DOI: 10.25140/2411-5363-2024-1(35)-357-367
УДК 528.22:551.24

Олександр Тадеєв

кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та картографії
Національний університет водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)
E-mail: o.a.tadyeyev@nuwm.edu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-4566-0160. **ResearcherID:** B-6081-2019

ДО ПРОБЛЕМИ ОЦІНЮВАННЯ КУТОВИХ СПОТВОРЕНЬ СУЧАСНИХ ЗЕМНИХ РЕФЕРЕНЦНИХ СИСТЕМ

Представлена у статті інформація є науково-методичного характеру. Пропонується узагальнюючий підхід і метод вирішення проблеми оцінювання кутових спотворень сучасних земних референцних систем, які спричинені впливом геодинамічних процесів і підлягають визначенню за даними моніторингу Землі методом глобальних навігаційних супутникових систем GNSS. В основу методу покладено теорію перетворення образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів – дотичного евклідового простору, який параметризовано прямокутною декартовою системою координат. Такий вибір обґрунтований тим фактом, що саме ця система параметризації є геометричною основою сучасних референцних систем і підлягає моніторингу методом GNSS. Проблема оцінювання спотворень референцних систем розглянута у взаємозв'язку з проблемою оцінювання деформацій Землі. Наведено теоретичні обґрунтування, алгоритм побудови функціональної моделі на засадах гомеоморфізму перетворення простору і результати розв'язків, які в сукупності утворюють метод оцінювання тривимірних деформацій Землі. Загальні умови гомеоморфізму перетворень дають змогу оцінювати нелінійні деформації Землі безвідносно до їх масштабу – глобального, регіонального чи локального. У статті акцентовано на спроможності методу виражати жорсткі обертання Землі. Доведено, що саме така ознака деформації асоціюється з кутовими спотвореннями системи координат. Наведено аналітичні вираження абсолютних показників кутових спотворень системи координат і напрямів осей координат деформованої системи відносно початкового положення в ортогональному стані. Метод може бути рекомендований для моніторингу умовних статичних і, найбільшою мірою, кінематичних референцних систем національного і регіонального масштабів на територіях з підвищеною активністю геодинамічних процесів.

***Ключові слова**: референцна система; система координат; деформація; жорсткі обертання Землі; GNSS.*
Рис.: 2. Бібл.: 12.

Актуальність теми дослідження. Встановлення відлікових систем у геодезії завжди належало до розряду проблем, які потребували першочергового вирішення. Запровадження у геодезичну практику супутникових навігаційних технологій та систем позиціювання зумовило переосмислення традиційних підходів до вирішення проблеми. Це пов'язано із введенням у практику референцних систем, які внаслідок впливу різних факторів піддаються змінам у часі з погляду порушення їх фундаментальних геометричних та фізичних умов.

Постановка проблеми. Загалом, неможливо вибрати систему відліку, яка була б жорстко пов'язана з тілом планети й залишалась незмінною в умовах, коли остання деформується. Здебільшого на практиці використовують модель відлікової системи, яка ґрунтується на малих змінах положення точок тіла відносно неї. Така модель реалізовується під умовою NNR (no-net-rotation). Вона накладає обмеження на систему з погляду прирівнювання нульового сумарного моменту імпульсу всіх точок поверхні планети, які об'єднані у межах літосферних плит, і моменту імпульсу Землі в цілому. Таке обмеження зумовлює врахування лише середніх інтегральних показників зміщення, зміни масштабу й обертань системи відносно її стану на фіксовану референцну епоху t_0. За такої концепції деформації земної поверхні не беруться до уваги з тієї причини, що їх швидкість не дає внеску у відносний або деформаційний момент імпульсу. Модель системи, обмежену такими умовами, вважають практично допустимою і називають системою Тіссерана [1]. Саме таку модель взято за основу створення умовних статичних референцних систем типу CTS (Conventional Terrestrial System), зокрема, глобальної ITRS (International Terrestrial Reference System) чи похідних від неї регіональних систем, зокрема європейської ETRS.

Розвиток супутникових навігаційних технологій підтвердив гіпотезу Альфреда Вегенера про нерівномірність деформації земної поверхні внаслідок складних процесів глибинної динаміки Землі та її поступально-обертового руху в просторі. Це стало можливим завдяки накопиченню даних моніторингу Землі, найбільшою мірою, методом GNSS.

Накопичені дані та їх аналіз спричинили відмовлення від гіпотези твердої оболонки Землі на користь динамічної концепції тектоніки літосферних плит. Диференціація планети на плити стала можливою за ознакою різнонаправлених зміщень станцій GNSS. Теорія тектоніки плит стала визначальною і концептуально вплинула на формування проблем не тільки сучасної геодинаміки, але й геодезії. На цій основі намітивсь новий напрям сучасної геодезії, пов'язаний зі створенням референцних систем кінематичного типу. Якщо у статичних системах рухи і деформації плит зумовлюють необхідність їх прив'язки до певної епохи t_0, то в кінематичних системах поняття вихідних статичних дат взагалі не береться до уваги. Натомість користувачам пропонується використовувати координати пунктів у системі кінематичних дат безвідносно до їх фіксації на ту чи іншу референцну епоху.

Аналіз досліджень проблеми. ITRS, як глобальна система типу CTS, пов'язана з планетою таким чином, що рухається, обертається та зазнає масштабування разом з нею. Моніторинг системи здійснюється методами космічної геодезії сумісно з моніторингом Землі. За результатами моніторингу встановлюються ITRF-реалізації (International Terrestrial Reference Frame), які відіграють роль вихідних геодезичних дат і відображають стан системи на епоху t_0. Умови статичної моделі референцної системи відносно її реалізації у момент t_0 з часом порушуються. Це є приводом для періодичного оновлення реалізацій. Новітні розв'язки (реалізації) системи визначаються з урахуванням значущості змін, що відбулися, і враховуються параметрами переходу (трансформації). Беруться до уваги, зокрема, зміщення T_x, T_y, T_z початку відліку у відношенні до попередньої реалізації, масштабний фактор D, зміна орієнтування осей координат R_x, R_y, R_z та швидкості усіх цих параметрів. Розв'язки ITRF досягають використанням лінеаризованої форми чотирнадцятипараметричного перетворення Гельмерта. Параметри R_x, R_y, R_z, як середні інтегральні показники обертання осей координат, не передбачають диференціації їх значень з погляду спотворення ортогональності системи координат. Це є наслідком використання умови відсутності глобальних залишкових обертань системи відносно горизонтальних тектонічних рухів у масштабі всієї планети [1; 2].

Носіями кінематичних систем є GNSS-станції, координати яких постійно змінюються. Зміни залежать від інтенсивності тектонічних процесів. Використання кінематичних систем надзвичайно актуальне для територій локального чи регіонального масштабів з явно вираженим аномальним характером процесів передусім локалізованих у межах літосферних плит або у межах їх взаємодії. Наразі у геодезичної спільноти не існує уніфікованого алгоритму встановлення кінематичних систем. У кожному окремому випадку беруть до уваги специфічну для території стратегію врахування впливу тектоніки плит. Враховуючи, що система відліку має бути прив'язана до тіла планети або його частини, ігнорування перебігу тектонічних процесів на практиці призводить і призводитиме до суттєвого послаблення геодезичної інфраструктури. За рахунок цього з часом проявиться вплив неточності геодезичної базової інформації [3].

Порушення умов створення з погляду врахування тектонічних процесів має наслідком деформацію відлікової системи. Саме деформації референцних систем набувають зараз неабиякого науково-практичного інтересу. Це пов'язано з оцінюванням деформацій не стільки систем типу CTS, як кінематичних систем. Вони мають забезпечити стабільність земної координатної системи передусім з погляду врахування впливу тектонічних процесів локального масштабу. Показовими з цього погляду є вже використовувані кінематичні системи NZGD2000 [4], DRF-Iceland [5], ATRF [6]. Активно дискутується потреба використання кінематичних систем для території Скандинавського півострова [7].

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Функціонування існуючих та створення нових референцних систем немислиме без врахування їх взаємозв’язку з проблемою об’єктивного оцінювання деформації Землі. Аналіз вирішення цієї проблеми показав [8; 9], що використовувана теоретична основа і методи оцінювання деформації не відповідають потенційному інформаційному ресурсові GNSS-даних. Аргументації цьому висновкові наступні [8].

1. Дослідження проблеми ґрунтуються на моделі лінійно-однорідної нескінченно малої деформації суцільного середовища математичної теорії пружності. Така модель спроможна схарактеризувати лише лінійну складову деформації. Нелінійні моделі у дослідницькій практиці не застосовуються.

2. Використовувана модель реалізовується методом скінченних елементів. Розділення земної поверхні на скінченні елементи здебільшого виконується формально без якого-небудь обґрунтування відповідності реальної деформації умовам лінійної моделі. Це зумовлює сумнівну достовірність одержаних оцінок деформації.

3. Оцінки деформації відносять до модельних геодезичних поверхонь або барицентрів скінченних елементів, але не до топографічної поверхні, де досліджувані процеси виражаються і підлягають безпосередньому моніторингу методом GNSS.

4. У дослідницькій практиці не застосовуються методи оцінювання тривимірних деформацій Землі глобального (планетарного) масштабу.

У праці [8] запропоновано метод вирішення проблеми оцінювання тривимірних деформацій Землі на узагальнюючій теоретичній основі з перспективою врахування нелінійних ефектів деформації. Проблему розглянуто з позицій теорії перетворення образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів [10]. Складним многовидом обрано евклідовий простір E_3, який дотичний до кожної точки ріманового простору в формі локальних ортонормованих координатних базисів у декартовій системі. Такий вибір умотивовано тим, що система, у якій здійснюється моніторинг координат методом GNSS, за своєю суттю є декартова. Головною визначено гіпотезу, що перетворення простору мають геофізичне походження та ідентифікуються як деформації.

Мета дослідження. Беручи за основу результати досліджень [8], розкриємо взаємозв’язки характеристик тривимірних деформацій Землі і показників деформацій сучасних земних референцних систем, якими визначається порушення їх фундаментальних геометричних умов. У цій частині досліджень розкриємо перспективи оцінювання кутових спотворень референцних систем.

Виклад основного матеріалу. Обґрунтування теоретичного підходу. Перетворення (або відображення) простору – це процес трансформації кожної точки M простору у відповідну їй точку M'. M' ідентифікується як відображення M. Зазначене відображення завжди однозначне, якщо всякій точці M простору відповідає тільки одна точка M'. Сукупність N точок M_i $(i=\overrightarrow{1,N})$ окремої частини або й усього простору, які підлягають трансформації, формують відображувану область Δ. Сукупність точок M_i', котрі відповідають M_i, формують область відображення Δ'. Допустимо, у тривимірному просторі установлено систему декартових координат x, y, z. Тоді за умови, що область Δ замкнена і неперервна, вона цілком окреслюється точками $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Якщо Δ відобразилась на Δ' таким чином, що остання залишилась замкненою неперервною, то вона цілком окреслюється точками $M_i'(x_i', y_i', z')$. У такій постановці проблеми загальна теорія перетворення простору не висуває жодних умов щодо розмірів та геометричних форм областей Δ і Δ' [10]. На таких підставах областю Δ можна вважати топографічну поверхню незалежно від її масштабу – глобального, регіонального чи локального.

Припустимо, що координати $x_i = X_i^1$, $y_i = X_i^2$, $z_i = X_i^3$ точок M_i задовольняють умови параметризації Землі прямокутною декартовою системою, а точки M_i – це GNSS-станції, що розташовані на топографічній поверхні. Якщо координати $x_i' = X_i'^1$, $y_i' = X_i'^2$, $z_i' = X_i'^3$ визначають положення відображених точок M_i' області Δ', то перетворення Δ у Δ' завжди можна відобразити рівняннями

$$\left.\begin{aligned} X'^1 &= u(X^1, X^2, X^3) \\ X'^2 &= v(X^1, X^2, X^3) \\ X'^3 &= w(X^1, X^2, X^3) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Згідно з загальною теорією, базисні функції перетворення (1) повинні бути однозначними, неперервними та диференційованими, що в сукупності складає умову гомеоморфізму перетворень. Але ці умови не обмежують аналітичних форм функцій. Це дає змогу відображати перетворення тими чи іншими гладкими або кусково-гладкими функціями, які можуть бути встановлені за різницями $X_i'^k - X_i^k$ $(k = \overline{1,3})$. Це розкриває перспективу передавати нелінійні закономірності перетворень [10].

Практично такий підхід можна реалізувати за сукупністю емпіричних значень координат GNSS-станцій шляхом побудови емпіричних формул з використанням, наприклад, методу найменших квадратів. У розрізі вирішуваного завдання доцільно використати властивості загальних гармонічних поліномів $u_n(x, y, z) = \sum\limits_{p+q+r=n} a_{pqr} x^p y^q z^r$ степені n, як це розкрито у праці [8]. Розв'язок досягається наближенням лінійної комбінації системи трьох таких осцилюючих функцій на заданій сукупності емпіричних значень координат. Підвищуючи степінь кожної з таких функцій, можна досягнути оптимальної детальності покриття емпіричних даних під умовою найкращої точності апроксимації. Разом з побудовою оптимальних емпіричних формул це дає змогу оцінити ступінь наближення емпіричного розв'язку до строгого на умовах гомеоморфізму. Одержана у підсумку система трьох емпіричних формул генерує функціональну модель деформації.

У початковому стані на момент часу t_0 системі координат $x_i = X_i^1, y_i = X_i^2, z_i = X_i^3$ точок M_i області Δ властива ознака ортогональності, тому її метрику визначає лінійний елемент

$$ds^2 = \delta_{ij} dX^i dX^j \tag{2}$$

з метричними коефіцієнтами $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Для відображення ds' лінійного елемента ds, що відповідає області Δ' в момент часу $t_1 = t_0 + dt$,

$$ds'^2 = e_{ij} dX^i dX^j. \tag{3}$$

Метричними коефіцієнтами e_{ij} формується симетрична матриця, яку іменують метричним двовалентним коваріантним тензором перетворення простору [10]:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

За гіпотези геофізичного походження змін метричних властивостей простору, тензор (4) є тензором деформації. Як геометричний образ многовида, тензор є носієм інформації про зміни метрики простору і за посередництва власних інваріантів спроможний передавати їх ознаки числовими характеристиками. Використовуючи методи проективно-диференціальної геометрії та прийоми описування змін ріманової метрики, одержано аналітичні вираження характеристик деформації різного геометричного змісту [8].

Оцінки кутових спотворень референцних систем. Згідно з теорією тензорного аналізу, тензор e_{ij} спроможний передавати інформацію як про деформування простору в межах області Δ, так і про деформацію системи координат, якою ця область параметризована. Якщо протягом dt відбулись зміни метричних властивостей області Δ такі, що $ds \neq ds'$, то крім переміщення початку відліку і зміни масштабу системи X^i $(i = \overrightarrow{1,3})$ існують ризики деформацій, пов'язаних зі зміною орієнтування осей координат та (або) порушенням їх ортогональності відносно початкового стану з наслідками трансформування в косокутну декартову систему. Засвідчити або, так само, спростувати таку гіпотезу можна емпірично на підставі геометричних аргументацій, як це подано у працях [8, 10, 11].

Проєкції лінійного елемента ds на осі системи координат довільного тривимірного простору виражаються добутками $ds^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}dX^i$, що випливає з його метрики g_{ij} й відповідної квадратичної форми $ds^2 = g_{ij}dX^i dX^j$. Індекс (i) в $ds^{(i)}$ ідентифікує приналежність проєкції до осі X^i. Кут η_{ij} між парою проєкцій $ds^{(i)}$ та $ds^{(j)}$, як це показано на рис. 1, виражає відношення [10]

$$\cos\eta_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}. \quad (5)$$

Беручи до уваги ортогональність осей системи координат X^i в початковий момент часу t_0, метричні коефіцієнти $g_{ij} = \delta_{ij}$ і з формули (5) слідує, що $\eta_{ij}^{(0)} = 90^\circ$. Індекс (0) символізує приналежність кутів η_{ij} моменту часу t_0.

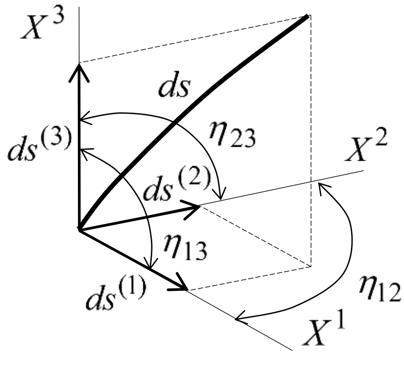

Рис 1. Кути між проєкціями дуги ds на осі координат [11]

Допустимо, протягом якогось часу dt відбулись певні зміни метричних властивостей простору. Тоді в момент $t_1 = t_0 + dt$ метрику простору визначатиме тензор $g_{ij} = e_{ij}$. Якщо при $i \neq j$ метричні коефіцієнти $e_{ij} \neq 0$, то кути $\eta_{ij}^{(1)} \neq 90^\circ$, що також слідує з формули (5). Індекс (1) символізує приналежність кутів η_{ij} моменту часу t_1. Одержаний результат засвідчує наступне: кути $\eta_{ij}^{(1)}$ – це абсолютні міри ймовірної косокутної декартової системи координат. Їх виражає формула

$$\cos\eta_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{e_{ii}e_{jj}}}. \tag{6}$$

Характеристиками кутових спотворень між парами осей координат $X^i X^j$ у сенсі порушення їх ортогональності є кути $\varepsilon_{ij}^{(1)} = 90^\circ - \eta_{ij}^{(1)}$. Для їх абсолютного вираження можна використати формулу

$$\sin\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{e_{ii}e_{jj}}}. \tag{7}$$

Формули (6) та (7) показують, що ступінь порушення ортогональності декартової системи координат визначають як недіагональні метричні коефіцієнти тензора e_{ij}, так і діагональні коефіцієнти e_{ii}. Останні водночас асоціюються з абсолютними лінійними розширеннями простору в напрямах осей координат і визначають зміну масштабу системи. Беручи до уваги, що система прив'язана до області Δ, кути $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ виражають також її жорсткі обертання у напрямах між парами осей $X^i X^j$. Отже, оцінювання ймовірної втрати ортогональності системи координат можна реалізувати шляхом застосування кутових мір $\eta_{ij}^{(1)}$ та $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ на засадах теорії тензорного аналізу [10].

Дослідимо проблему з іншого погляду – виразимо напрями осей деформованої системи відносно їх початкового положення. Для цього скористаємось результатами розв'язків у проєкціях лінійного елемента ds на координатні площини, як це розкрито у праці [11]. Розв'язки досягнуто на засадах положень теорії відображення поверхонь, як вони реалізовуються, наприклад, у математичній картографії.

Розглянемо проєкцію ds у площині екватора X^1OX^2. Тут $dX^3 = 0$, тому вираження квадратичних форм (2) і (3) спрощуються до вигляду $ds_{12}^2 = \delta_{ij}dX^i dX^j$ та $ds_{12}'^2 = e_{ij}dX^i dX^j$ ($i, j = 1,2$). Коефіцієнти тензора $e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix}$ розкривають вирази $e_{11} = \left(\frac{\partial u}{\partial X^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^1}\right)^2$, $e_{22} = \left(\frac{\partial u}{\partial X^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^2}\right)^2$ та $e_{12} = \frac{\partial u}{\partial X^1}\frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1}\frac{\partial v}{\partial X^2}$. Останні є наслідком повних диференціалів функцій (1) на площині X^1OX^2: $dX'^1 = \frac{\partial u}{\partial X^1}dX^1 + \frac{\partial u}{\partial X^2}dX^2$; $dX'^2 = \frac{\partial v}{\partial X^1}dX^1 + \frac{\partial v}{\partial X^2}dX^2$. Якщо внаслідок деформації вісь X^1 відобразилась проєкцією X'^1, то її напрям відносно X^1 задає кут $\psi_{12}^{(1)}$ (див. рис. 2.а). Так само, напрям проєкції X'^2 осі X^2 задає кут $\chi_{12}^{(1)}$. Індекс (1) тут символізує приналежність кутів деформованому стану системи координат на момент часу t_1. Явні вирази напрямів $\psi_{12}^{(1)}$ і $\chi_{12}^{(1)}$ в [11] одержано з відношення диференціалів проєкцій осей на площині відображення в момент t_1, які виражено в системі координат відображуваної площини станом на початковий момент t_0:

$$\left.\frac{dX'^2}{dX'^1}\right|_{\substack{dX^3=0\\ X^2=const}} = \left(\frac{\partial v}{\partial X^1}\right)\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial X^1}\right) = tg\psi_{12}^{(1)}; \tag{8}$$

$$\left.\frac{dX'^2}{dX'^1}\right|_{\substack{dX^3=0\\ X^1=const}} = \left(\frac{\partial v}{\partial X^2}\right)\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial X^2}\right) = tg\chi_{12}^{(1)}. \tag{9}$$

Для різниці $\chi_{12}^{(1)} - \psi_{12}^{(1)} = \eta_{12}^{(1)}$ одержуємо: $tg\,\eta_{12}^{(1)} = \dfrac{\frac{\partial u}{\partial X^1}\frac{\partial v}{\partial X^2} - \frac{\partial v}{\partial X^1}\frac{\partial u}{\partial X^2}}{\frac{\partial u}{\partial X^1}\frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1}\frac{\partial v}{\partial X^2}}$. Тут чисельник – це детермінант $e_{11}e_{22} - e_{12}^2 = \det e_{ij}$ тензора e_{ij} ($i, j = 1,2$) на площині X^1OX^2, тому

$$tg\,\eta_{12}^{(1)} = \frac{\sqrt{\det e_{ij}}}{e_{12}}, \tag{10}$$

$$ctg\,\varepsilon_{12}^{(1)} = \frac{\sqrt{\det e_{ij}}}{e_{12}}. \tag{11}$$

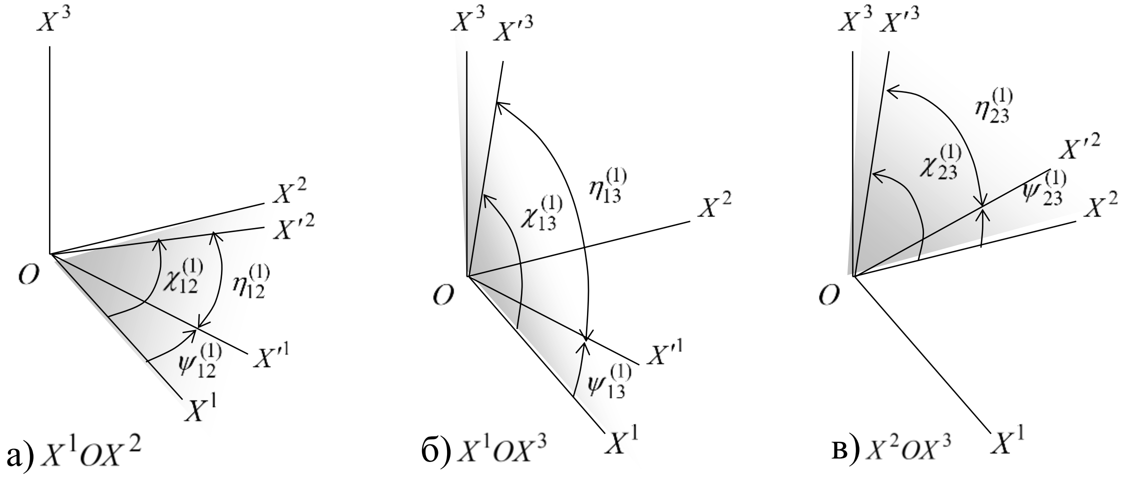

Рис. 2. Напрями осей деформованої системи в проєкціях на координатні площини [11]

Дослідженнями [11] доведено, що вираження кута $\eta_{12}^{(1)}$ за формулами (6) та (10) і кута $\varepsilon_{12}^{(1)}$ за формулами (7) та (11) відповідно тотожні. Цим посвідчено істинність формул (8) та (9) щодо їх спроможності оцінювати напрями $\psi_{12}^{(1)}$ та $\chi_{12}^{(1)}$ проєкцій X'^1 та X'^2 осей координат деформованої системи відносно їх початкового положення X^1 та X^2 на площині X^1OX^2.

На такій же основі реалізовано розв’язки й отримано вираження напрямів $\psi^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ в проєкціях на інші координатні площини системи X^i ($i = \overrightarrow{1,3}$) [11]. Зокрема, у проєкції на площину X^1OX^3 (див. рис. 2, *б*)

$$\left.\frac{dX'^3}{dX'^1}\right|_{\substack{dX^2=0\\X^3=const}}=\left(\frac{\partial w}{\partial X^1}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial u}{\partial X^1}\right)=tg\psi_{13}^{(1)},\qquad(12)$$

$$\left.\frac{dX'^3}{dX'^1}\right|_{\substack{dX^2=0\\X^1=const}}=\left(\frac{\partial w}{\partial X^3}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial u}{\partial X^3}\right)=tg\chi_{13}^{(1)}\qquad(13)$$

та в проєкції на площину X^2OX^3 (див. рис. 2, *в*)

$$\left.\frac{dX'^3}{dX'^2}\right|_{\substack{dX^1=0\\X^3=const}}=\left(\frac{\partial w}{\partial X^2}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial v}{\partial X^2}\right)=tg\psi_{23}^{(1)}\qquad(14)$$

$$\left.\frac{dX'^3}{dX'^2}\right|_{\substack{dX^1=0\\X^2=const}}=\left(\frac{\partial w}{\partial X^3}\right)\Bigg/\left(\frac{\partial v}{\partial X^3}\right)=tg\chi_{23}^{(1)}.\qquad(15)$$

За геометричним змістом кути $\psi_{ij}^{(1)}$ та $\chi_{ij}^{(1)}$ є прямими аналогами кутовим координатам геоцентричної полярної системи. Так, кути $\psi_{12}^{(1)}$, $\chi_{12}^{(1)}$ – це довготи λ_x^{def}, λ_y^{def} напрямів осей координат деформованої системи $X'^1=x'$ та $X'^2=y'$ у площині екватора відносно площини нульового меридіана на момент t_0. Кути $\psi_{13}^{(1)}$, $\chi_{13}^{(1)}$ – це широти φ_x^{def}, φ_z^{def} напрямів осей $X'^1=x'$ та $X'^3=z'$ у площині нульового меридіана, а $\psi_{23}^{(1)}$, $\chi_{23}^{(1)}$ – широти φ_y^{def}, φ_z^{def} напрямів осей $X'^2=y'$ та $X'^3=z'$ у площині меридіана на довготі $\lambda=90^\circ$ відносно площини екватора у початковому стані.

Різниці $\lambda_x^{def}-\lambda_x$, $\lambda_y^{def}-\lambda_y$ (при $\lambda_x=0^\circ$, $\lambda_y=90^\circ$), $\varphi_x^{def}-\varphi_x$, $\varphi_z^{def}-\varphi_z$ (при $\varphi_x=0^\circ$, $\varphi_z=\pm90^\circ$) та $\varphi_y^{def}-\varphi_y$, $\varphi_z^{def}-\varphi_z$ (при $\varphi_y=0^\circ$, $\varphi_z=\pm90^\circ$) характеризують відхилення осей координат від їх початкового положення на момент t_0. За своїм змістом саме ці величини є аналогами показникам зміни орієнтування осей координат R_x, R_y, R_z, якими формується матриця обертання R у трансформаціях референцних систем. Важлива ремарка: використання лінеаризованої форми чотирнадцятипараметричного перетворення Гельмерта для трансформацій системи ITRS не передбачає диференціації кутів повороту осей координат з погляду спотворення їх ортогональності.

Представлені вище результати розв’язків розкривають перспективу числового оцінювання кутових спотворень системи координат, як геометричної основи референцних систем. Результати оцінювання можуть бути досягнуті виключно завдяки використанню GNSS-даних. Одержані аналітичні вираження можуть бути використані як додатковий інструмент досліджень сучасних референцних систем усіх типів у їх взаємозв’язку з геодинамікою. Якщо такі дослідження можуть складати предмет дискусій з погляду їх використання для систем типу CTS, то у задачах моніторингу референцних систем кінематичного типу вони мають безсумнівну практичну значущість. В реаліях створюваних кінематичних систем за умови суттєвого вираження кутових спотворень формування матриці обертання R повинно виконуватись за відхиленнями осей координат на диференційованій основі.

Одержані аналітичні вираження кутових спотворень системи координат мають перспективу ще й з тієї погляду, що їх подано у загальному вигляді, який здатний передавати деформації нелінійного характеру, наскільки їх можна врахувати базисними функціями моделі (1). Ефективність нелінійних моделей деформації Землі сьогодні очевидна, навіть якщо взяти до уваги наслідки їх використання, наприклад, при розв'язку реалізації ITRF2014 системи ITRS: «генералізація розв'язку ITRF2014 з розширеним моделюванням нелінійних рухів станцій забезпечила значне підвищення його точності порівняно з ITRF2008» [12].

За результатами проведених досліджень можна сформулювати наступні головні **висновки**.

1. Проблема оцінювання порушень геометричних умов створення референцних систем розглянута у взаємозв'язку з проблемою оцінювання тривимірних деформацій Землі. Пропонується метод вирішення проблеми за GNSS-даними на основі теорії перетворення образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів, зокрема, дотичного евклідового простору з параметризацією прямокутною декартовою системою координат. Саме така система координат є геометричною основою сучасних референцних систем.

2. У представленій тут частині досліджень наголошено на спроможності розробленого методу виражати жорсткі обертання Землі. Доведено, що саме така ознака деформації асоціюється з кутовими спотвореннями системи координат. Наведено аналітичні вираження абсолютних показників кутових спотворень системи координат. За змістом вони є прямими аналогами показникам зміни орієнтування осей координат, якими формується матриця обертання у трансформаціях референцних систем. Також наведено аналітичні вираження напрямів осей координат деформованої системи відносно початкового положення в ортогональному стані.

3. Властивість гомеоморфізму перетворень замкнених неперервних областей простору забезпечує оцінювання ймовірних нелінійних деформацій Землі з віднесенням обчислених характеристик до топографічної поверхні, яка підлягає безпосередньому моніторингу методом GNSS. Використана теоретична основа не накладає жодних обмежень на масштаб топографічної поверхні – глобальний, регіональний чи локальний. Це розкриває перспективу використовувати розроблений метод для моніторингу референцних систем безвідносно до їх масштабів. Метод може бути рекомендований як додатковий інструмент моніторингу умовних статичних і, найбільшою мірою, кінематичних референцних систем регіонального і національного масштабів на територіях з підвищеною активністю геодинамічних процесів.

Список використаних джерел

1. Moritz, H. Earth's Rotation. Theory and estimations / H. Moritz, I. I. Muller. – New York : Ungar, 1987. – 617 p.

2. IERS Conventions 2010. IERS Technical Note [Electronic resource] / eds. G. Petit, B. Luzum. – Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie, 2010. – 181 p. – Access mode: http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf.

3. Марченко, О. М. Референцні системи в геодезії / О. М. Марченко, К. Р. Третяк, Н. П. Ярема. – Львів : Львівська політехніка, 2018. – 244 с.

4. From geophysics to geodetic datum: updating the NZGD2000 deformation model / C. Crook, N. Donnelly, J. Beavan, C. Pearson // New Zealand Journal of Geology and Geophysics. – 2016. – № 59 (1). – P. 22-32. doi.org/10.1080/00288306.2015.1100641.

5. Dynamic reference frames. A case study in Iceland [Electronic resource] / K. Evers, M. Lidberg, P. Häkli, H. P. Kierulf, G. Valsson // Reference Frames in Practice : FIG Symposia (Istanbul, May 4th, 2018). – Access mode: https://www.fig.net/fig2018/rfip/6_RFIPIstanbul KristianEvers.pdf.

6. Australian Terrestrial Reference Frame ATRF [Electronic resource]. – Access mode: https://www.icsm.gov.au/australian-terrestrial-reference-frame.

7. Poutanen, M. Future of National Reference Frames – from static to kinematic? / M. Poutanen, P. Häkli // Geodesy and Cartography. – 2018. – № 67 (1). – P. 117-129. doi.org/10.24425/118697.

8. Тадєєв, О. Перспективи оцінювання тривимірних деформацій Землі за даними глобальних навігаційних супутникових систем / О. Тадєєв // Технічні науки і технології. – 2023. – № 4 (34). – С. 265-276. DOI: 10.25140/2411-5363-2023-4(34)-265-276.

9. Тадєєв, О. А. Проблеми та перспективи оцінювання деформаційних полів Землі за геодезичними даними / О. А. Тадєєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2015. – № 82. – С. 73-94. doi.org/10.23939/istcgcap2015.02.073.

10. Sokolnikoff, I. S. Tensor analysis. Theory and applications to geometry and mechanics of continua / I. S. Sokolnikoff. – New York, London, Sydney : John Wiley & Sons, 1964. – 361 p.

11. Tadyeyev, O. Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. Rigid rotations of the Earth / O. Tadyeyev // Geodesy, Cartography and Aerial Photography. – 2016. – № 84. – P. 25-38. doi.org/10.23939/istcgcap2016.02.025.

12. ITRF2014: a new release of the international terrestrial reference frame modeling nonlinear station motions / Z. Altamimi, P. Rebischung, L. Metivier, X. Collilieux // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2016. – № 121 (B8). – P. 6109-6131. DOI: 10.1002/2016JB013098.

References

1. Moritz, H., Muller, I.I. (1987). *Earth's Rotation. Theory and estimations*. New York, Ungar.

2. IERS Conventions (2010). *IERS Technical Note; 36* / eds. G. Petit, B. Luzum. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie. http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf.

3. Marchenko, O.M., Tretyak, K.R., Yarema, N.P. (2018). *Referentsni systemy v heodezii [Reference systems in geodesy]*. Lviv Polytechnic.

4. Crook, C., Donnelly, N., Beavan, J., Pearson, C. (2016). From geophysics to geodetic datum: updating the NZGD2000 deformation model. *New Zealand Journal of Geology and Geophysics*, 59(1), 22-32. doi.org/10.1080/00288306.2015.1100641.

5. Evers, K., Lidberg, M., Häkli, P., Kierulf, H.P., Valsson, G. (2018). Dynamic reference frames. A case study in Iceland. In: *Reference Frames in Practice*. FIG Symposia, Istanbul, May 4th, 2018. https://www.fig.net/fig2018/rfip/6_RFIPIstanbul KristianEvers.pdf.

6. Australian Terrestrial Reference Frame ATRF. https://www.icsm.gov.au/australian-terrestrial-reference-frame.

7. Poutanen, M., Häkli, P. (2018). Future of National Reference Frames – from static to kinematic? *Geodesy and Cartography*, 67(1), 117-129. doi.org/10.24425/118697.

8. Tadyeyev, O. (2023). Prospects for evaluation of three-dimensional deformations of the Earth based on data from global navigation satellite systems. *Technical sciences and technologies*, 4(34), 265-276. doi:10.25140/2411-5363-2023-4(34)-265-276.

9. Tadyeyev, O.A. (2015). Problems and prospects of evaluation the deformation fields of the Earth based on geodetic data. *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*, 82, 73-94. doi.org/10.23939/istcgcap2015.02.073.

10. Sokolnikoff, I.S. (1964). *Tensor analysis. Theory and applications to geometry and mechanics of continua*. New York, London, Sydney, John Wiley & Sons.

11. Tadyeyev, O. (2016). Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. Rigid rotations of the Earth. *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*, *84*, 25-38. doi.org/10.23939/istcgcap2016.02.025.

12. Altamimi, Z., Rebischung, P., Metivier, L., Collilieux, X. (2016). ITRF2014: a new release of the international terrestrial reference frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *121* (B8), 6109–6131. doi:10.1002/2016JB013098.

Отримано 06.02.2024

UDC 528.22:551.24

Oleksandr Tadyeyev

PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Geodesy and Cartography
National University of Water and Environmental Engineering (Rivne, Ukraine)
E-mail: o.a.tadyeyev@nuwm.edu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-4566-0160. **ResearcherID:** B-6081-2019

TO THE PROBLEM OF EVALUATION THE ANGULAR DISTORTIONS OF MODERN EARTHS REFERENCE SYSTEMS

The presented in the article information is of a scientific and methodical character. The generalizing approach and the method for solving the problem of evaluation the angular distortions of modern Earths reference systems, which are caused by the influence of geodynamic processes, are proposed. The method is intended for use of Earth monitoring data using global navigation satellite systems GNSS. The method is based on the theory of transformation of images of the Riemannian space in the form of complex diffeomorphic manifolds. The complex manifold is the tangent Euclidean space, which is parameterized by a rectangular Cartesian coordinate system. This choice is justified by the fact that this parameterization system is the geometric basis of modern reference systems and is subject to monitoring by the GNSS method. The problem of evaluation the distortion of reference systems is considered in relationship with the problem of evaluation the deformations of the Earth. The article provides theoretical justifications, the algorithm for creating the functional model based on the homeomorphism of the transformation of space, and the results of solutions, which together form a method for evaluation of three-dimensional deformations of the Earth. The general conditions of homeomorphism of transformations make it possible to evaluate the nonlinear deformations of the Earth regardless of their scale - global, regional or local. The article focuses on the ability of the method to express the rigid rotation of the Earth. It has been proven that exactly this sign of the deformation is associated with angular distortions of the coordinate system. Analytical expressions of the absolute indicators of angular distortions of the coordinate system for arbitrarily chosen epochs of observations relative to the initial orthogonal state are derived. The method can be recommended for monitoring of the conventional static and, to the greatest extent, the kinematic reference systems of national and regional scales in territories with increased activity of geodynamic processes.

Keywords*: reference system; coordinate system; deformation; rigid rotation of the Earth; GNSS.*

Fig.: 2. References: 12.

Тадєєв О. До проблеми оцінювання кутових спотворень сучасних земних референцних систем. *Технічні науки та технології.* 2024. № 1(35). С. 357-367.