models with the definition of their characteristic features;

- specifying the possibilities of applying mathematical models in programming.

The practical significance of the obtained results lies in the use of this research in the educational process of future computer science specialists, namely, for:

- development of abstract (figurative and logical), thinking of future Web designers, game application developers, pattern recognition specialists;

- thorough analysis of tasks, the ability to assess the complexity of the algorithm;

- finding new approaches to solving complex problems in computer science.

**Keywords:** mathematical modeling; Information Technology; abstract thinking; game applications; pattern recognition.

Fig.: 6. References: 8.