Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ІНСТИТУТ
ЕКОНОМІКИ І УПРАВЛІННЯ
Кафедра вищої математики

Н.В. ВІННІЧЕНКО

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів
економічних спеціальностей
денної форми навчання

Чернігів **ЧДІЕіУ** 2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Чернігівський державний інститут економіки і управління

Обліково-економічний факультет

Кафедра вищої математики

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Затверджено на засіданні Ради
обліково-економічного факультету
Протокол №4
від 12 січня 2011 р.

Затверджено на засіданні
Вченої Ради інституту
Протокол №1
від 30 серпня 2011 р.

Чернігів **ЧДІЕіУ** 2011

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

«Non vitae, sed schole discimus»
(Не для школи, а для життя ми вчимося)
Луцій Анней Сенека

Шановні студенти-першокурсники!

Вашій увазі пропонується навчально-методичний посібник для самостійного вивчення вищої математики. Зміст посібника відповідає навчальній програмі з дисципліни «Вища математика» для студентів вищих навчальних закладів напрямів підготовки «Економіка і підприємництво». Навчальні матеріали укладено так, щоб забезпечити самостійне вивчення дисципліни.

Автор посібника сподівається, що він буде не тільки корисним для засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок застосування знань і вмінь на практиці, але і стане надійним орієнтиром у самостійному опануванні дисципліни.

Звернемося безпосередньо до змісту. Працюючи з посібником Ви можете знайти матеріал, необхідний для успішного засвоєння дисципліни, а саме:

Питання		Розділ посібника
Яка назва модуля і для чого його вивчати?	=	1. Назва і мета вивчення модуля.
Що буде вивчатися в даному модулі? Який матеріал буде опрацьовуватися самостійно?	=	2. Структура і зміст модуля.
Який матеріал треба повторити перед вивченням нового? Як перевірити знання з попереднього модуля?	=	3. Опорні знання. Тест-перевірка знань.
Де знайти додаткову інформацію з модуля?	=	4. Основні інформаційні джерела.
Що необхідно засвоїти?	=	5. Основні поняття модуля. 6. Опорний конспект модуля.
Як перевірити, чи вивчено матеріал модуля?	=	7. Запитання для самоперевірки. 8. Тест-контроль вивчення модуля.
Які завдання потрібно виконати самостійно для закріплення знань і вмінь?	=	9. Індивідуальні домашні завдання. 10. Творча робота.

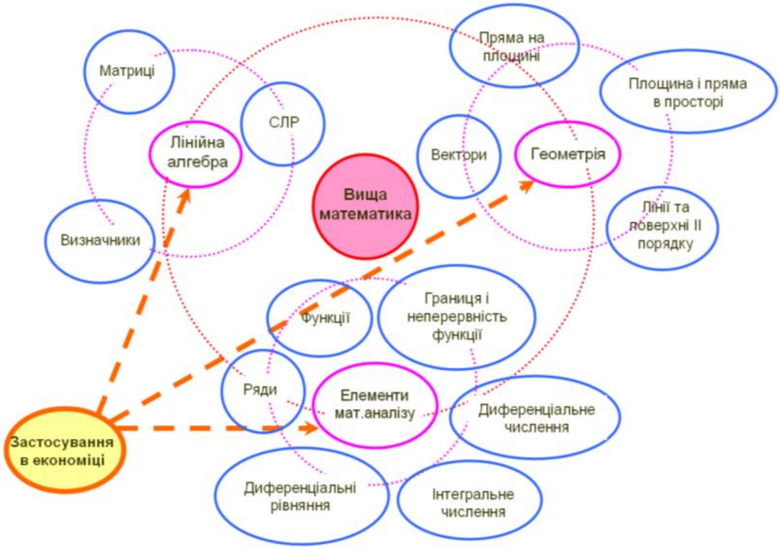
У посібнику містяться завдання для самостійного розв’язування, вони позначаються так (індивідуальні домашні завдання та творча робота):

Домашні завдання складені таким чином, щоб кожен з Вас міг обрати посильний рівень для його виконання.

Завдання розподілені за трьома рівнями складності: базовий (I), підвищений (II), поглиблений (III) і виконуються кожним студентом за індивідуальним варіантом згідно номеру у списку журналу академічної групи.


Таким символом будуть позначені факти з історії математики.

Загальна структура дисципліни «Вища математика»



Розподіл навчального матеріалу дисципліни «Вища математика» по модулях:

Модуль 1. Елементи лінійної алгебри.
Модуль 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії.
Модуль 3. Елементи математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.
Модуль 4. Диференціальне числення функції багатьох змінних.
Модуль 5. Інтегральне числення функцій.
Модуль 6. Диференціальні рівняння.
Модуль 7. Ряди.

Модуль 1. Елементи лінійної алгебри

1. Мета вивчення модуля:

- ознайомитись та засвоїти теоретичні основи лінійної алгебри, необхідної для подальшого вивчення вищої математики, фундаментальних та спеціальних дисциплін (теорія ймовірностей, статистика тощо) та сформувати практичні вміння і навички, необхідні для аналізу, дослідження економічних явищ та процесів, розв'язування прикладних задач.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

- ☺ знати: фундаментальні поняття та означення лінійної алгебри, основні теореми та правила матричного числення, теорії визначників та систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
- ☺ вміти: розв'язувати задачі на операції з матрицями та визначниками, розв'язувати системи лінійних рівнянь; самостійно знаходити та опрацьовувати математичну літературу та інші інформаційні джерела; самостійно обирати і використовувати необхідні методи і засоби, які потрібні для виконання завдань даного модуля.
- ☺ застосовувати: одержані математичні знання під час розв'язування задач економічного змісту, пов'язаних із сферою майбутньої професійної діяльності (модель Леонтьева багатогалузевої економіки, лінійна модель міжнародної торгівлі).

2. Структура і зміст 1 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.

3. Опорні знання

Даний модуль є початковим. Для його розуміння Вам необхідні знання і навички на рівні середньої школи.

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П.2.6-2.14 (стор. 60-96) П. 3.1-3.8 (стор. 109-145)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 1 (стор. 13-81)
Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.	Розділ 1 (стор. 7-76)
Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 517 с.	Тема 1 (стор. 18-38) Тема 2 (стор. 44-62) Тема 3, 4 (стор. 68-98)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 2-4 (стор. 14-47)

5. Основні поняття модуля

Тема 1.1. Матриця, квадратна матриця, головна діагональ матриці, одинична матриця, сума (різниця) матриць, добуток матриць, узгоджені матриці, транспонована матриця.

Тема 1.2. Визначник матриці, порядок визначника, мінор елемента матриці, алгебраїчне доповнення елемента матриці, обернена матриця, невироджена матриця, ранг матриці.

Тема 1.3. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), розв’язок СЛАР, сумісна (несумісна) система, визначена (невизначена) система, еквівалентні системи, основна (розширена) матриця системи, матричне рівняння, співвідношення балансу, коефіцієнт прямих витрат, матриця коефіцієнта прямих витрат, матриця повних витрат, продуктивна матриця, модель Леонтьєва.

6. Опорні конспекти модуля

Матриці та дії з ними

Види матриць:

- матриця-рядок $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$
- матриця-стовпець $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
- нульова матриця $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- одинична матриця $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ■ квадратна матриця
- діагональна матриця ◣

Дії над матрицями:

Додавання $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}$

Множення на число $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix}$

Добуток $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

k ▬ m x ▮ k n = ▬ n

$\boxed{A*B \neq B*A!}$

стовпець

рядок

Транспонування матриць

Мінор M_{ij} - визначник k порядку

Алгебраїчне доповнення:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Ранг матриці r: $\max M_{ij} \neq 0$

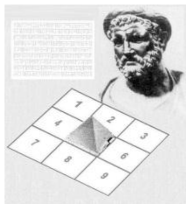
Методи обчислення: метод обвідних мінорів, елементарних перетворень

Обернена матриця: $A^{-1} = 1/\Delta \left(A^*\right)^T$

($AB=BA=E$)

З історії…

Вивчати матриці почали досить давно. Латинські квадрати та магічні квадрати були відомі ще в доісторичні часи.



Так, матриця народження – один з методів аналізу людини, була розроблена древньогрецьким філософом і математиком *Піфагором*, який поєднав математичні системи арабів, друїдів, фінікійців та єгиптян з науками про природу людини.

Матриці мають тривалу історію застосування для розв’язування лінійних рівнянь. *Ґотфрид Лейбніц*, один із винахідників числення, розробив теорію визначників 1693 р. *Габріель Крамер* розвинув цю теорію, ввівши правило Крамера в 1750 році. *Карл Фрідріх Гаусс* та *Вільгельм Жордан* розробили метод Гаусса-Жордана знаходження оберненої матриці 1800 року. Термін «матриця» уперше було запроваджено 1848 р. *Джеймсом Сильвестром*.

З історії розвитку математики відомо, що засади теорії визначників були розроблені ще у XVII ст. німецьким вченим Ґотфридом Лейбніцем. Після того над нею працювали і використовували у своїх дослідженнях такі видатні науковці як Карл Фрідріх Гаусс, Габріель Крамер, П’єр Лаплас та багато інших. Узагальнив, розвинув і блискуче завершив усі результати з теорії визначників *Карл Густав Якобі*. Завдяки його працям не залишилось практично жодної галузі математики, в якій би визначники не здобули застосування. Багато теорій, розвиток яких вимагав тривалих і важких перетворень, набули простої і вичерпної форми завдяки використанню теорії визначників.

Визначники

Види визначників:

- 2-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

- 3-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow$$

правило Δ
правило Саррюса
правило Лапласа

- n-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Для обчислення - пониження порядку визначника.

Допоміжні елементи:
- мінор M_{ij}
- алгебраїчне доповнення A_{ij}

Властивості визначників:

1. Число доданків у формулах дорівнює $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$
2. Співмножником у кожному з доданків цих формул є лише один елемент з кожного рядка і стовпчика.
3. У формулах однакова кількість додатних і від'ємних доданків.

Важливо!

Елементарні перетворення:

1. Заміна рядків стовпцями, стовпців - рядками
2. Викреслювання рядка, елементи якого =0
3. Перестановка рядків матриці
4. Множення рядка на число $\neq 0$
5. Додавання до елементів одного рядка елементів другого рядка

Одне із найповніших джерел по історії визначників (до початку XX століття) – це чотирьохтомна хрестоматія The theory of determinants in the historical order of development by Thomas Muir, New York, Dover Publications, 1960.

На сьогоднішній день існує багато методів побудови теорії визначників та способів їх обчислення. Метод Крамера (правило Крамера) – спосіб розв'язування квадратних СЛАР з ненульовим визначником головної матриці. Створений Габріелем Крамером в 1751 році.

7. Запитання для самоперевірки

1. Що таке матриця? Які є види матриць?
2. Які операції над матрицями називаються лінійними?
3. Яка матриця називається сумою (різницею) матриць?
4. Яка матриця називається добутком матриці на число?
5. Які є властивості лінійних операцій над матрицями?
6. Які матриці можна перемножувати?
7. Яка матриця називається добутком матриць?
8. Які є властивості множення матриць?
9. Як обчислити визначник квадратної матриці другого, третього, …, n-го порядку?
10. Які є властивості визначників?
11. Як записується розклад визначника n-го порядку за елементами будь-якого рядка (стовпця)?
12. Що називається рангом матриці?

СЛАР

Теорема Кронекера-Капеллі (про сумісність СЛАР):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \underline{A \cdot X = B \text{ сумісна} \Leftrightarrow r(A) = r(A_1)} \qquad A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Метод Крамера

Формули Крамера: $\boxed{x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}}$

$$|\Delta| \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

k стовпець

Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Матричне рівняння балансу $X = A \cdot X + У$, X – матриця валового випуску продукції; $У$ – матриця кінцевого продукту; A – матриця прямих витрат.

Метод оберненої матриці

$AX = B \rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\rightarrow X = A^{-1}B} \qquad \Delta \neq 0!$$

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & & * \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

∞ *розв'язків* 1 *розв'язок* $\varnothing$ *розв'язків*

13. Які перетворення матриці називаються елементарними?
14. Що таке обернена матриця?
15. Які існують способи обчислення оберненої матриці?
16. Що називається розв'язком СЛАР?
17. Яка СЛАР називається сумісною (несумісною)?
18. Яка СЛАР називається визначеною (невизначеною)?
19. Як формулюється теорема Кронекера-Капеллі?
20. В чому суть методу Гаусса?
21. В якому випадку можна користуватися матричним методом розв'язування СЛАР?
22. За якої умови СЛАР має єдиний розв'язок?
23. У чому полягає суть моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки? Яка основна задача міжгалузевого балансу?
24. Як визначити матриці прямих, повних та посередницьких витрат?
25. Який критерій продуктивності моделі Леонтьєва?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Чи можна додавати матриці різних розмірів:

А	Б	В
ні	так	лише після транспонування

2. У якому випадку матрицю *A* можна помножити на матрицю *B:*

А	Б	В
якщо кількість рядків матриці *B* дорівнює кількості стовпців матриці *A*	якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*	якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості стовпців матриці *B*

3. Чи можлива рівність $AB=\Theta$, якщо *A* та *B* ненульові матриці:

А	Б	В
ні	так	так, якщо вони одного розміру $m\times n$

4. У якому випадку існують добутки *AB* та *BA*:

А	Б	В	Г
тільки якщо матриці квадратні	якщо вони квадратні або мають такі розміри: $m\times k$ та $k\times m$	тільки якщо матриці трикутні	якщо вони одного розміру $m\times n$

5. Нехай задано матрицю $A_{m\times n}$. Якими будуть розміри матриці A^T :

А	Б	В
$n\times n$	$m\times m$	$n\times m$

6. Коли $r(A)=0$:

А	Б	В
коли *A* одинична	коли *A* нульова	коли *A* квадратна

7. Що буде з визначником, якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) помножити на деяке число λ :

А	Б	В
не зміниться	змінить на знак на протилежний	помножиться на число λ

8. Що буде з визначником, якщо поміняти місцями рядки та стовпці:

А	Б	В
змінить знак на протилежний	не зміниться	буде дорівнювати нулю

9. Що буде з визначником, якщо переставити місцями два рядки (стовпці):

А	Б	В
не зміниться	буде дорівнювати нулю	змінить знак на протилежний

10. Що буде з визначником, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помноживши їх на число k:

А	Б	В
помножиться на число k	не зміниться	буде дорівнювати нулю

11. Чому дорівнює сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчне доповнення елементів іншого рядка (стовпця):

А	Б	В
визначнику	нулю	визначнику з протилежним знаком

12. Чому дорівнює сума добутків довільних чисел на алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка (стовпця):

А	Б	В
визначнику	нулю	визначнику, в якому відповідні елементи рядка (стовпця) замінено на ці довільні числа

13. Як зміниться визначник порядку n, якщо кожен його елемент замінити на протилежний:

А	Б	В	Г
не зміниться	змінить знак на протилежний	дорівнюватиме визначнику, помноженому на $(-1)^n$	дорівнюватиме визначнику, помноженому на $(-1)^{n^2}$

14. Скільки доданків входить у формулу для обчислення визначника n-го порядку:

А	Б	В
n^2	n	$n!$

15. Визначником порядку n називається:

А	Б	В	Г
таблиця чисел	число	число, записане у вигляді квадратної таблиці, в якій n рядків і n стовпців	n чисел

Практична частина:

16. Елемент a_{31} визначника $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	3	7	1

17. Мінор елементу a_{12} визначника $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
2	4	3	1

18. Визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
10	8	0	1

19. Алгебраїчне доповнення елементу a_{21} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3	7	2	-7

20. Для якого визначника алгебраїчне доповнення A_{31} дорівнює числу «-12»:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

21. Одиничною матрицею є:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. Сума $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

23. Оберненою матрицею до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

24. Якщо $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, то k дорівнює:

А	Б	В	Г
-1	1	0	2

25. Обернена матриця не має властивості:

А	Б	В	Г
$(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}\cdot B^{-1}$	$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$	$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$	$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$

9. Індивідуальні домашні завдання №1

Базовий рівень:

Завдання 1. Виконати дії над матрицями.

Завдання 2. Обчислити визначники.

Підвищений рівень:

Завдання 3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома методами: методом Крамера, методом оберненої матриці, методом Гаусса.

Поглиблений рівень:

Завдання 4. Задано структурну матрицю А торгівлі трьох країн, де кожен елемент матриці a_{ij} – частка коштів, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів в і-тої країни, при цьому $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1$ (j=1,2,3). Знайти співвідношення коштів країн для збалансованої торгівлі.

Варіанти завдань

Варіант 1

1. $AB - C^T$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Варіант 2

1. $AB - BA$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Варіант 3

1. A^2, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.** 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

Варіант 4

1. $3A + 2B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -9 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Варіант 5

1. $3A^2 - EA^3$ де $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 12 & 8 \\ 9 & 1 & 11 & 12 \\ 13 & 2 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

Варіант 6

1. ABC, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

Варіант 7

1. C^3, де $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=13 \\ 2x_1-3x_2+3x_3=-10 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 5/12 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \end{pmatrix}$

Варіант 8

1. B^2-5A, де $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-4 \\ 3x_1+x_2-x_3=-1 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=-7 \end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Варіант 9

1. $A(B+C)$, де $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=7 \\ x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9 \end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/8 & 3/4 \\ 1/3 & 13/24 & 0 \end{pmatrix}$

Варіант 10

1. AB^T, де $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

Варіант 11

1. $A\left(B + C^T\right)$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 12 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

Варіант 12

1. $B - BA$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,7 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$

Варіант 13

1. $4A^2$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,12 & 0,2 \\ 0,2 & 0,28 & 0,3 \end{pmatrix}$

Варіант 14

1. $2A^T - 3B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Варіант 15

1. $2A^2$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

Варіант 16

1. ABC, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$

Варіант 17

1. $B-BA$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 3 & -2 & 3\\ -4 & 6 & -8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3=1\\ 3x_1-2x_2-4x_3=2\\ 4x_1+2x_2+3x_3=-1\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}$

Варіант 18

1. B^2-AB, де $B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -8\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 2\\ 8 & 10 & 4 & 6\\ 5 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases}x_1+4x_2-2x_3=8\\ -x_1+5x_2+3x_3=-1\\ 4x_1-6x_2-x_3=-4\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}$

Варіант 19

1. $4AB$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 5\\ -1 & 5 & 7\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$

2. 1. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -6 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}7 & 6 & 3 & 7\\ 7 & 5 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 3 & 5\\ 5 & 6 & 5 & 4\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=7\\ 5x_1+x_2-2x_3=-7\\ 3x_1+x_2+x_3=2\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 1/4\\ 1/3 & 1/2 & 1/2\\ 1/3 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$

Варіант 20

1. BA^T, де $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 2\\ 3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 1\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases}3x_1-2x_2-4x_3=2\\ -x_1+2x_2+3x_3=-1\\ -4x_1-2x_2-3x_3=1\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/3 & 5/6\\ 1/4 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$

Варіант 21

1. $AB-C^T$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 7\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=-2\\ x_1+4x_2+2x_3=-3\\ -x_1+5x_2+3x_3=-10\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$

Варіант 22

1. $2A-3B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 7 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 10\\ 3 & 4 & 5 & 4\\ 4 & 5 & 2 & 6\\ 5 & 2 & 3 & 8\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ 8x_1+3x_2-6x_3=2\\ -4x_1-x_2+3x_3=-3\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$

Варіант 23

1. $B^3 - 2A$, де $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -4 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

Варіант 24

1. $A(B - C)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,8 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$

Варіант 25

1. $B + BA$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$

Варіант 26

1. $3A^2$, де $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 6\\ 3 & 2 & 8\end{pmatrix}$.**2.** 1. $\begin{vmatrix}-30 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -12\\ 1 & -1 & 7\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1\\ 8x_1+3x_2-6x_3=2\\ 4x_1+x_2-3x_3=3\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix}$

Варіант 27

1. B^2+AB, де $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}1 & 4 & 9\\ -3 & -5 & 2\\ -5 & -3 & 4\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 2 & 1\\ 4 & 6 & -8 & 0\\ -6 & 9 & -2 & 1\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-3\\ 3x_1+x_2+3x_3=5\\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}4\end{pmatrix}$

Варіант 28

1. BA^T, де $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix}-16 & 3 & -5\\ 21 & 8 & 2\\ -4 & -6 & 1\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}2 & 0 & -4 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 6 & -1 & 2\end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=1\end{cases}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$

Варіант 29

1. ABC, де $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -8 \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 12 \\ 9 & 2 & -11 & 3 \\ -9 & 5 & 10 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 23 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Варіант 30

1. $A^2 - EA^3$ де $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця.

2. 1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

10. Методичні вказівки до виконання творчої роботи №1 на тему «Застосування систем лінійних рівнянь в економіці. Модель Леонтьєва»

Творча робота №1 передбачає самостійне виконання завдань з вищої математики з використанням пакету MS EXCEL. Один варіант завдання виконується мікрогрупою студентів, що складається з 4-5 осіб.

Приклади розв'язування задач в ***MS EXCEL***

Додавання та віднімання матриць

Приклад 1. В деякій галузі *m* заводів випускають *n* видів продукції. Матриця А задає обсяги продукції на кожному заводі в першому кварталі, матриця В – відповідно в другому. $(a_{ij};b_{ij})$ – обсяги продукції *j*-го типу на *i*-му заводі в 1-му та 2-му кварталах відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) обсяги продукції та 2) приріст обсягів виробництва в другому кварталі порівняно з першим по видам продукції та заводам.

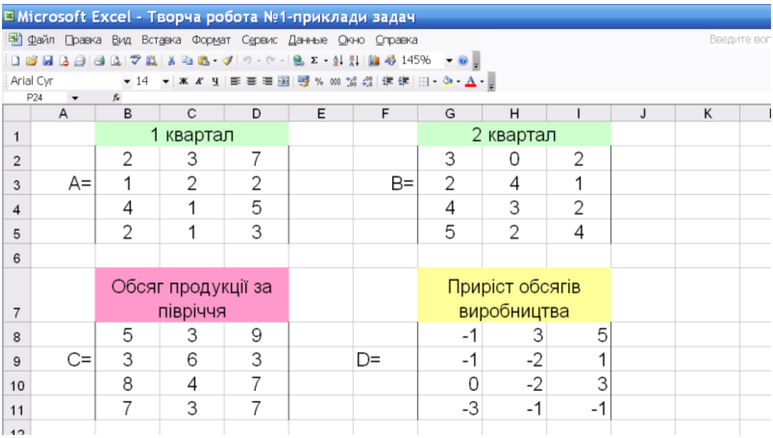
Алгоритм розв'язування

1. Нехай матриці A та B введені в діапазони комірок відповідно B2:D5 та G2:I5 (рис. 1.1). Обсяги продукції за півріччя визначаються сумою матриць C=A+B.

2. Для знаходження матриці C позначаємо діапазон комірок B8:D11, де буде знаходитися шукана матриця. Встановлюємо курсор в комірку B8 та вводимо формулу для обчислення першого елемента результуючої матриці =B2+G2.

3. Скопіюємо введену формулу в інші комірки результуючої матриці: встановлюємо курсор в комірку B8; наводимо показчик миші на точку в правому нижньому куті комірки, так, щоб курсор прийняв вид тонкого хрестика; при натиснутій лівій кнопці миші протягуємо показчик до комірки D11. В результаті в комірках B8:D11 з'явиться шукана матриця обсягу продукції.

4. Для розв'язання другого пункту задачі потрібно знайти матрицю D, приросту обсягів виробництва, яка обчислюється як різниця матриць A та B. Для її знаходження потрібно виконати пункти 1-3 даного алгоритму, тільки елементи результуючої матриці знаходяться як різниці елементів заданих матриць (рис. 1.1). Знак «-» в результуючій матриці означає, що на даному заводі *i* обсяг виробництва продукції *j* зменшився.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1 квартал					2 квартал		
2		2	3	7			3	0	2
3	A=	1	2	2		B=	2	4	1
4		4	1	5			4	3	2
5		2	1	3			5	2	4
6									
7		Обсяг продукції за півріччя					Приріст обсягів виробництва		
8		5	3	9			-1	3	5
9	C=	3	6	3		D=	-1	-2	1
10		8	4	7			0	-2	3
11		7	3	7			-3	-1	-1

Рис. 1.1. *Приклад додавання та віднімання матриць в Excel*

<u>Множення матриць</u>

Приклад 2. Підприємство виробляє *n* типів продукції, обсяги випуску

задані матрицею $A = (100 \quad 2000 \quad 100)$. Ціна реалізації одиниці i-го типу продукції в j-му регіоні задана матрицею $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю С – матрицю виручки по регіонам.

Для знаходження добутку матриць використовується функція МУМНОЖ(масив1;масив2), яка викликається з панелі інструментів *Стандартная/Вставка функции/Мастер функций*.

Алгоритм розв'язування

1. Виділяємо блок комірок під шукану матрицю. Для цього потрібно знайти розмірність шуканої матриці. В нашому прикладі розмірність шуканої матриці буде: 4×1. Тому виділяємо блок комірок C8:F8 (мишкою при натиснутій лівій клавіші).

2. Натискаємо на панелі інструментів *Стандартная* кнопку *Вставка функции*.

3. У діалоговому вікні *Мастер функций*, що з'явиться, в полі *Категория* обираємо *Математические*, а в полі *Функция* – ім'я функції МУМНОЖ (рис. 1.2).

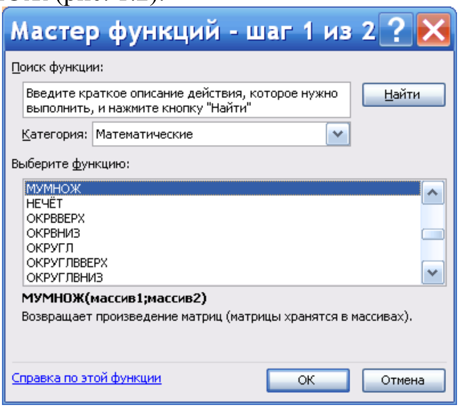


Рис. 1.2. *Діалогове вікно «Мастер функций»*

Після чого клацаємо на ОК.

4. Коли з'явиться діалогове вікно МУМНОЖ, мишкою відтягуємо його в сторону і вводимо діапазон першої матриці А (комірки B3:D3) в робоче поле Массив1, а діапазон матриці В (комірки G3:J5) в робоче поле Массив2 (рис. 1.3). Після цього натискаємо клавішу F2, а потім – одночасно поєднання клавіш CTRL+SHIFT+ENTER.

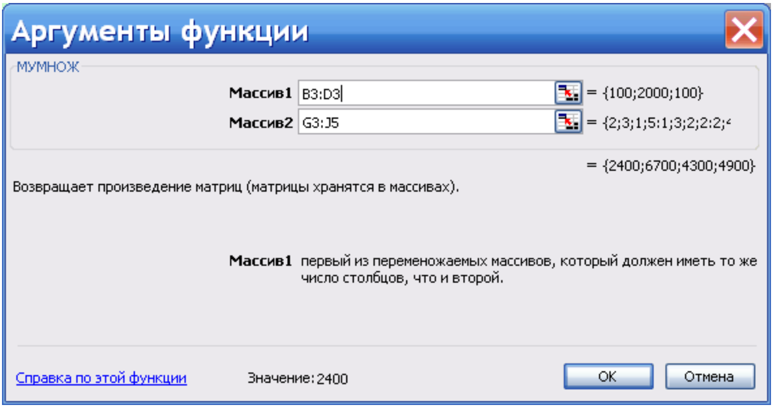


***Рис. 1.3**. Приклад заповнення полів діалогового вікна МУМНОЖ*

5. Після цього в комірках C8:F8 з'явиться матриця C – шуканий добуток матриць A та B (рис. 1.4).

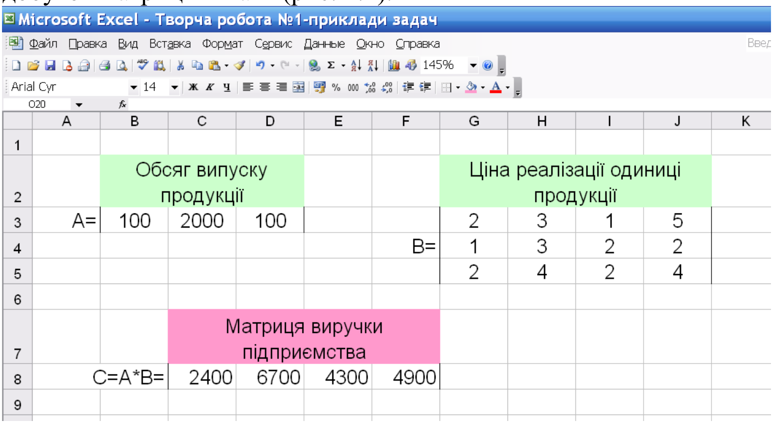


***Рис. 1.4**. Приклад множення матриць*

Обчислення визначників

Для знаходження визначника матриці в Excel використовується функція МОПРЕД(масив), яка викликається з панелі інструментів *Стандартная/Вставка функции/Мастер функций* (категорія функцій – математичні).

Алгоритм розв'язування

1. Курсор миші встановлюємо в комірку, в якій з'явиться значення визначника (для визначника A – комірка J3, визначника B–J8, C–J15).

2. Викликаємо функцію МОПРЕД. У діалоговому вікні (рис. 1.5) вводимо діапазон комірок шуканих визначників (для A – B2:C3, для B – B6:D8, для C – B11:F15).

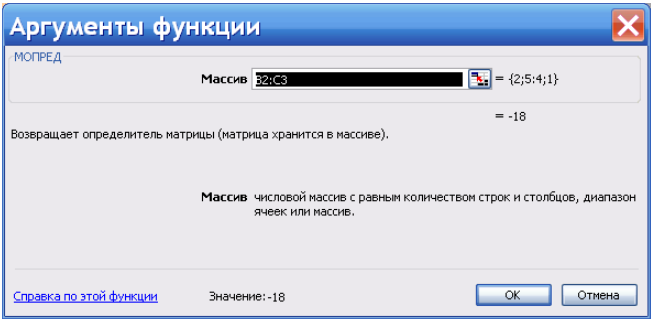


Рис. 1.5. *Приклад заповнення вікна МОПРЕД*

3. Після обчислень в комірках з’являться значення визначників матриць (рис. 1.6):

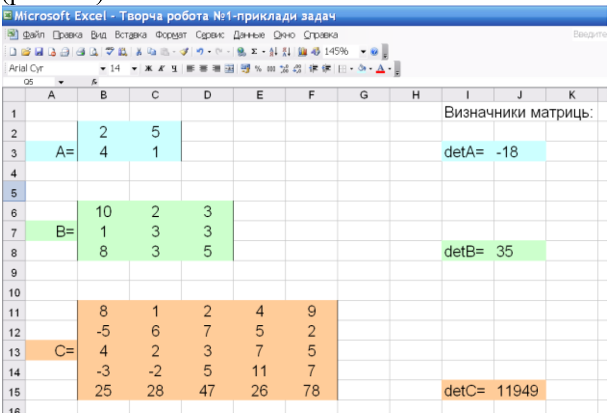


Рис. 1.6. *Приклад обчислення визначників різних порядків*

<u>Розв’язування систем лінійних рівнянь</u>

Розв’язування системи лінійних рівнянь проілюструємо на прикладі методу оберненої матриці.

Приклад 4. Швейна фабрика протягом трьох днів виробляла костюми, плащі та куртки. Відомі обсяги випуску продукції за три дні та грошові витрати на виробництво за ці дні. Знайти собівартість одиниці продукції кожного виду.

Алгоритм розв’язування системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці

1. Спочатку виділяємо блок комірок під шукану обернену матрицю – комірки B22:D24.

2. Для знаходження визначника матриці в Excel використовується функція МОБР(масив), яка викликається з панелі інструментів

Стандартная/Вставка функции/Мастер функций (категорія функцій – Математичні). Викликаємо функцію МОБР.

3. У діалогове вікно МОБР вводимо дані матриці А (комірки B14:D16) (рис. 1.7).

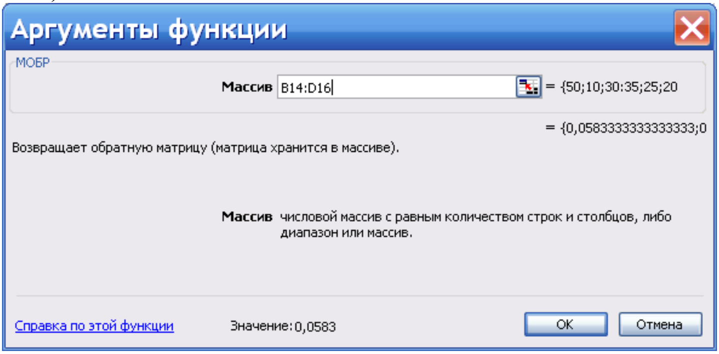


Рис. 1.7. *Приклад заповнення діалогового вікна МОБР*

4. Після цього натискаємо клавішу F2, а потім – одночасно поєднання клавіш CTRL+SHIFT+ENTER.

5. В результаті в комірках B22:D24 з'явиться обернена матриця (рис. 1.8).

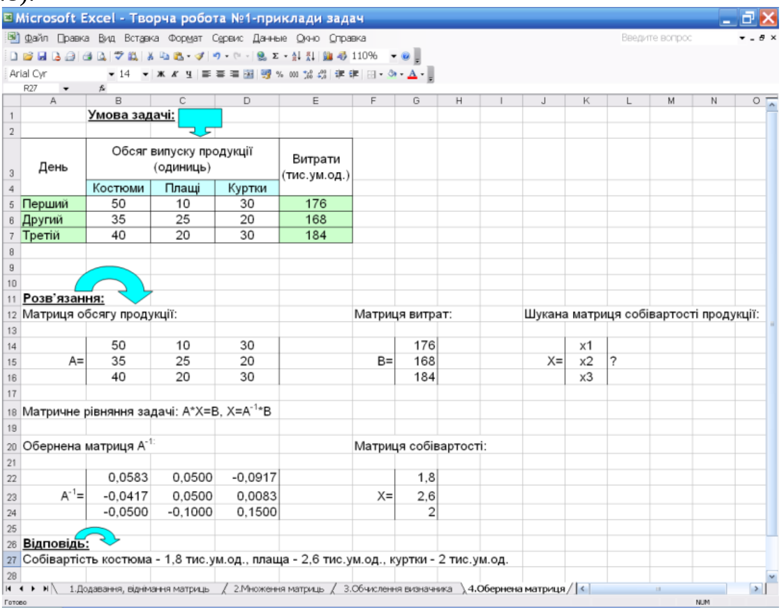


Рис. 1.8. *Розв'язування задачі методом оберненої матриці*

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО ТВОРЧОЇ РОБОТИ №1

Зауваження: при розв'язуванні задач – дані округлювати до двох знаків після коми!

Варіант 1

Завдання 1. Для виготовлення дитячих іграшок використовуються відходи полотняних матеріалів (фліс, штучне хутро, трикотаж) різних розмірів. Обчислити кількість матеріалу, який витрачається при розкрої трьома способами, якщо кількість заготовок одержаних з кожного матеріалу, а також кількість необхідних заготовок представлена таблицею:

Вид заготовки	Спосіб розкрою			Кількість заготовок
	1	*2*	*3*	
Фліс	1	2	3	126
Штучне хутро	2	3	3	134
Трикотаж	4	3	3	189

Завдання 2. Прямі витрати трьох галузей виробництва, а також обсяги кінцевих продуктів (у грошових одиницях) задані таблицею:

Продукція цехів	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	*2*	*3*	
1	0,2	0,3	0,1	50
2	0,4	0,2	0,5	80
3	0,1	0,3	0,6	100

Знайти: 1). Матрицю повних витрат; 2). План кожної галузі; 3). Виробничу програму галузей; 4). Коефіцієнти непрямих витрат.

Варіант 2

Завдання 1. Взуттєва фабрика спеціалізується з випуску виробів трьох видів: чобіт, кросівок та черевиків, при цьому використовується сировина трьох типів. Норми витрат кожного з них на одну пару взуття, обсяг витрат сировини на один день задані таблицею:

Види сировини	Норми витрат сировини на 1 пару, ум. од.			Витрати сировини на 1 день, ум. од.
	Чоботи	*Кросівки*	*Черевики*	
1	5	3	4	2700
2	2	1	1	900
3	3	2	2	1600

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду взуття.

Завдання 2. Витратні норми сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожної галузі виробництва, трудомісткість в людино-годинах на одиницю продукції, їх вартість представлені таблицею:

Показники	Норми витрат цехів			Вартість
	1	*2*	*3*	
Сировина	0,8	1	1,2	6
Паливо	3	1,5	2	4
Трудомісткість	8	5	5	1,5

Відома матриця коефіцієнтів повних витрат $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3,21 & 2,83 & 4,34 \\ 2,08 & 5,85 & 8,3 \\ 3,77 & 5,09 & 9,81 \end{pmatrix}$ та

матриця плану випуску продукції $X = \begin{pmatrix} 821 \\ 1402 \\ 1577 \end{pmatrix}$.

Знайти: 1). Сумарні витрати сировини, палива і трудових ресурсів для виконання програми виробництва; 2). Коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожної галузі; 3). Повні витрати сировини, палива та праці окремими галузями та господарством в цілому; 4). Внутрішньовиробничі витрати галузей та на кожну одиницю товарної продукції.

Варіант 3

Завдання 1. Для виготовлення трьох видів продукції використовуються три види сировини. Норми витрат і запаси сировини наведені в таблиці:

Сировина	Витрати сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	1	*2*	*3*	
1	3	2	1	11
2	2	3	1	13
3	2	1	3	11

Визначити кількість продукції, якщо ресурси повністю вичерпані.

Завдання 2. Є умовна виробнича система, яка складається з трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат одиниць продукції, що використовуються для випуску одиниць продукції, та обсяги кінцевої продукції наведено в таблиці:

Галузь виробництва	Прямі витрати галузей			Обсяг кінцевої продукції
	1	*2*	*3*	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) матрицю обсягів валової продукції та план кожної галузі; 3) коефіцієнти непрямих витрат.

Варіант 4

Завдання 1. Розглядається економічна система, що складається із трьох галузей – вугільно-добувної, електроенергетики та транспорту. Припускається, що для виробництва вугілля на 1 грн. необхідно виробництво електроенергії на 0,25 грн. та транспортних витрат на 0,25 грн. На виробництво електроенергії на 1 грн. необхідно виробити запасів вугілля на 0,65 грн., електроенергії на 0,05 грн., транспортних витрат на 0,05 грн. Забезпечення транспортних перевезень на 1 грн. потребує запасів вугілля на 0,55 грн. й електроенергії на 0,10 грн. Кожного тижня зовнішні потреби економічної системи в запасах вугілля становлять 50000 грн. та в запасах електроенергії 25000 грн. Визначити зовнішні потреби транспорту. Який обсяг щотижневих витрат необхідно спланувати для кожної галузі?

Завдання 2. Витратні норми сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожної галузі виробництва, трудомісткість в людино-годинах на одиницю продукції, їх вартість представлені таблицею:

Показники	Норми витрат цехів			Вартість
	1	*2*	*3*	
Сировина I типу	1,4	2,4	0,8	5
Сировина II типу	0	0,6	1,6	12
Паливо	2	1,8	2,2	2
Трудомісткість	10	20	20	1,2

Відома матриця коефіцієнтів повних витрат $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}$ та

матриця плану випуску продукції $X = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}$.

Знайти: 1). Сумарні витрати сировини, палива і трудових ресурсів для виконання програми виробництва; 2). Коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожної галузі; 3). Повні витрати сировини, палива та праці окремими галузями та господарством в цілому; 4). Внутрішньовиробничі витрати галузей та на кожну одиницю товарної продукції.

Варіант 5

Завдання 1. Торговельно-будівельна компанія уклала договір на будівництво 6 житлових будинків, 3 офісних будинків і 4 будинків відпочинку. Ціни на окремі види матеріалів такі: цегла – 32 ум. од./тис. шт., цемент – 300 ум. од./тон, ліс круглий – 44 ум. од./м^2, оцинковане залізо – 6 ум. од./м^2, скло – 5 ум. од./м^2. Інформація про кількість матеріалів на кожний вид будівництва представлена в таблиці:

Вид будови	Цегла (тис. шт.)	Цемент (тон)	Ліс круглий (м^2)	Оцинковане залізо(м^2)	Скло (м^2)
Житловий будинок	78	9	41	210	120
Офісний будинок	84	10	40	200	140
Будинок відпочинку	60	8	35	180	160

Потрібно знайти: 1). Загальну кількість матеріалів; 2). Ціну матеріалів для кожного виду будови; 3). Загальну вартість матеріалів.

Завдання 2. В таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період. Потрібно знайти обсяг валового випуску кожного виду продукції, якщо кінцеве споживання по галузям збільшиться відповідно до 60, 70 і 30 ум. од.

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск
	1	*2*	*3*		
Хімічна	5	35	40	40	100
Енергетична	10	10	40	60	100
Машинобудівна	20	10	20	10	50

Модуль 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

1. Мета вивчення модуля:

- ❖ ознайомитись та засвоїти теоретичні основи векторної алгебри та аналітичної геометрії і набути практичних вмінь і навичок розв’язування типових геометричних задач та прикладних задач економічного змісту.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

- ☺ знати: фундаментальні поняття та означення алгебри векторів та аналітичної геометрії, рівняння та формули теорії векторів, прямої на площині, прямої та площини в просторі, кривих другого порядку, поверхонь другого порядку.
- ☺ вміти: розв’язувати задачі з використанням лінійних операцій над векторами, записувати рівняння прямих та площин, заданих різними способами, самостійно обирати засоби, що будуть потрібні для виконання завдань модуля.
- ☺ застосовувати: отримані знання і вміння під час розв’язування прикладних задач економічного змісту (простір товарів та вектор цін, модель рівноваги доходів і збитків компанії, бюджетні множини та лінії бюджетного обмеження).

2. Структура і зміст 2 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.

3. Опорні знання

Для вивчення 2 модуля Вам необхідні знання і вміння, отримані під час вивчення модуля 1 (теми 1.2 та 1.3).
Для перевірки знань пропонуємо пройти наступний тест.

Тест-перевірка знань

1. Визначник другого порядку $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12}$	$a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$	$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$

2. Визначник третього порядку $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ дорівнює (через A_{ij} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}):

А	Б
$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$	$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{33}$
В	Г
$a_{11}A_{31} + a_{21}A_{32} + a_{31}A_{33}$	$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{12} + a_{31}A_{13}$

3. Чому дорівнює визначник $\Delta = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$:

А	Б	В	Г
$k^3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$	$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$	$k^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$	0

4. Не обчислюючи визначників, встановити, який з наступних визначників ділиться на „3”:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. Чому дорівнює визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$:

А	Б	В	Г
0	k	k^3	1

6. Не обчислюючи визначників, встановити, які визначники рівні між собою:

А	Б
$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ і $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ і $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
В	**Г**
$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ і $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ і $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

7. Який з визначників дорівнює числу 30:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

8. Визначник якої матриці A дорівнює 1:

А	Б	В	Г
$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

9. Яке матричне рівняння має розв’язок $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$:

А	Б
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix}$
В	**Г**
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -4 \end{pmatrix}$

10. При якій умові квадратна система лінійних рівнянь $AX = B$, де A – квадратна матриця, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів, має єдиний розв’язок і за якою формулою він обчислюється:

А	Б	В	Г
A – неособлива матриця $(\det A \neq 0)$ і $X = A^{-1}B$	A – особлива матриця $(\det A = 0)$ і $X = A^{-1}B$	A – неособлива матриця $(\det A \neq 0)$ і $X = BA^{-1}$	A – неособлива матриця $(\det A \neq 0)$ і $X = ABA^{-1}$

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Барковський В.В., Барковська Н. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2005. – 400 с.	Частина 6 (стор. 125 – 173)
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П. 2.1-2.5 (стор. 45-59), П. 4.1-4.4 (стор. 152-168)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 2, глава 3 (стор. 82 – 173)
Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.	Розділ 2 (стор. 77-104), розділ 3 (стор. 105-174)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 5-10 (стор. 48-85)

5. Основні поняття модуля

Тема 2.1. Вектор, одиничний вектор, нульовий вектор, модуль (довжина) вектора, колінеарні і рівні вектори, лінійні операції над векторами (додавання, віднімання, множення на число), проекція вектора на вісь, скалярний добуток векторів, лінійна комбінація векторів, лінійна залежність (незалежність) системи векторів, векторний добуток, мішаний добуток векторів, вектор товарів, простір цін.

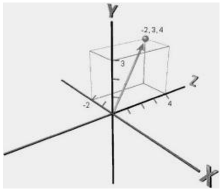
Тема 2.2. Векторне рівняння прямої, параметричне рівняння прямої, рівняння прямої: з кутовим коефіцієнтом; що проходить через дві точки; прямої «у відрізках на осях»; що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору; загальне рівняння прямої; умови перпендикулярності та паралельності двох прямих; відстань від точки до прямої; формула кута між прямими; рівноважна ціна, бюджетна множина.

Тема 2.3. Лінія II порядку, еліпс, гіпербола (спряжена гіпербола), парабола, ексцентриситет, асимптота, директриса, фокус, фокальна відстань, фокальний радіус, канонічні рівняння ліній II порядку, метод виділення повного квадрату виразу.

Тема 2.4. Площина, загальне рівняння площини, умова компланарності площини, вектор нормалі, кут між площинами, відстань від точки до площини, параметричне та канонічне рівняння прямої у просторі, рівняння прямої, що проходить через дві точки, кут між двома прямими у просторі, кут між прямою і площиною, поверхня II порядку (циліндричні, конічні та поверхні обертання), сфера.

З історії…

Термін «вектор» походить від латинського слова *vector*, що означає той, що несе або веде, переносить. Тривалий час вектор розглядався лише як направлений відрізок, один з кінців якого називали початком, а другий – його кінцем.



Інтерес до векторів і векторного числення прокинувся в математиків в XIX століття у зв’язку з потребами механіки і фізики. Проте витоки числення з направленими відрізками виникли у далекому минулому. У Древній Греції піфагорійці, відкривши ірраціональні числа, які не можна виразити дробами (наприклад, $\sqrt{5}, \sqrt{2}$ і ін.), не зважилися ввести ширше тлумачення числа. Математики того часу спробували звести питання арифметики і алгебри до геометричного розв’язування завдань. Таким чином, було покладено початок геометричної теорії відношень *Евдокса* (408-355 рр. до н. е.), а пізніше «геометричній алгебрі».

У геометричному численні, викладеному в праці Евкліда «Початки», складання і віднімання зводилися до складання і віднімання відрізків, а множення – до побудови прямокутників на відрізках, відповідних по довжині множникам. Згодом в XVI–XVII ст. геометрична алгебра за обмеженості своїх засобів дослідження стала гальмом розвитку науки.

Геометричні числення зіграли значну роль в розвитку математики, у тому числі і для теорії векторів, послуживши витоком розвитку цієї теорії. У 1587 р. був опублікований на голландській мові трактат фламандського ученого *Сімона Стевіна* (1548-1620) «Початки статики». Автор, розглядаючи складання сил, приходить до висновку, що для знаходження результату складання двох сил, що діють під кутом 90°, необхідно скористатися «паралелограмом сил», при цьому для позначення сил С.Стевін ввів стрілки. С.Стевін вперше ввів складання двох векторів, перпендикулярних один одному. Значно пізніше французький математик *Луї Пуансо* (1777-1859) в книзі «Елементи статики», що вийшла в 1803 р., розробляє теорію векторів, якою користується при розгляді сил, діючих в різних напрямах.

6. Опорні конспекти модуля

Вектор

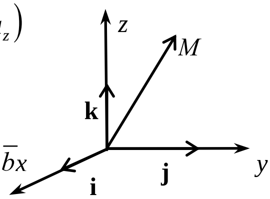
Напрям

Довжина

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

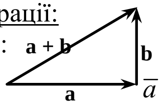
Розкладання $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

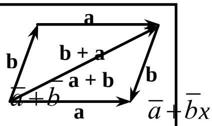
$\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$



Лінійні операції:

- додавання:

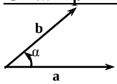




- віднімання: обернена операція до додавання
- множення на число: $\forall k \in R, \forall \vec{a}$,

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}| = |k||\vec{a}| \\ \vec{b} \parallel k\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k > 0, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ k < 0, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{matrix}$$

Скалярний добуток:



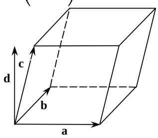
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha =$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$

Мішаний добуток – число: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) =$

$$= ([\vec{a}\vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - компланарні$



$$V_{паралелеп} = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})| = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$V_{піраміди} = 1/6 \cdot V_{пар}$$

Векторний добуток – вектор:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

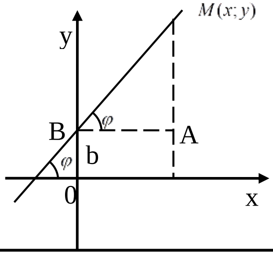
$$S_{паралелогр} = |\vec{c}| = |[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$$

До нас "*ікс*" прийшов від арабів. Невідоме число вони позначали словом "шей", тобто "ніщо", "щось". Потім замість слова писали його першу літеру "ш". Це позначення в арабів запозичили іспанці, тільки замість "ш" вони писали "х", а називали "ш". Від іспанців цей знак потрапив до французів. І тут нарешті "х" став називатись "іксом". А потім він і до нас перекинувся, значок і назва.

Першими вдалися до нулів математики стародавнього Вавілону. Якщо в якомусь "серединному" розряді числа не було одиниць, то вавілоняни просто лишали вільним місце цього розряду... А десь у VIII ст. н.е. замість пропуску почали ставити спеціальний знак. Форма його не одразу встановилася... Навіть у XV ст. математики писали: "Цей знак завдає чи не найбільше ускладнень і плутанини". Особливо важко було тоді збагнути, чому Нуль, дописаний в кінці числа, збільшував це число у десять разів.

Пряма на площині

Рівняння лінії на площині $F(x;y)=0$, $M(x;y)\in L \Leftrightarrow F(x;y)=0$.



Рівняння прямої <u>з кутовим коефіцієнтом</u>:

$$y = kx + b, y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$$

$l_1 : y = k_1 x + b_1$, $l_2 : y = k_2 x + b_2$, $\dfrac{k_2 - k_1}{l + k_1 k_2}$, $k = tg\varphi$,

$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow k_1 - k_2$, $l_1 \parallel l_2$

$\Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \pi/2 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0$, $k_1 = -1/k_2$

Проходить <u>через 2 точки</u>:

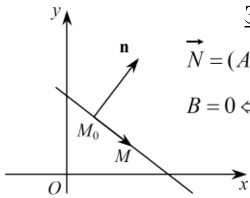
$A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

<u>У відрізках на осях</u>:

Якщо пряма перетинає осі координат у точках $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



<u>Загальне рівняння</u> прямої: $Ax + Bx + C = 0$

$\vec{N} = (A;B)$ - вектор нормалі, $\vec{N} \perp l$, $A = 0 \Leftrightarrow l \| Ox$,

$B = 0 \Leftrightarrow l \| Oy$, $A = C = 0$, $l \in Ox$, $B = C = 0$, $l = Oy$

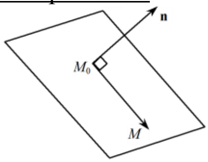
$$k = -\frac{A}{B}$$

7. Запитання для самоперевірки

1. Що таке вектор? Як він позначається і зображується?
2. Що називається довжиною вектора?
3. Які вектори називаються рівними, компланарними, колінеарними, ортогональними?
4. Які лінійні операції виконуються над векторами?
5. Що називається лінійною комбінацією системи векторів?
6. Яка система векторів називається лінійно залежною, а яка – лінійно незалежною?
7. Назвати необхідну і достатню умову лінійної залежності системи векторів?
8. Яким чином записується розклад векторів у базисі?
9. За якими формулами обчислюються довжина, проекції на координатні осі, напрямні косинуси вектора?
10. Як визначається скалярний, векторний, мішаний добутки векторів?
11. За якою формулою обчислюється кут між двома векторами?

Площина та пряма в просторі

<u>Загальне рівняння</u> площини:

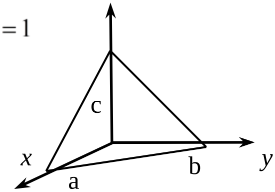


$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0, \vec{n}(A, B, C)$$

Рівняння <u>у відрізках на осях</u>:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Що проходить <u>через 3 точки</u>:

$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Кут між площинами:

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Умова || площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Умова $\perp$ площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Відстань від точки до площини:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Відстань від точки до прямої:

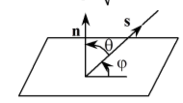
$$d = \frac{|\mathbf{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

<u>Канонічне рівняння</u> прямої: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, $\vec{s}(m; n; p)$ – напрямний вектор. <u>Параметричні рівняння</u> прямої: $\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}\right\}$

<u>Загальне рівняння</u> прямої: $\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ Рівняння прямої, що проходить <u>через 2 точки</u>: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Кут між прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$



Кут між двома прямими:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{s}}_1 \cdot \vec{\mathbf{s}}_2}{|\vec{\mathbf{s}}_1||\vec{\mathbf{s}}_2|},$$

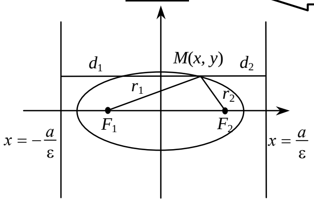
$$\cos\theta = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Лінії II порядку

Загальне рівняння: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

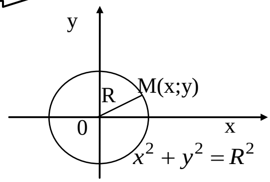
$$a, b, c \neq 0; a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

Еліпс



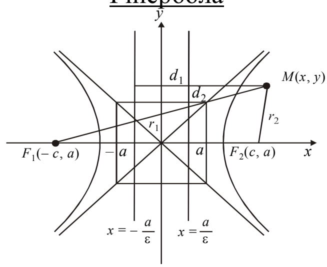
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

Коло



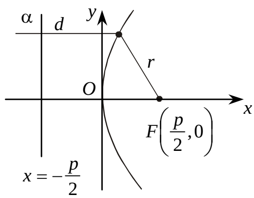
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Гіпербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

Парабола



$$y^2 = 2px \qquad \varepsilon = 1$$

12. Який простір називається простором товарів?
13. Що таке вектор цін?
14. Як на площині й у просторі задається прямокутна (декартова) система координат?
15. Як записується рівняння лінії в загальному випадку?
16. Як задається пряма на площині?
17. Які є види рівняння прямої на площині?
18. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими на площині?
19. За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?
20. Як можуть розміщуватись дві прямі на площині?
21. Які є необхідні й достатні умови перпендикулярності, паралельності двох прямих на площині?
22. Як записується рівняння кола із заданими координатами центра і визначеним радіусом?
23. Як записується канонічне рівняння еліпса (гіперболи, параболи)?

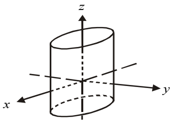
Поверхні II порядку

Загальне рівняння поверхні:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

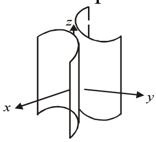
Циліндричні поверхні:

Еліптичний циліндр:



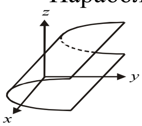
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гіперболічний циліндр:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

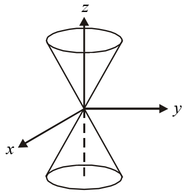
Параболічний циліндр:



$$\frac{z^2}{c^2} + qy = 0$$

Конічні поверхні:

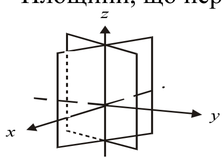
Еліптичний конус:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Якщо $a=b$ – конус круговий

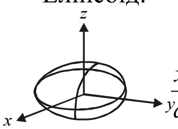
Площини, що перетинаються:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

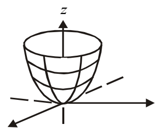
Поверхні обертання:

Еліпсоїд:



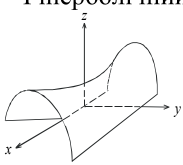
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Еліптичний параболоїд:



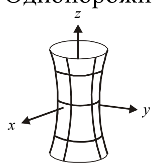
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$$

Гіперболічний параболоїд:



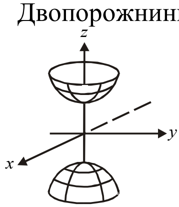
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$$

Однопорожнинний гіперболоїд:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двопорожнинний гіперболоїд:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

24. Який геометричний зміст параметрів, що входять у канонічне рівняння еліпса (гіперболи, параболи)?
25. Як залежить форма еліпса (гіперболи) від його ексцентриситету?
26. Назвати види циліндричних, конічних поверхонь II порядку та поверхонь обертання.
27. Які є види рівняння площини в просторі?
28. За якою формулою обчислюється кут між двома площинами?
29. Які умови паралельності і перпендикулярності двох площин, двох прямих в просторі, прямої та площини?
30. Які є види рівняння прямої в просторі?
31. Як можуть розміщуватись пряма й площина в просторі?
32. За якою формулою обчислюється відстань від точки до площини, відстань між двома точками в просторі?
33. Що таке рівноважна ціна, точка рівноваги?
34. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги доходів та збитків компанії?
35. Як визначаються бюджетна множина, її межа й лінії бюджетного обмеження?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$:

А	Б
$(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$	$(x_1\cdot x_2;y_1\cdot y_2;z_1\cdot z_2)$
В	Г
$(x_2+x_1;y_2+y_1;z_2+z_1)$	$(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$

2. Чому дорівнює площа паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

А	Б	В	Г
$\vec{a}\times\vec{b}$	$\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$	$\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert$	$\frac{1}{2}\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert$

3. Яка умова виконується для векторів $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, якщо вони колінеарні:

А	Б	В	Г
$\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert=0$	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$	$\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert\neq 0$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

4. За якою формулою обчислюється скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$:

А	Б
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x b_x; a_y b_y; a_z b_z)$
В	**Г**
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

5. Яка формула задає довжину вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

А	Б
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x + a_y + a_z}$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x{}^2 - a_y{}^2 - a_z{}^2}$
В	**Г**
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(a_y - a_x)^2 + (a_z - a_x)^2}$

6. Рівняння виду $y = kx + b$ називається:

А	Б	В	Г
рівнянням прямої «у відрізках на осях»	загальним рівнянням прямої	канонічним рівнянням прямої	рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом

7. Як розташований вектор $\vec{n}(A, B, C)$ по відношенню до площини α, загальне рівняння якої $Ax + By + Cz + D = 0$:

А	Б	В	Г
вектор $\vec{n}(A, B, C)$ паралельний до площини α	вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярний до площини α	вектор $\vec{n}(A, B, C)$ розташований у площині α	вектор $\vec{n}(A, B, C)$ утворює кут $\varphi = 45^\circ$ з площиною α

8. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою:

А	Б
$d = \lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert$	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

В	Г
$d=\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A+B}}$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{A^2+B^2}$

9. Рівняння параболи з вершиною в точці $(x_0;y_0)$ і віссю симетрії, параллельної до осі OY, має вигляд:

А	Б
$(x+x_0)^2=2p(y+y_0)$	$(y+y_0)^2=2q(x+x_0)$
В	Г
$(y-y_0)^2=2q(x-x_0)$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$

10. Для довільної точки гіперболи сталою величиною є:

А	Б	В	Г
модуль різниці відстаней до фокусів	сума відстаней до фокусів	частка відстаней до фокусів	відстань до її центру

Практична частина:

11. Які з наведених векторів є колінеарними:

А	Б	В	Г
$\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(3;2;1)$	$\vec{a}=(1;0;0)$, $\vec{b}=(0;1;0)$	$\vec{a}=(1;1;1)$, $\vec{b}=(2;2;2)$	$\vec{a}=(2;1;2)$, $\vec{b}=(1;2;1)$

12. В якій точці знаходиться кінець вектора $\vec{a}=(4;5;6)$, якщо його початок співпадає з точкою $A(5;6;7)$:

А	Б	В	Г
$(9;11;13)$	$(-1;-1;-1)$	$(-9;-11;-13)$	$(1;1;1)$

13. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a}=(2;-3;4)$ і $\vec{b}=(-1;0;5)$:

А	Б	В	Г
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2;0;20)$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=18$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=22$

14. Які з наведених векторів є перпендикулярними:

А	Б	В	Г
$\vec{a}=(0;2;4)$, $\vec{b}=(2;3;2)$	$\vec{a}=(2;-2;-2)$, $\vec{b}=(8;4;4)$	$\vec{a}=(-1;1;-3)$, $\vec{b}=(2;-2;3)$	$\vec{a}=(4;1;1)$, $\vec{b}=(-4;-1;-1)$

15. Знайти довжину діагоналі AC чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1;2;4)$, $B(2;3;1)$, $C(-1;4;-1)$, $D(1;-1;0)$:

А	Б	В	Г
$\sqrt{30}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{28}$

16. Скласти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1;0;3)$, $\vec{b} = (-1;4;0)$.

А	Б	В	Г
$\vec{c} = (0;8;6)$	$\vec{c} = (1;4;6)$	$\vec{c} = (3;0;6)$	$\vec{c} = (0;4;6)$

17. Пряма $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ відсікає на осі Ox відрізок, що дорівнює:

А	Б	В	Г
4	-3	3	1

18. Як розташовані прямі $2x + y - 5 = 0$, $x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$ на площині одна відносно одної:

А	Б	В	Г
паралельні	перпендикулярні	перетинаються	співпадають

19. Пряма на площині, що проходить через точки $M_1(0;1)$ та $M_2(2;4)$ має рівняння виду:

А	Б	В	Г
$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{3}$	$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3}$	$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2}$	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{4}$

20. Рівнянням $(y-8)^2 = -10x$ задано параболу, гілки якої спрямовані:

А	Б	В	Г
вгору	вниз	вправо	вліво

21. Яка з гіпербол має ексцентриситет ε=5/4 ?

А	Б	В	Г
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$

22. Радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + 2x + y^2 - 24 = 0$, дорівнює:

А	Б	В	Г
5	$\sqrt{23}$	2	25

23. Рівнянням $3(x+5)^2 - 2(y-2)^2 = 6$ задається:

А	Б	В	Г
гіпербола з півосями $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$ і центром (5; -2)	парабола з вершиною (-5; 2)	гіпербола з півосями $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ і центром (-5; 2)	еліпс з центром (5; -2)

24. Яка з площин паралельна до осі Oz:

А	Б	В	Г
$3x+4y-2z-4=0$	$3y-5z-8=0$	$3x-4y-7=0$	$5z-8=0$

25. Яка з прямих проходить через точку $A(4;4;2)$:

А	Б
$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z+2}{-3}$	$\frac{x-4}{4}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{1}$
В	**Г**
$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{2}$	$\frac{x-2}{5}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{7}$

9. Індивідуальні домашні завдання №2

Базовий рівень: **Завдання 1 + Завдання 2**
Підвищений рівень: **Завдання 3**
Поглиблений рівень: **Завдання 4**

Варіанти завдань

Варіант 1

1. Дано вершини $A(1;-2;1), B(3;2;-1), C(2;2;5), D(-2;1;0)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0;1;3);\ M_2(2;4;5); M_3(1;-2;1)$.

3. Дано рівняння еліпса: $25x^2+169y^2=4225$. Обчислити довжини осей, координати фокусів та його ексцентриситет.

4. У просторі двох товарів із цінами (2;4) вказати кілька наборів товарів вартістю 8, 16, 24 (умовн. грош. од.). Нехай ціни змінилися (3;3). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант 2

1. Дано вершини $A(-2;1;0), B(2;2;5), C(3;1;2), D(1;-2;1)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти кут між площинами: $x-2y+2z-8=0$ і $x+z-6=0$.

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що півосі його дорівнюють 4 і 2 одиницям.

4. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє х виробів із ціною р=4 грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_{\hat{A}}=600+2x$.

Варіант 3

1. Дано вершини $A(2;2;5), B(-2;1;0), C(1;-2;1), D(3;1;2)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(2;2;-2)$ і паралельна до площини $x-2y-3z=0$.

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що відстань між фокусами дорівнює 6, а велика піввісь - 5 одиницям.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=800-10p, s=200+10p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 4

1. Дано вершини $A(1;-1;6), B(4;5;-2), C(-1;3;0), D(6;1;5)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Обчислити відстань від точки $(3;1;-1)$ до площини $22x+4y-20z-45=0$.

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що велика піввісь дорівнює 10 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon=0{,}8$.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (7;3)$ при доході R=42. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 5

1. Дано вершини $A(6;1;5), B(-2;3;1), C(4;-1;7), D(1;1;1)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Визначити кут між прямими $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ і $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$.

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що мала піввісь дорівнює 3 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q = \frac{2,1}{p^2+1}, s = \frac{1}{40}p^2 + 0,02$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни.

Варіант 6

1. Дано вершини $A(3;2;1), B(2;-1;8), C(2;-1;2), D(6;-1;6)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої
$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що сума півосей дорівнює 8, а відстань між фокусами – 8 одиницям.

4. У просторі двох товарів із цінами (3;5) вказати кілька наборів товарів вартістю 15, 30, 45 (умовн. грош. од.). Нехай ціни змінилися (4;4). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант 7

1. Дано вершини $A(-1;3;2), B(-8;5;0), C(-3;7;-5), D(-4;1;3)$ піраміди.

Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Через точку $(2;-5;3)$ провести пряму паралельно прямій $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$.

3. Еліпс проходить через точки $M(\sqrt{3};-2)$ і $N(-2\sqrt{3};1)$. Скласти його канонічне рівняння.

4. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною p=7 грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_{\hat{A}}=1000+5x$.

Варіант 8

1. Дано вершини $A(2;0;-1), B(-2;-8;5), C(1;-4;1), D(-2;1;4)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Знайти відстань від точки $O(0;0;0)$ до прямої $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{-5}$.

3. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{1}{2}x$ і одну з точок на гіперболі $M(12;3\sqrt{3})$, скласти рівняння гіперболи.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=400-20p, s=70+10p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 9

1. Дано вершини $A(4;-2;3), B(10;-3;-2), C(8;-6;3), D(5;-6;0)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ і точку $(3;4;0)$.

3. Написати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$, а її фокуси знаходяться в вершинах цього еліпса.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p}=(5;3)$ при доході R=60. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 10

1. Дано вершини $A(2;-5;2), B(-7;2;4), C(6;-1;3), D(0;1;5)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти точку перетину прямої $x=2t-1,\ y=t+2,\ z=1-t$ з площиною $3x-2y+z=3$.

3. Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює 2.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=\frac{2,2}{p^2+0,5}, s=\frac{1}{10}p^3+0,08$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни.

Варіант 11

1. Дано вершини $A(0;1;1), B(3;4;4), C(-3;9;3), D(0;5;-4)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Обчислити відстань від точки $\left(2;\,0;\,-\frac{1}{2}\right)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.

3. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60°.

4. У просторі двох товарів із цінами (2;9) вказати кілька наборів товарів вартістю 18, 36, 54 (умовн. грош. од.). Нехай ціни змінилися (4;7). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант 12

1. Дано вершини $A(-2;0;4), B(3;-3;7), C(-3;5;-1), D(-2;-7;5)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1;-2;0)$ і $M_2(1;1;2)$ і перпендикулярна до площини $x+2y+2z-4=0$.

3. Обчислити параметр параболи $y^2=2px$, якщо відомо, що вона дотикається до прямої $x-2y+5=0$.

4. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною p=10 грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_{\hat{A}}=2000+5x$.

Варіант 13

1. Дано вершини $A(5;1;-3), B(8;-8;3), C(2;0;-2), D(4;1;0)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Чи є прямі перпендикулярними: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{5}$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$?

3. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі OY симетрично відносно початку координат, якщо дійсна піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{7}{5}$.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=600-8p, s=120+8p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 14

1. Дано вершини $A(3;2;-2), B(1;3;1), C(6;2;0), D(0;-2;2)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;

4) об’єм піраміди.

2. Через точку $(2;-5;3)$ провести пряму, паралельну прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

3. Записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює 32, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (5;8)$ при доході R=120. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 15

1. Дано вершини $A(3;-2;3), B(0;-6;-1), C(5;-9;8), D(3;-3;7)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Визначити кут між двома прямими $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 4x + y - 6z = 2 \\ y - 3z = -2. \end{cases}$

3. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі OX симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 20, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q = \frac{2{,}3}{p^2 + 1}, s = \frac{1}{40}p^2 + 0{,}06$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни.

Варіант 16

1. Дано вершини $A(3;2;1), B(2;-1;8), C(2;-1;-2), D(6;-1;6)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(3;1;-2)$ і через пряму $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

3. Записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 24, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{12}{13}$.

4. У просторі двох товарів із цінами (4;3) вказати кілька наборів товарів вартістю 12, 24, 48 (умовн. грош. од.). Нехай ціни змінилися (2;5). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант 17

1. Дано вершини $A(-1;3;2), B(-8;5;0), C(-3;7;-5), D(-4;1;3)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4;-3;1)$ і паралельна прямим: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3}$ і $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}$.

3. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі OX симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює $\dfrac{16}{3}$, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$.

4. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка щомісяця виготовляє x (тис. од.) виробів із ціною p=8 грн. за одиницю, якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_{\hat{A}} = 1000 + 6x$.

Варіант 18

1. Дано вершини $A(2;0;-1), B(-2;-11;5), C(1;-4;-1), D(-2;1;-4)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об’єм піраміди.

2. Записати рівняння площини, паралельної площині *Oxy*, що проходить через точку $(2;-5;3)$.

3. Записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо велика піввісь дорівнює 13, а відстань між фокусами – 10.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p:

$q = 400 - 5p, s = 100 + 5p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 19

1. Дано вершини $A(4;-2;3), B(10;-3;-2), C(8;-6;3), D(5;-6;0)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти відстань точки $M(7;9;7)$ до прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, знаючи координати її фокуса: $F(0;1/2)$.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (4;9)$ при доході R=36. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 20

1. Дано вершини $A(2;-5;2), B(-7;2;4), C(4;-1;3), D(0;1;3)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

3. Визначити, яка крива задається рівнянням $3x^2 - 4y^2 = 12$. Знайти основні параметри кривої, її ексцентриситет та директриси.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q = \frac{2,4}{p^2 + 0,5}, s = \frac{1}{10} p^3 + 0,16$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни.

Варіант 21

1. Дано вершини $A(3;-3;0), B(-2;4;9), C(3;0;-5), D(3;3;1)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;

4) об’єм піраміди.

2. Чи є прямі перпендикулярними: $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$?

3. Обчислити фокальний радіус точки М параболи $y^2 = 28x$, якщо абсциса точки дорівнює 5.

4. У просторі трьох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (7;3;2)$ при доході R=42. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 22

1. Дано вершини $A(0;1;1), B(3;4;-4), C(-3;5;0), D(0;2;5)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра АВ;
2) кут між ребром AD і гранню АВС;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань АВС;
4) об’єм піраміди.

2. Знайти точку, симетричну точці $(4;3;10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

3. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі OY симетрично відносно початку координат, якщо відстань між її вершинами дорівнює 20, а відстань між фокусами – 24.

4. У просторі двох товарів із цінами (4;8) вказати кілька наборів товарів вартістю 16, 32, 48 (умовн. грош. од.). Нехай ціни змінилися (5;9). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант 23

1. Дано вершини $A(-4;3;0), B(-3;3;7), C(5;3;-3), D(-1;-3;-5)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра АВ;
2) кут між ребром AD і гранню АВС;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань АВС;
4) об’єм піраміди.

2. Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину паралельно площині $x + y - z + 15 = 0$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, знаючи координати її фокуса: $F(-5;0)$.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p:

$q=1000-10p, s=100+10p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 24

1. Дано вершини $A(5;-1;3), B(3;-3;5), C(2;0;-2), D(4;1;0)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Через пряму $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+4y-3z+7=0$.

3. Переконатись, що точка $M\left(-5;\frac{9}{4}\right)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, та визначити фокальні радіуси цієї точки.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p}=(2;9)$ при доході R=72. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 25

1. Дано вершини $A(3;2;-1), B(-1;3;-4), C(4;2;0), D(0;2;2)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ з площиною $x+2y+3z-29=0$.

3. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 90°.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=400-5p, s=100+5p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 26

1. Дано вершини $A(1;-2;3), B(0;-3;-1), C(3;-5;-6), D(1;-4;-2)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;

2) кут між ребрами AB та AD;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Через точку $(2; -5; 3)$ провести пряму паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

3. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої: ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

4. У просторі трьох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p} = (1;3;4)$ при доході R=24. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 27

1. Дано вершини $A(1;-1;6), B(-5;-1;0), C(4;0;0), D(2;2;5)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти точки перетину прямої $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0; \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ з координатними площинами.

3. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці (4;2). Скласти рівняння гіперболи.

4. У просторі двох товарів із цінами (1;2) вказати кілька наборів товарів вартістю 4, 8, 12 (умовн. грош. од.). Нехай ціни змінилися (2;4). Навести приклади товарів, які подешевшали, подорожчали, вартість яких не змінилася.

Варіант 28

1. Дано вершини $A(-1;3;0), B(2;0;0), C(4;-1;2), D(3;2;7)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Обчислити відстань від точки $(4; 3; -2)$ до площини $3x - y + 5z + 1 = 0$.

3. Записати рівняння кола з центром у точці (6;7), що дотикається до прямої $5x-12y=24$.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=400-20p, s=70+10p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

Варіант 29

1. Дано вершини $A(7;1;2), B(-5;3;-2), C(3;3;5), D(4;5;-1)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $O(0;\,0;\,0)$, $A(3;\,-2;\,1)$ і $B(1;\,4;\,0)$.

3. Еліпс проходить через точку $P\left(3,\frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x+5y-25=0$. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для векторів цін $\vec{p}=(3;4)$ при доході R=42. Записати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Бюджетну множину та її межу зобразити графічно.

Варіант 30

1. Дано вершини $A(1;-3;1), B(-3;2;-3), C(3;0;3), D(-2;4;-4)$ піраміди. Знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребром AD і гранню ABC;
3) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;
4) об'єм піраміди.

2. Знайти кут між площинами: $x+2z-6=0$ і $x+2y-4=0$.

3. На еліпсі $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

4. Задано залежність попиту q=q(p) і пропозиції s=s(p) від ціни p: $q=600-8p, s=120+8p$. Знайти рівноважну ціну й доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

<u>**Модуль 3. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної**</u>

1. Мета вивчення модуля:

❖ активізувати знання та вміння математичного аналізу, засвоїти теоретичні основи диференціального числення функції однієї змінної та сформувати практичні вміння і навички, необхідні для розв'язування типових та прикладних задач.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

☺ <u>знати:</u> фундаментальні поняття та означення математичного аналізу; основні правила та теореми теорії границь та диференціального числення функції однієї змінної.

☺ <u>вміти:</u> розв'язувати задачі на побудову та перетворення графіків функцій, знаходження границь та похідних; дослідження функцій за допомогою апарату диференціального числення; самостійно знаходити та опрацьовувати математичні джерела; обирати і використовувати необхідні методи і засоби, які потрібні для виконання самостійних завдань даного модуля.

☺ <u>застосовувати:</u> отримані знання і вміння під час розв'язування прикладних задач економічного змісту (еластичність функції та її властивості, задача вибору фірмою оптимального обсягу виробництва, граничні витрати).

2. Структура і зміст 3 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.

3. Опорні знання

Для його розуміння Вам необхідні знання і вміння на рівні шкільного курсу математики, зокрема такі поняття: функція та її графік, область визначення та область значень функції, елементарні функції та їх графіки; перетворення графіків функцій; числова послідовність, неперервність числової послідовності.

Для перевірки знань пропонуємо пройти наступний тест.

Тест-перевірка знань

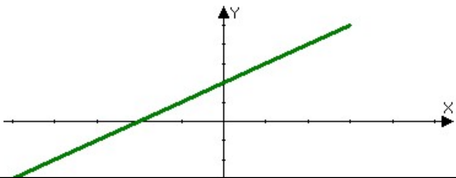
1. Областю визначення функції $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ є проміжок:

А	Б	В	Г
$\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$	$(-3;3)$	$\left(-\infty;\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ $\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$	$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$

2. В область визначення функції, заданої формулою $y=\dfrac{x-4}{3+x}$, не входить число:

А	Б	В	Г
3	-3	4	-4

3. На рисунку зображено графік лінійної функції $y=kx+b$. Вказати правильні нерівності:

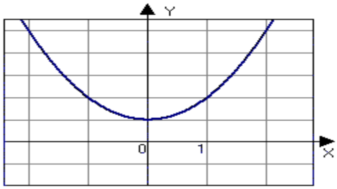


А	Б	В	Г
k>0, b>0	k<0, b<0	k>0, b<0	k<0, b>0

4. Координати точки перетину графіка функції $y=\dfrac{x^2+3x+8}{x-2}$ з віссю ординат дорівнюють:

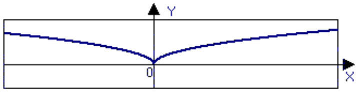
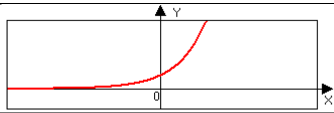
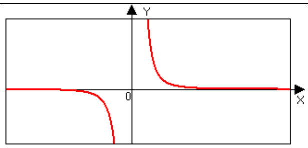
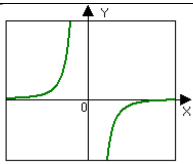
А	Б	В	Г
(4;0)	(0;-4)	(0;4)	(-4;0)

5. На яку кількість одиничних відрізків зміщено графік функції $y=x^2$?

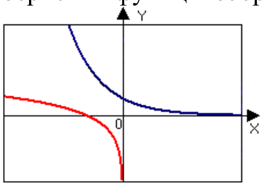


А	Б	В	Г
на 1 вліво по осі абсцис	на 1 вгору по осі ординат	на 1 вниз по осі ординат	на 1 вліво по осі ординат

6. Вказати графік парної функції:

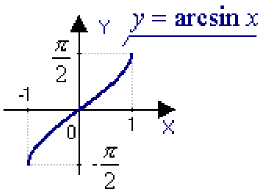
А	Б
	
В	**Г**
	

7. Графіки яких взаємообернених функцій зображені на рисунку:



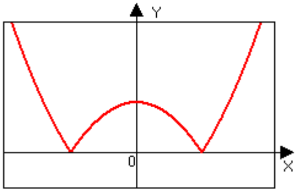
А	Б	В	Г
$y = x^3$, $y = \log_3 x$	$y = 3^{-x}$, $y = \log_3 x$	$y = 3^{-x}$, $y = \log_3(-x)$	$y = 3^x$, $y = \log_3 x$

8. Вказати область визначення функції $y = \arcsin x$:



А	Б	В	Г
$[-\pi/2;\pi/2]$	R	$[0;\pi)$	$[-1;1]$

9. Яке перетворення необхідно виконати з функцією $y = x^2 - 2$, щоб отримати графік, який зображено на рисунку:



А	Б	В	Г
відобразити по модулю всю функцію	здійснити симетричне перетворення по осі ординат	побудувати обернену функцію	перенести вгору на 3 одиниці

10. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3}$:

А	Б	В	Г
-4/3	4/3	3/4	-3/4

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П. 5 – п. 6 (стор. 169 – 235)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 4 – 7 (стор. 174 – 283)
Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.	Розділ 4 (п.4.2) (стор. 182 – 203); розділ 5 (стор. 212 – 259); розділ 6 (стор. 279 – 332); розділ 7 (стор. 360 – 383)
Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 517 с.	Розділ 3 (тема 10-14) (стор. 185 – 273)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 11-17 (стор. 86 – 125)

5. Основні поняття модуля

Тема 1. Числова послідовність, збіжна (розбіжна) послідовність, границя числової послідовності, нескінченно мала (велика) послідовність, функція, графік функції, способи задання функції, область визначення (значень) функції, парна функція, періодична функція, зростаюча (спадна) функція, складена функція, обернена функція, елементарні функції і їх графіки, функція попиту, функція пропозиції, границя функції в точці та на відрізку, нескінченно мала (велика) функція, перша і друга чудові (важливі) границі, неперервність функції, точки розриву функції I та II роду.

Тема 2. Похідна функції однієї змінної, економічний та геометричний зміст похідної, основні правила диференціювання, таблиця похідних, похідна складеної, неявної, параметричної функції, похідні вищих порядків, диференціал функції, правило Лопіталя, основні типи невизначеностей.

Тема 3. Ознаки зростання (спадання) функції, екстремуми функції, необхідна і достатні умови екстремуму, опуклість (вгнутість) графіка функції, точки перегину, асимптоти, схема дослідження та побудови графіка функції, еластичність функції, оптимальна ціна, граничні витрати та прибуток, оптимальний обсяг виробництва.

З історії…

Поняття функції виникло в математиці не так давно. Для того, щоб прийти до розуміння доцільності його введення й одержати перші досить чіткі означення, потрібні були зусилля відомих математиків декількох поколінь. Революційні зміни в математиці, що відбулися в XVII столітті, викликані роботами багатьох вчених, що представляють різні країни і народи.

Необхідні передумови до виникнення поняття функції були створені в 30-х роках XVII ст., коли виникла аналітична геометрія, що характеризується, на відміну від класичних методів геометрів Древньої Греції, активним залученням алгебри до розв’язання геометричних задач.

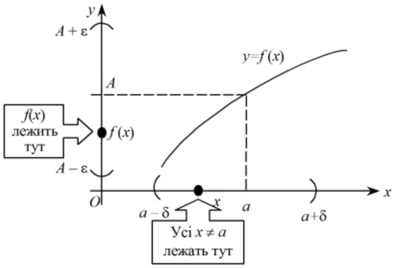
Практично одночасно (і незалежно один від одного) французькі математики *П’єр Ферма* (1601-1665) і *Рене Декарт* (1596-1650) помітили, що введення системи координат на площини і задання фігур їхніми рівняннями дозволяють звести багато задач геометрії до дослідження рівнянь геометричних фігур. На честь Декарта, що дав розгорнутий виклад нового методу в книгах «Геометрія» і «Міркування про метод», прямокутна система координат пізніше була названа декартовою. Одночасно формувалася й алгебра, створювалося «буквене числення», те саме, за

допомогою якого зараз перетворюються алгебраїчні вирази, розв’язуються рівняння, текстові задачі і т. п.

6. Опорні конспекти модуля

Границя та неперервність функції

Послідовність $f(n)=f_n$ – числова функція, для будь-якого $n \in N$. *Границею функції* $y=f(x)$ при x, що прямує до a, називається число A, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке що для всіх x, які задовольняють нерівність $0<|x-a|<\delta$ випливає $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.



Нескінченно

Великі: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

Малі: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

e=2,71828182… – так зване число Непера

Чудові (важливі) границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e \Leftrightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

<u>Правила обчислення</u> границь:

1. $f(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=B$ то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)+\psi(x))=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)+\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A+B$,

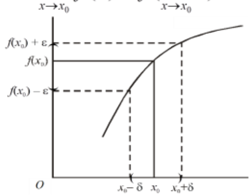
2) $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\psi(x))=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=AB$,

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)}=\dfrac{A}{B}$, якщо $B\neq 0$.

$f(x)$ – неперервна в точці x_0, якщо

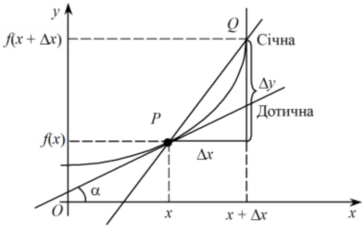
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$



Похідна функції 1-ї змінної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Геометричний зміст: кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції. *Економічний зміст*: продуктивність праці виробника в момент часу. *Фізичний зміст*: швидкість матеріальної точки.

Таблиця похідних – див. у підручнику!

Еластичність попиту q за ціною p:

$$Ep_j(q_j) = \frac{dq_i}{q_i} / \frac{dp_j}{p_j} = \frac{dq_i}{dp_j} \frac{p_i}{q_j}$$

Основні <u>*правила диференціювання*</u>:

1. $(\text{const})' = 0$ 2. $(cu)' = cu'$

3. $(u + v)' = u' + v'$

4. $(uv)' = u'v + uv'$ 5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Похідна *складеної функції* $y = f(\varphi(x))$:

$$y' = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

(правило ланцюжка)

Похідна *неявно заданої функції* $F(x; y) = 0$

Продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x, а потім зі здобутого рівняння знайти похідну y'.

Похідна *параметричної функції*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t):\ y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'t}{\varphi'(t)};\ y'''(x) = \frac{(y''(x))'t}{\varphi'(t)}$$

Похідна *показниково-степеневої функції*

$y = u(x)^{v(x)}$ (прологарифмувати!):

$$y' = [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right].$$

Сам термін «функція» уперше зустрічається в рукописі великого німецького математика і філософа *Готфрида Лейбніца* – спочатку в рукописі (1673), а потім і в друкованому вигляді (1692). Латинське слово function переводиться як «здійснення», «виконання» (дієслово fungor переводиться також словом «виражати»). Лейбніц увів це поняття для назви різних параметрів, пов’язаних з положенням точки на площині. В ході переписування Лейбніц і його учень – швейцарський математик *Йоган Бернуллі* (1667–1748) поступово приходять до розуміння функції як аналітичного виразу й у 1718 р. дають таке означення: «Функцією змінної величини називається кількість, складена яким завгодно способом з цієї змінної і постійних». Сучасне означення числової функції, у якому це поняття вже звільнялося від способу завдання, було дано російським математиком *Миколою Лобачевським* (1834 р.) і німецьким математиком Петером Леженом Діріхле (1837 р.). Сучасне поняття функції з довільними областями визначення і значень сформувалося, зовсім недавно, у першій половині XX століття, після робіт творця теорії множин Георга Кантора (1845–1918).

Ряд задач диференціального числення були розв'язані ще в давнину *Архімедом*, що розробив спосіб проведення дотичної. Архімед (близько 287 – 212 до н.е.) побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я. Але загального методу, придатного для побудови дотичної до будь-якої плоскої кривої в довільній її точці знайдено не було.

Основне поняття диференціального числення – поняття похідної – виникло в XVII ст. у зв'язку з необхідністю розв'язування завдань, а саме: визначення швидкості прямолінійного нерівномірного руху і побудови дотичної до довільної плоскої кривої. Це завдання було вперше розв'язане англійським фізиком і математиком *Ісааком Ньютоном* (1643-1722). Функцію він назвав флюєнтою, тобто поточною величиною. Похідну – флюксією. Ньютон прийшов до поняття похідної, виходячи з питань механіки. Загальнішим і важливішим для розвитку диференціального числення був метод побудови дотичних французького математика П'єра Ферма (1601 – 1665).

Ґрунтуючись на результатах Ферма і деяких інших висновках, Готфрид Лейбніц в 1684 році опублікував першу статтю з диференціального числення, в якій були викладені основні правила диференціювання. Термін «похідна» вперше зустрічається у французького математика *Луї Арбогаста* (1759-1803). Цим терміном став користуватися французький математик *Жозеф Луї Лагранж*, який і ввів позначення y' та $f'(x)$.

7. Запитання для самоперевірки

1. Що таке числова послідовність?
2. Які числові послідовності називаються монотонними, обмеженими?
3. Як формулюється означення границі числової послідовності?
4. Який геометричний та економічний зміст границі числової послідовності?
5. Яку з послідовностей називають нескінченно малою, нескінченно великою? Який між ними зв'язок?

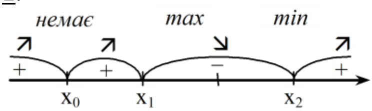
6. Властивості нескінченно малих послідовностей.
7. Яка послідовність називається збіжною, розбіжною?
8. Що таке функція одного аргументу?
9. Що є областю визначення та областю значень функції?
10. Основні способи задання функцій.
11. Яка функція називається: монотонною, додатною, від'ємною, знакосталою, парною, непарною, періодичною?
12. Яка функція називається складеною, взаємно оберненою?
13. Які функції належать до основних елементарних?
14. Які функції використовуються в економічній теорії?
15. Як формулюється означення границі в точці?
16. Основні теореми про границі функції.

Застосування похідної

Критичні точки: $\left[\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)=0 \end{array}\right.$ *або* $\left.\begin{array}{l} f'(x_0)\, не\exists \\ f''(x_0)\, не\exists \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} \text{I роду} \\ \text{II роду} \end{array}$

Достатні умови екстремуму:

1.



2.
$f''(x_0)>0 \Rightarrow$
$x_0 - \min$
$f''(x_0)<0 \Rightarrow$
$x_0 - \max$

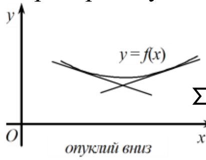
Необхідна умова екстремуму:
$f'(x_0)=0$
або не існує

Ознаки монотонності функції:

$f'(x_0)>0$ – функція зростає ↑

$f'(x_0)<0$ – функція спадає ↓

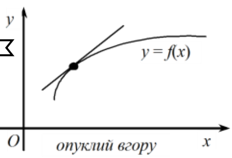
Критерії опуклості (вгнутості):



⇨

$f''(x)>0$

⇦



$f''(x)<0$

Асимптоти графіка функції:

- вертикальні: $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=+\infty$,

  або $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-\infty$

- похилі $y=kx+b$: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$

Функція *доходу*: $R=R(q)$, функція *витрат* $C=C(q)$.

Функція *прибутку* від випуску продукції: $P(q)=R-C=p\cdot q-C$

Економічний принцип: граничний дохід R' = граничні витрати C'.

17. Як визначаються чудові (важливі) границі?
18. Які існують типи невизначеностей?
19. Яке означення неперервності функції в точці та на відрізку?
20. Як класифікують точки розриву?
21. Що таке похідна функції однієї змінної?
22. За якими правилами обчислюються похідна суми, добутку, частки двох функцій?
23. Як обчислюється похідна складеної, показниково-степеневої, неявно заданої, параметричної функцій?
24. У чому полягає геометричний, економічний зміст похідної?
25. Яка функція називається диференційованою? Що таке диференціал?
26. Як визначаються похідні другого, третього та вищих порядків?
27. Теорема Ролля, Коші, правило Лопіталя.
28. Яка ознака монотонності функції?
29. Які необхідні і достатні умови локального екстремуму функції?
30. Що таке точки перегину графіка функції?
31. Як визначаються асимптоти графіка функції?
32. Як знаходиться найбільше і найменше значення функції на відрізку?
33. Що називається еластичністю функції, її властивості?
34. Як визначається оптимальний розв’язок задачі фірми?
35. Як визначається граничний прибуток, якщо відомі доход і витрати фірми?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Що можна сказати про співвідношення $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, або різницю двох нескінченно великих $(\alpha_n - \beta_n)$:

А	Б	В	Г
дорівнює нулю	дорівнює const	невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ та $(\infty - \infty)$	дорівнює ∞

2. Якщо С – стала, то $\lim\limits_{x \to x_0} C =$

А	Б	В	Г
1	С	0	∞

3. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо:

А	Б
$f(x)$ існує в точці x_0, а $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існує	$f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існують, але $f(x_0)\neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
В	**Г**
$f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існують, причому $f(x_0)= \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існують, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

4. Якщо границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ існують при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=$

А	Б
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	1
В	**Г**
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$g(x)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+ f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

5. Якщо $y = f(x)$ – неперервна на проміжку $[a, b]$, то:

А	Б	В	Г
$f(x)$ обмежена на проміжку $[a, b]$	$f(x)$ не обмежена на проміжку $[a, b]$	існує таке m, що $f(x) > m,\ \forall x \in [a, b]$	не існує такого M, що $f(x) < M,\ \forall x \in [a, b]$

6. Якщо границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ існують при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=$

А	Б
0	$\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$
В	**Г**
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$g(x)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+ f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

7. Що означає запис $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

А	Б	В	Г
відносний приріст функції	похідна функції *у* за змінною х	граничний приріст функції	відносний приріст аргументу

8. Похідну функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$ можна знайти:

А	Б	В	Г
як похідну степеневої функції	як похідну показникової функції	як суму похідних А та Б	за допомогою таблиці похідних

9. Закінчити формулу $\left(U \cdot V\right)' =$

А	Б	В	Г
$U' \cdot V'$	$U' + V'$	$U'V + UV'$	$U'V - UV'$

10. Якщо коефіцієнт еластичності $E_x(y) > 1$, тоді функція y буде:

А	Б	В	Г
нееластичною	еластичною	нейтральною	обмеженою

Практична частина:

11. Границя функції $\lim\limits_{x \to 3}(4x - 7)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	10	5	19

12. Границя функції $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x+5}{5x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
1/5	1	0	4/5

13. Границя функції $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
1/5	40	4/5	-40

14. Границя функції $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$-1/5$	4/5	2	-1

15. Границя функції $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$-1/5$	1	0	-1

16. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$1/5$	1	-1	$1/9$

17. Функція cos2x при $x\to\frac{\pi}{4}+0$:

А	Б	В	Г
нескінченно мала	нескінченно велика $(+\infty)$	нескінченно велика $(-\infty)$	не має границі

18. Вказати ті функції, похідні яких дорівнюють $8x$:

А	Б	В	Г
$y=(2x-4)^4$	$y=8x+5$	$y=4x^2+10$	$y=4(x-5)(x+10)$

19. Обчислити похідну функції $y=4\cos 2x$ в точці $x_0=-\frac{3}{4}\pi$:

А	Б	В	Г
8	-8	$4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$

20. Знайти похідну функції $y=tg^2 2x+1$:

А	Б	В	Г
$\dfrac{-2\sin 2x}{\cos^3 2x}$	$\dfrac{\sin 2x}{\cos^3 2x}$	$\dfrac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x}$	$\dfrac{4tg\,2x}{\cos^2 2x}$

21. Похідна функції $y=y(x)$, яка задана неявно рівнянням $x^2+y^2=\cos y$, дорівнює:

А	Б	В	Г
$\dfrac{2x}{2y-\sin y}$	$-\dfrac{2x}{2y+\sin y}$	$\dfrac{2x+2y}{\sin y}$	$\dfrac{2x+\sin y}{2y}$

22. Друга похідна функції $y=x\arcsin x$ у точці $x=0$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	2	-1	1

23. Функція $y = x^2 - 4x + 4$:

А	Б	В	Г
спадає на проміжку $(-\infty;2)$ і зростає - $(2;\infty)$	спадає на проміжку $(-\infty;-2)\cup(-2;2)$ і зростає - $(2;\infty)$	спадає на проміжку $(-\infty;-2)$ і зростає - $(-2;\infty)$	спадає на проміжку $(-\infty;2)$ і не зростає

24. Якщо m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції $y = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 20$ на відрізку $[-1;1]$, то їх сума $m + M$ дорівнює:

А	Б	В	Г
-3	7	10	4,5

25. Обчислити значення мінімуму функції $y = x^3 - 12x$:

А	Б	В	Г
$y(-2) = 16$	$y(2) = -16$	$y(\sqrt{2}) = 1$	має нескінченну множину розв'язків

9. Індивідуальні домашні завдання №3

Базовий рівень:

Завдання 1. Знайти границі вказаних функцій.

Завдання 2. Обчислити похідні вказаних функцій.

Підвищений рівень:

Завдання 3. Дослідити функції методами диференціального числення і побудувати їх графіки.

Поглиблений рівень:

Завдання 4. Залежність витрат деякого виробництва від обсягу продукції, що випускається, записується у вигляді $C = C(Q)$, функція попиту має вигляд $p = p(Q)$. Визначити обсяг продукції, що відповідає максимальному прибутку; ціну одиниці продукції у цьому випадку; величину максимального прибутку.

Варіанти завдань

Варіант 1

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 4}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$

2. 1. $y=e^{-\frac{x}{2}}\cdot tgx$ 2. $y=\left(5x-x^3\right)^6$

3. $y=\ln^3\left(x^2+1\right)$ 4. $y=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

5. $e^y+xy=e$ 6. $\begin{cases} x=arctgt \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 2. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{2-x}$

4. $C=Q^2-400Q+30000,\ p=-Q+200$

Варіант 2

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{6x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$

2. 1. $y=\sqrt{ctgx}+\sqrt{tgx}$ 2. $y=x^2\cdot 2^{3x}$

3. $y=\dfrac{x^2+1}{1-x^3}$ 4. $y=\ln^2\left(1-2x^3\right)$

5. $x^3y+2y^2x=1$ 6. $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t(1-\sin t) \end{cases}$

3. 1. $y=x^3\cdot e^{-x}$ 2. $y=\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

4. $C=Q^2-160Q+1600,\ p=800-Q$

Варіант 3

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$

2. 1. $y = 2x - arctg\,2x$ 2. $y = x\ln\left(3x - x^2\right)$

3. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$ 4. $y = e^{3x+5}\cos 3x$

5. $e^{x^2+y^2} = 3x - 4y^2$ 6. $\begin{cases} x = ctg\,4t \\ y = 5t + t^3 \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{x^2+4}{x+4}$ 2. $y = (1-x)e^x$

4. $C = 0{,}02Q^2 + 15Q + 800,\ p = 50 - 0{,}1Q$

Варіант 4

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3xtgx}{\sin^2 x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$

2. 1. $y = \left(4+x^2\right)arctg\,\dfrac{x}{2}$ 2. $y = \dfrac{1}{4}tg\,4x - \ln\cos 4x$

3. $y = \left(x - x^2\right)e^{-3x}$ 4. $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$

5. $x\sin y = e^x + y^2$ 6. $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{x}{x^2+x-2}$ 2. $y = x - \ln\left(x^2+1\right)$

4. $C = 4Q^2 - 40Q + 400,\ p = 200 - 2Q$

Варіант 5

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xtgx}{1-\cos x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$

2. 1. $y = x^3 arctgx^3$ 2. $y = \ln^2\left(x - \cos x\right)$

3. $y = \dfrac{1}{2}\sin 2^x$ 4. $y = \dfrac{\cos 3x}{1-\sin 3x}$

5. $x^3+y^3=tgy-2x$ 6. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$ 2. $y=\sqrt[3]{1-x^2}$

4. $C=Q^2-100Q+16000,\ p=400-Q$

Варіант 6

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$ 2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+8}{2x^2+5x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{7x-5}$

2. 1. $y=\sqrt[3]{\left(2x-x^3\right)^5}$ 2. $y=e^{-2x}\cos 3x$

3. $y=\sqrt{1-2x}$ 4. $y=\left(9x^2+1\right)arctg\,3x$

5. $\sin(2x+y)=10+xy$ 6. $\begin{cases} x=t^2e^{-t} \\ y=te^{-t^2} \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ 2. $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

4. $C=\dfrac{Q^2-6Q+13}{Q-3},\ p=25-2Q$

Варіант 7

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$

2. 1. $y=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{10}$ 2. $y=e^{\sin^2 x}-\ln\sin x$

3. $y=\cos 2x\sin\dfrac{x}{2}$ 4. $y=\ln(\arcsin 5x)$

5. $\dfrac{x}{y}+e^{x+y}=16$ 6. $\begin{cases} y=t\ln(t+1) \\ x=t\cdot e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$

3. 1. $y=\frac{x^2-1}{x^2+2}$ 2. $y=\frac{x}{\ln x}$

4. $C=0{,}21Q^3-42Q^2+700Q,\ p=200-Q$

Варіант 8

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{8x^2}{\sin^2 5x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$

2. 1. $y=e^{-x}tg3x$ 2. $y=(3-2\cos x)^7$

3. $y=e^{arctg\frac{x}{2}}+3x^2+3$ 4. $y=\frac{x^2-7}{x^2+3x+1}$

5. $e^{-xy}=x^2+2y^2$ 6. $\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$

3. 1. $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 2. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

4. $C=2Q^3-800Q^2+8400Q+1700,\ p=400-Q$

Варіант 9

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2 3x}{10x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$

2. 1. $y=\frac{1-\cos 2x}{1-\sin 3x}$ 2. $y=arctg\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

3. $y=\cos 2x\sin\frac{x}{4}$ 4. $y=\ln\sqrt{4-x^2}$

5. $\cos(x+y)=2x-3y$ 6. $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^3\end{cases}$

3. 1. $y=\frac{x^2+5}{x+2}$ 2. $y=x\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

4. $C=2Q^2-800Q+30000,\ p=400-Q$

Варіант 10

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}x^2ctg^2 3x$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$

2. 1. $y=\sqrt{3+\sin 5x}$ 2. $y=e^{\arcsin x}$

3. $y=x^3\ln 3x$ 4. $y=\dfrac{1-2x}{3x}$

5. $\cos(x+y)=7+xy$ 6. $\begin{cases} x=tgt \\ y=\sin^2 t \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{8}{x^2-4}$ 2. $y=x-\ln(x+1)$

4. $C=2Q^2-320Q+1600,\ p=800-Q$

Варіант 11

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8}{5+8x^2-x^4}$ 2. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+19x+6}{x^2-36}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 8x}{\sin 2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x-1}\right)^{x+1}$

2. 1. $y=\dfrac{1}{arctg 5x}$ 2. $y=(x^2-1)e^{3x}$

3. $y=\ln^3(1+2x^4)$ 4. $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

5. $\ln(x-y)=x^2y^2$ 6. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t^2 \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ 2. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$

4. $C=0{,}01Q^2+7Q+800,\ p=25-0{,}05Q$

Варіант 12

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-2x^3}$ 2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{6x^2+38x-80}{72-87x-12x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x^2}{\sin 5x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2+2x-1}\right)^{2x}$

2. 1. $y=\sqrt{ctg\,5x-x}$ 2. $y=\frac{x^2+1}{x^3-1}$

3. $y=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+\frac{2}{\sqrt{x}}$ 4. $y=arctg\,\frac{x}{3}-\cos^2 x$

5. $x^3y+2y^2x=1$ 6. $\begin{cases} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t \end{cases}$

3. 1. $y=\ln\left(x^2-9\right)$ 2. $y=x^2\cdot e^{-x}$

4. $C=2Q^2-20Q+200,\ p=100-Q$

Варіант 13

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x-5x^2}{6x^2+4x+7}$ 2. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2-4x-45}{81-x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4-\sqrt{x+16}}{x^2}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x\,tg\,3x}{\sin^2 4x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x+4}\right)^{2x+1}$

2. 1. $y=5^{2x^2+3x+4}+\frac{1}{x^2}$ 2. $y=\left(5x-x^3\right)^6$

3. $y=\sqrt{x+ctgx}$ 4. $y=\frac{e^{-\sin x}}{tg\left(7x^6\right)}$

5. $\sqrt{1-xy}=e^{2x}+y^2$ 6. $\begin{cases} x=e^{t-t^2} \\ y=t\cdot e^{t} \end{cases}$

3. 1. $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$ 2. $y=x+\frac{\ln x}{x}$

4. $C=2Q^2-200Q+1600,\ p=800-2Q$

Варіант 14

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-6x+3}{x^3-2x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+8x-5}{8x^2+24x-14}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{1-\sqrt{x^2+6x+10}}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 6x}{9x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{11x+3}{11x-1}\right)^{7x+6}$

2. 1. $y=\sqrt{ctgx}-\sqrt{tgx}$ 2. $y=\sin\left(2^{x}\right)$

3. $y=\arccos^{4}x\cdot\ln\left(x^{2}+x-1\right)$ 4. $y=\dfrac{x^{2}-5}{x+2}$

5. $xy-6=\cos y$ 6. $\begin{cases} x=\ln^{2}t \\ y=t+\ln t \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^{2}-2x+2}{x-1}$ 2. $y=x-\ln\left(x^{2}+1\right)$

4. $C=\dfrac{Q^{2}-6Q+13}{Q-2}$, $p=26-2Q$

Варіант 15

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-12x-14x^{2}}{8x^{2}+4x+5}$ 2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^{2}+9x+9}{12x^{3}+21x^{2}-45x}$

3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5+x^{2}}-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5xtg\,2x}{\sin^{2}x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{3}-3x^{2}+2}{x^{3}-3x-4}\right)^{-x}$

2. 1. $y=\cos2x\sin4x$ 2. $y=\sqrt{x+ctgx}$

3. $y=\sin^{2}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$ 4. $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^{2}-2x+1}{x^{2}+2x+1}$

5. $y\sqrt{y}=e^{x^{3}}\cdot e^{y^{2}}$ 6. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^{3}+4}{x^{2}}$ 2. $y=\dfrac{e^{2x+2}}{2x+2}$

4. $C=0{,}03Q^{3}-16Q^{2}+100Q,\ p=200-Q$

Варіант 16

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{4}-1}{(2x+1)(3x-7)}$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2x^{2}}{3x^{2}-x}$

3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^{2}}-\sqrt{7+2x-x^{2}}}{x^{2}-2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1+tgx}{2+\cos2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-8}\right)^{x+2}$

2. 1. $y=\sin^{3}2x\cdot\cos8x^{5}$ 2. $y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{\left(2x^{2}-3x+1\right)^{5}}$

3. $y=\frac{2x^3-x-1}{3\sqrt{4x+2}}$ 4. $y=arcctg^2 5x\ln(x-4)$

5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 5. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=2t^2+1 \end{cases}$

3. 1. $y=2x^4-x^2+1$ 2. $y=\frac{12x}{9+x^2}$

4. $C=Q^3-450Q^2+42000Q+1700,\ p=600-Q$

Варіант 17

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{6x^2-43x+7}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+4x})$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2+5x-6}\right)^{2x^2-1}$

2. 1. $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$ 2. $y=\frac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$

3. $y=\ln\frac{x^2-3}{x^2+3}$ 4. $y=arctg\frac{\sqrt{2tgx}}{1-tgx}$

5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7}$ 5. $\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$

3. 1. $y=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+1$ 2. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

4. $C=Q^2-800Q+80000,\ p=200-Q$

Варіант 18

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-3}{x^3-8x+5}$ 2. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$ 4. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{9-x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^{x-2}$

2. 1. $y=e^{x^2}\cdot\cos 2x$ 2. $y=(x+2)^7\arccos\sqrt{x}$

3. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-4}{x^2+2}$ 4. $y=3^{\sqrt{x^2-4x+1}}+\frac{1}{x^2}$

5. $tgy = 4y - 5x$ 6. $\begin{cases} x = 3\sin t - t\cos t \\ y = 3\cos t + t\sin t \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$ 2. $y = x^2 \cdot e^{-2x}$

4. $C = Q^2 - 500Q + 30000,\ p = 400 - Q$

Варіант 19

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-1}{x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{5 - \sqrt{2x+25}}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

2. 1. $y = e^{-x}\cos x$ 2. $y = \ln\dfrac{5x-7}{3x+3}$

3. $y = \cos^3 4x \cdot arcctg\sqrt{x}$ 4. $y = e^{arctg\sqrt{x}}$

5. $x^3 + y^3 = 5x$ 6. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{e^{3-x}}{3-x}$ 2. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

4. $C = 2Q^2 - 160Q + 1700,\ p = 900 - Q$

Варіант 20

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 1}{2x - 7}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^3 + x^2 - 12x}$

3. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ 4. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{x(1 - tgx)}{2\cos 2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + \sin x}$

2. 1. $y = \sqrt{(x-3)^5} - \dfrac{7}{7x^2 - 3x + 5}$ 2. $y = 3^{\cos x} \cdot \arcsin^2 3x$

3. $y = e^{\frac{x^2-4}{x^2+1}}$ 4. $3x + \sin y = 5y$

5. $y = \log_2(x+3) \cdot \arccos x^2$ 6. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t \end{cases}$

3. 1. $y = 2\ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right) - 3$ 2. $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$

4. $C = 0{,}01Q^2 + 16Q + 900,\ p = 60 - 0{,}1Q$

Варіант 21

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 90x^2 + 10}{25x^3 + 13x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^3 + x^2 - 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{\sin 4x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\pi} (1 + 2tgx)^{ctgx}$

2. 1. $y = 7^{x^5} \cdot \arccos 2x^5 - 4$

2. $y = \dfrac{4x}{(x+5)^3} - \sqrt[3]{(3x^2 - \sin x + 1)^4}$ 3. $y = \ln \dfrac{x^2}{x^2 - 3x} + tgx$

4. $y = arctg \dfrac{\sqrt{2tgx}}{1 - tg^2 x}$ 5. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y} = \sqrt{7}xy$

6. $\begin{cases} x = 2\cos t \cdot e^{2t} \\ y = 3\sin^2 t + e^{3t} \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ 2. $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$

4. $C = 8Q^2 - 40Q + 400,\ p = 400 - 2Q$

Варіант 22

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x}{x^2 + 5}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 7x}$

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ 4. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-5x}$

2. 1. $y = 3^{x^2}(\arccos x^5 + \ln x)$

2. $y = \dfrac{4-2x^3}{(x+2)^3} - \sqrt{(x^2 - \cos x + 11)^3}$ 3. $y = \sin \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

4. $y = tg\left(\dfrac{\sqrt{2tgx}}{1 + tgx}\right) + \arcsin^4 x$

5. $\sqrt{x \ln y} + y \cdot e^{xy} = x + y$ 6. $\begin{cases} x = 2tg^2 t \\ y = 3t - \sin t \cos t \end{cases}$

3. 1. $y=-\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$ 2. $y=\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$

4. $C=2Q^2+50Q+15000,\ p=500-Q$

Варіант 23

1. 1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-9}}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin3x}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{1-\sqrt{1+tgx}}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

2. 1. $y=x^2\cdot\cos2x^5$

2. $y=\dfrac{x-1}{(x+7)^2}-\sqrt[4]{\left(-x^2-2x+1\right)^3}$ 3. $y=\cos\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-x\right)$

4. $y=\ln\dfrac{\sqrt{2tgx}}{1-tgx}$ 5. $x^3y^2+\sqrt{y}\sin(xy)=1$

6. $\begin{cases}x=2+\cos^2t\\ y=3-5\sin^2t\end{cases}$

3. 1. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+3)^2}$ 2. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$

4. $C=0{,}3Q^3-20Q^2+400Q,\ p=550-Q$

Варіант 24

1. 1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+5x-36}{x^2-16}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-10x-1}{x+x^5}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3-\sqrt{x+9}}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$

2. 1. $y=(x-2)^{\sin x}$ 2. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}-\sqrt[3]{\left(x^4-x\right)^4}$

3. $y=\ln\dfrac{x^2\ln x}{x^2+3}$ 4. $y=arctg\dfrac{\sqrt{2+tgx}}{1-tg^2x}$

5. $\sqrt{x+\cos y}+\sqrt{y-\sin x}=2xy$ 6. $\begin{cases}x=2\cos t-e^{3t}\\ y=3\sin t+e^{2t}\end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$ 2. $y=\ln\left(\dfrac{x+6}{x}\right)-1$

4. $C=2Q^3-700Q^2+41000Q+1700,\ p=600-Q$

Варіант 25

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x}{7x^4+2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x-5}\right)^{4x}$

2. 1. $y=\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-3x}$ 2. $y=(x+ctgx)^{\ln x}$

3. $y=5^{tgx}\cdot\cos^2 x$ 4. $y=\arccos\dfrac{\sqrt{2\sin x}}{1-\sin x}$

5. $(xy)^3-\sqrt{x+y}\cdot tg(x+y)=0$ 6. $\begin{cases} x=3ctg^3 t\\ y=3+\sin 2t\end{cases}$

3. 1. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$ 2. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

4. $C=2Q^2-700Q+25000,\ p=600-Q$

Варіант 26

1. 1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x-2}$

2. 1. $y=x^{10}+\arccos 2x^5$ 2. $y=\dfrac{4x^3}{(x-7)^3}-\sqrt[5]{(-3x^2+x-1)^4}$

3. $y=ctg\,\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$ 4. $y=\dfrac{\sqrt{2\cos x}-\ln x}{1-tg^2 x}$

5. $\cos(x^2+y^2)+\sqrt{y}=\sqrt{x}$ 6. $\begin{cases} x=\cos^2 t\cdot e^{\sin t}\\ y=\dfrac{\sin^2 t}{e^{\cos t}}\end{cases}$

3. 1. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$ 2. $y=x^3\cdot e^{-x}$

4. $C = 3Q^2 - 12000Q + 25000,\ p = 800 - Q$

Варіант 27

1. 1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 3x - 1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^5 + 9x}{2x^5 - 1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x} - 2}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} 5x ctg 3x$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{2x+1}$

2. 1. $y = \dfrac{x}{x+1} - \sqrt{\sin x}$ 2. $y = (\cos x)^{x^2}$

3. $y = \arcsin^3 x \cdot \ln \dfrac{1}{x}$ 4. $y = e^{\frac{x - tgx}{arctgx}}$

5. $(x + \cos y)^2 - (y - \sin x)^2 = xy$ 6. $\begin{cases} x = e^{2t} \sin 3t \\ y = \ln t \cdot \cos t \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ 2. $y = \dfrac{1}{5} x^4 - 2x^2 + 5$

4. $C = 2Q^2 - 320Q + 1600,\ p = 900 - Q$

Варіант 28

1. 1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4 + 2}{x^4 + 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+3}{5x+1}\right)^{5x+1}$

2. 1. $y = e^{-x} + \cos x \cdot \sin 2x$ 2. $y = (tgx)^{x^2+3}$

3. $y = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ 4. $y = \ln^3(arctg 7x)$

5. $\dfrac{x}{y+1} - e^{\frac{x+y}{x}} = \dfrac{x+y}{x}$ 6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin t} \\ y = \dfrac{e^t}{\cos t} \end{cases}$

3. 1. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$ 2. $y = \dfrac{2x}{\ln x}$

4. $C = 4Q^2 - 1600Q + 35000,\ p = 700 - Q$

Варіант 29

1. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2-x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{3x+4}$

2. 1. $y=e^{x+3}\cdot ctgx$ 2. $y=\dfrac{x^3+\sin x}{x^3-\cos x}$

3. $y=\ln^4(1+2arctgx)$ 4. $y=\sqrt[3]{\left(1-x^2-x^4\right)^5}$

5. $ctg\left(x^2+y^2\right)=\left(x^2+y^2\right)tgx^2$ 6. $\begin{cases} x=arcctg\,\dfrac{t}{2} \\ y=t+ctgt \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 2. $y=x^3\cdot e^{-2x}$

4. $C=3Q^2-420Q+1800,\ p=900-Q$

Варіант 30

1. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^{x+2}$

2. 1. $y=\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{50}$ 2. $y=e^{\cos^2 x}-\ln\cos x$

3. $y=tg2x\cdot ctg\,\dfrac{x}{3}$ 4. $y=\dfrac{x^2-2x+7}{x^2-x+7}$

5. $e^{xy}=x^2+y^2-2xy$ 6. $\begin{cases} x=e^{2t}\sin 2t \\ y=e^{-2t}\cos 2t \end{cases}$

3. 1. $y=\dfrac{x}{x^2+x-2}$ 2. $y=2x-\dfrac{\ln x}{x}$

4. $C=0{,}01Q^2+17Q+900,\ p=900-Q$

10. Методичні вказівки до виконання творчої роботи №2 на тему «Побудова графіків функцій засобами GRAN1»

Творча робота передбачає самостійне виконання завдань з вищої математики з використанням комп'ютерного програмного засобу GRAN1. Один варіант завдання виконується мікрогрупою студентів, що складається з 4-5 осіб.

Введення даних та побудова графіків функцій в GRAN1

Перш ніж вводити вирази чи таблиці, що характеризують деяку залежність між змінними, необхідно вказати тип задання залежності у вікні «Список об'єктів» (на екрані вгорі праворуч, рис. 3.1). Для цього слід перейти у дане вікно. Це можна зробити за допомогою «мишки», натиснувши ліву клавішу «мишки», коли її курсор знаходиться в області вікна, або обравши пункт меню «Об'єкт/Список об'єктів».

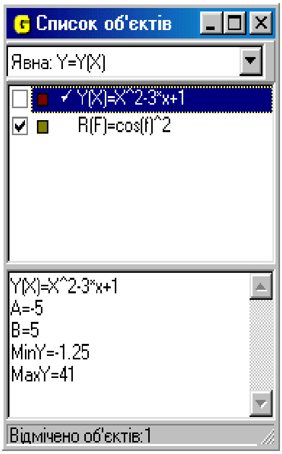


Рис. 3.1

Саме вікно складається з трьох частин (рис. 1). В верхній частині вікна знаходиться список восьми можливих типів залежностей:

Явна: $Y = Y(X)$ – залежність між змінними x і y задана у вигляді $y = y(x)$, де $y(x)$ деякий вираз від змінної x (явне задання залежності);

Параметрична: $Y = Y(T)$, $X = X(T)$ – залежність між змінними x і y задана через параметр t : $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, де $\varphi(t)$, $\phi(t)$ – деякі вирази від змінної (параметра) t (параметричне задання залежності);

Полярна: $R = R(F)$ – залежність задана в полярних координатах у вигляді $r = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – вираз від змінної φ, r – полярний радіус точки на площині, φ – полярний кут (відкладається від полярної осі до полярного радіуса проти годинникової стрілки), причому зв'язок між полярними і відповідними декартовими координатами x і y можна визначити, виходячи з формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

Неявна: $0 = G(X,Y)$ – залежність між змінними x і y задана неявно у вигляді $G(x, y) = 0$, де $G(x, y)$ – деякий вираз від змінних x і y (неявне задання залежності);

Таблична: $Xi, Y(Xi)$ – залежність задана таблично (при цьому програмою будується поліном наперед вказаного степеня не вище 7, який найкраще в розумінні середнього квадратичного відхилення наближає таблично задану залежність);

Статистична вибірка – задається та досліджується статистична вибірка;

Ламана – залежність між змінними x і y визначається ламаною лінією.

Коло – задається коло.

Обрати тип об’єкта можна за допомогою маніпулятора “мишка”, розкривши список, або за допомогою клавіш управління курсором, встановивши клавішею *Tab* фокус на списку, що розкривається.

Вказаний останнім тип задання залежності фіксується, а всі залежності, що вводяться заново, будуть мати такий тип задання доти, поки він не буде змінений.

Якщо ніякий тип не вказано, то за замовчуванням автоматично встановлюється тип $y = y(x)$.

Усі залежності, що вводяться, можуть бути будь-якого з перелічених типів задання в довільних поєднаннях.

В другій частині вікна “Список об’єктів” знаходиться список всіх введених об’єктів. Розрізняють поняття *біжучого* об’єкту та *відміченого* об’єкту. Біжучим є об’єкт, на якому знаходиться курсор. Відмічений об’єкт позначається перемикачем ☑. Ввімкнути або вимкнути перемикач можна за допомогою “мишки” або клавіші “Пропуск” клавіатури.

Для кожного об’єкту вказаний його тип і колір графіка залежності, що відповідає цьому об’єкту. На рис. 3.1 біжучим є перший з двох об’єктів – явно задана залежність, а відмічений – другий – залежність, що задана в полярних координатах.

При побудові графіків залежностей графіки будуються лише для відмічених об’єктів. Якщо відмічених об’єктів немає, будується графік біжучого об’єкту.

При необхідності раніше введену залежність можна змінити, використовуючи послугу “Об’єкт/Змінити...”. При цьому програма автоматично контролює, щоб тип задання нової залежності був той же, що й у замінюваної. Тут же можна змінити раніше вказані межі відрізка, на якому задана залежність між змінними. Якщо ж необхідно змінити не тільки вираз залежності, але і тип задання залежності, раніше введену залежність слід вилучити, для чого призначена послуга “Об’єкт/Вилучити”. Вилучаються всі відмічені об’єкти. За допомогою послуги “Об’єкт/Вилучити останній” можна вилучити останній об’єкт із списку, незалежно від того, які об’єкти відмічені.

В цій частині вікна можна викликати контекстне меню, шляхом натиснення на праву кнопку “мишки”. Більшість пунктів цього меню співпадає з послугами пункту “Об’єкт” головного меню. Однак крім того є ще два пункти: “Відмітити все”, за допомогою якого можна відмітити всі об’єкти у вікні, та “Зняти відмітки” – знімає відмітки із всіх об’єктів у вікні.

В третій частині вікна знаходяться відомості про біжучий об’єкт. Наприклад, для функції, заданої в декартових координатах це відрізок, на якому задана функція, максимальне та мінімальне значення функції на даному відрізку.

Ці відомості можна продивитись, використовуючи полоси прокрутки у вікні або клавіші управління курсором. Оскільки відповіді, що подані у вікні, – це звичайний текст, то використовуючи “мишку” або клавіші управління курсором, можна відмітити весь текст або його частину, а потім занести в буфер обміну для використання в інших програмах.

Робота з буфером обміну може відбуватись через головне меню (пункт “Виправлення”), контекстне меню або з клавіатури. Доступні такі послуги:

- *Вирізати*. Текст буде занесено до буфера обміну з одночасним вилученням із вікна (комбінація клавіш “CTRL+X” клавіатури);
- *Копіювати*. Текст буде занесено до буфера обміну (комбінація клавіш “CTRL+C” клавіатури);
- *Вставити*. Застосовується при необхідності вставити текст із буфера обміну (комбінація клавіш “CTRL+V” клавіатури);
- *Вилучити*. Вилучає виділений текст (клавіша “DEL” клавіатури);
- *Виділити все*. Виділяє весь текст у вікні.

Використовувати буфер обміну можна і для перенесення одержаних за допомогою програми графіків. Для цього біжучим повинно бути вікно “Графік”. За допомогою послуги “Виправлення/Копіювати” зображення з вікна заноситься до буфера обміну.

При зверненні до послуг, що пов’язані з введенням нових даних або із зміною тих, що були введені раніше, в допоміжному вікні, яке відповідає виконуваній дії, з’являється панель введення даних одного з двох можливих типів.

Перший тип використовується в тих випадках, коли потрібно ввести вираз, що містить числа, змінні, функції та арифметичні знаки (рис. 3.2), наприклад при зверненні до послуг “Об’єкт/Створити” при створенні функціональних залежностей, “Операції/Калькулятор” та інших.

Другий тип використовується для введення виключно числових даних (рис. 3.3), наприклад, при зверненні до послуг “Об’єкт/Створити” при створенні статистичної вибірки або ламаної, “Операції/Інтеграли/Інтеграл...”, “Графік/Параметри вікна “Графік”” та інших.

Для використання панелі введення даних курсор повинен бути встановлений в рядку введення даних. Переміщувати курсор можна за допомогою маніпулятора “мишка” або клавішею *Tab* клавіатури.

На початку рядка введення в залежності від типу даних, що вводяться, можуть з’являтися різні надписи, наприклад:

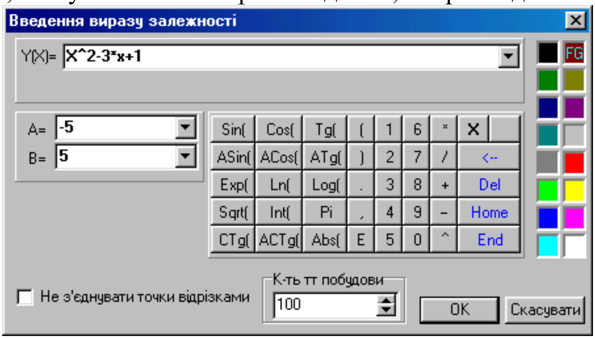


Рис. 3.2

$Y(X)=X$ – при введенні виразу $f(x)$ при явному заданні залежності $y=f(x)$;

$0=X$ – при введенні виразу $G(x,y)$, аргументами якого є змінні x і y;

$MinX$, $MaxX$, $MinY$, $MaxY$ – при введенні масштабу користувача (вказуванні граничних меж вздовж осі Ox та осі Oy, в яких будуть подані графічні зображення);

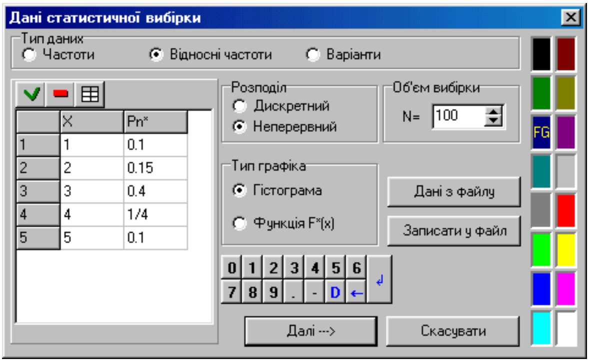


Рис. 3.3

$A = -5$, $B = 5$ – при введенні меж відрізка, на якому буде розглядатися залежність;

Вираз: – при введенні виразу, значення якого необхідно обчислити при зверненні до послуги “Операції/Калькулятор” та ін.

При цьому в рядку введення можуть бути представлені значення змінних величин або вирази, передбачені в програмі або введені раніше. Якщо нема необхідності змінювати ці значення або вирази, достатньо натиснути на клавіатурі клавішу *Enter* або встановити курсор “мишки” на панелі введення даних на кнопку “OK” та натиснути ліву клавішу “мишки”. Після цього відповідний вираз, межі зміни аргументу та деякі додаткові характеристики, що залежать від типу об’єкта, з’являються у вікні “Список об’єктів” (рис. 3.1).

Введення нових даних може здійснюватися за допомогою клавіатури та за допомогою “мишки”.

За допомогою клавіатури всі необхідні символи вводяться як звичайно – слід набрати потрібну послідовність символів. Числові значення і вирази записуються за правилами, близькими до прийнятих в найбільш поширених мовах програмування (*BASIC*, *Pascal* і ін.). Усі допустимі позначення функцій і операцій показані на панелі введення даних (рис. 3.2).

При записуванні числових значень дробова частина, якщо вона є, відокремлюється від цілої крапкою. Арифметичні операції позначаються знаками:

+ – додавання, – – віднімання, * – множення, / – ділення, ^ – піднесення до степеня.

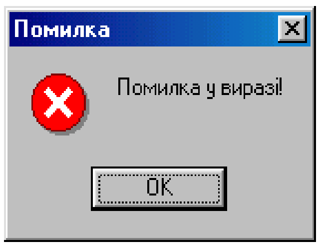


Рис. 3.4

Пріоритети (порядок виконання)

операцій загальноприйняті. Бажаний порядок операцій може бути вказаний за допомогою дужок. Вираз, поданий в дужках, розглядається як єдине ціле і обчислюється в першу чергу. Всередині дужок можуть бути інші вирази, подані також в дужках. При цьому кожній відкриваючій (лівій) дужці повинна відповідати закриваюча (права) дужка.

До виразів можуть бути включені також позначення (які розглядаються як неподільні символи) деяких функцій. Всі вони подані на панелі введення даних (рис. 3.2):
Sin– *sin* (синус), *Cos*– *cos* (косинус), *Tg*– *tg* (тангенс),*Ctg*– *ctg* (котангенс), *Asin*– *arcsin* (арксинус), *Acos*– *arccos* (арккосинус),*Atg*– *arctg* (арктангенс), *Actg* – *arcctg* (арккотангенс), *Exp*– експонента (e^x),*Log*– логарифм за довільною основою (основа та аргумент логарифму вказуються в дужках через кому. Наприклад, $Log(x, x+3)$ означає $\log_x(x+3)$), *Ln*– логарифм натуральний (за основою e), *Abs*– абсолютна величина, *Int*–ціла частина аргументу, *Sqrt* – корінь квадратний, *Pi* – число π (= 3.141592654).

На панелі введення даних також можуть бути наявні декілька кнопок, які відповідають наступним клавішам управління курсором:

← – *Back Space* (вилучення символу ліворуч від курсора),
Del (*D*) – *Delete* (вилучення символу праворуч від курсора),
Home – *Home* (переміщення курсора на початок ряду),
End – *End* (переміщення курсора в кінець рядка),
↵ – *Enter* (введення значення та перенесення курсора).

Якщо при введенні допущена помилка в одному з рядків введення, то виводиться відповідне повідомлення (рис. 3.4), після чого курсор переміщується в той рядок, який містить неправильний вираз. Цей вираз необхідно відредагувати (внести зміни), використовуючи звичайні засоби редагування:

- при необхідності вилучити символ ліворуч від курсора використовується клавіша *Back Space*; при вилученні символу всі інші, розташовані правіше від курсора, і сам курсор зміщується вліво на одну позицію;
- при необхідності вилучити символ у позиції, де розташований курсор, використовується клавіша *Delete*;
- при необхідності вставити символ у позицію, де розташований курсор, досить натиснути на клавіатурі відповідну клавішу; при цьому символи, розташовані в позиції курсора і правіше, зміщуються на одну позицію вправо (у програмі не передбачено скасування режиму вставляння символів у рядку введення);

- при необхідності переміщувати курсор вздовж рядка введення можна за допомогою клавіш управління курсором (“$\leftarrow$”, ”$\rightarrow$”).

Після того, як значення чи вираз набрано з клавіатури чи відредаговано, слід натиснути клавішу *Enter* або відповідну кнопку в допоміжному вікні. Це буде означати, що щойно набраний чи відредагований вираз введено до запам’ятовуючого пристрою комп’ютера і з відповідним об’єктом можна продовжувати роботу (будувати графік, виконувати раніше обрану операцію і т.д.).

За допомогою “мишки” дані вводяться з використанням панелі введення даних. Курсор “мишки” встановлюється на потрібний символ на панелі введення даних і натискається ліва клавіша “мишки”, після чого зазначений символ з’являється в рядку введення. Після того, як всі необхідні символи введені, слід натиснути кнопку “ОК”, тобто курсор “мишки” встановити на кнопку “ОК” і далі натиснути ліву клавішу “мишки”.

При необхідності відредагувати послідовність символів у рядку введення слід за допомогою “мишки” вказати потрібну позицію, після чого з’являється вказівник позицій у рядку введення в позиції, вказаній за допомогою курсора “мишки”. Якщо на зазначене місце потрібно вставити новий символ, за допомогою “мишки” слід вказати відповідний символ на панелі калькулятора. Якщо символ потрібно вилучити, слід вказати на пункт “$\leftarrow$” або “*Del*” на панелі введення даних. Щоб відмовитися від послуги (чи припинити її виконання) і перейти до головного меню, досить натиснути кнопку “Скасувати” чи на клавіатурі клавішу *Esc*.

*Приклади побудови графіків функцій в **GRAN1***

Приклад 1. Необхідно побудувати графік функції $y = x^2 - 3$ на деякому відрізку задання.

Алгоритм розв’язування

1. Встановлюємо у вікні “Список об’єктів” тип залежності “Явна: Y=Y(X)”. Потім звертаємося до послуги “Об’єкт/Створити...”. В результаті з’явиться допоміжне вікно “Введення виразу залежності” (рис. 3.2). Вводимо вираз x^$2-3$ в рядку “Y(X)=”.
2. В рядку “A=” вводимо значення лівої межі відрізка задання функції “$-1-P1$”, а в рядку “B=” вводимо значення правої межі відрізка задання “$-1+P1$”. В подальшому через значення динамічних параметрів $P1$ та $P2$ будуть визначатися межі відрізка, на якому будується графік функції. Колір і кількість точок побудови графіка залишимо заданими за замовчуванням, товщину лінії вказуємо 2 і натискаємо кнопку “ОК”.

3. В результаті у вікні “Список об’єктів” одержуємо: новий об’єкт $Y(X) = x\wedge2 - 3$. Встановлюємо значення динамічних параметрів $P1 = 1.7$, $P2 = 0.4$, що відповідатиме відрізку задання [–2.7, 1.4]. У нижній частині цього вікна подані деякі характеристики залежності при вказаних значеннях параметрів: $A = -2.7$, $B = 1.4$, $MinY = -3$, $MaxY = 4.29$.
4. Звертаємося до послуги головного меню “Графік / Побудувати”. В результаті у вікні “Графік” буде побудовано графік залежності $y = x^2 - 3$ на відрізку [–2.7, 1.4] (рис. 3.5).

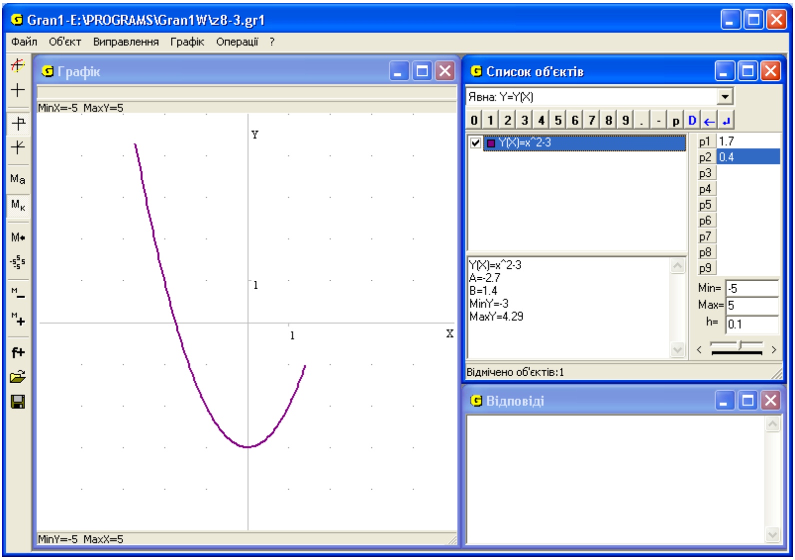


Рис. 3.5.

Якщо очистити вікно “Графік”, скориставшись послугою Графік / Очистити, а потім звернутись до послуги Графік / Побудувати, то будуть побудовані графіки залежностей, при введенні виразів яких було встановлено мітку  проти напису Будувати графік. Зняти таку мітку або встановити в разі її відсутності можна, скориставшись контекстним меню, попередньо встановити вказівник у вікні “Список об’єктів” на потрібний об’єкт.

Приклад 2. Рівняння виду $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ є рівнянням еліпса з центром симетрії в початку координат і півосями a і b вздовж осей Ox і Oy.

На рис. 3.6 подані зображення еліпсів $\frac{x^2}{P1^2} + \frac{y^2}{P2^2} - 1 = 0$ при різних значеннях параметрів $P1$ і $P2$ (функція задається як неявна).

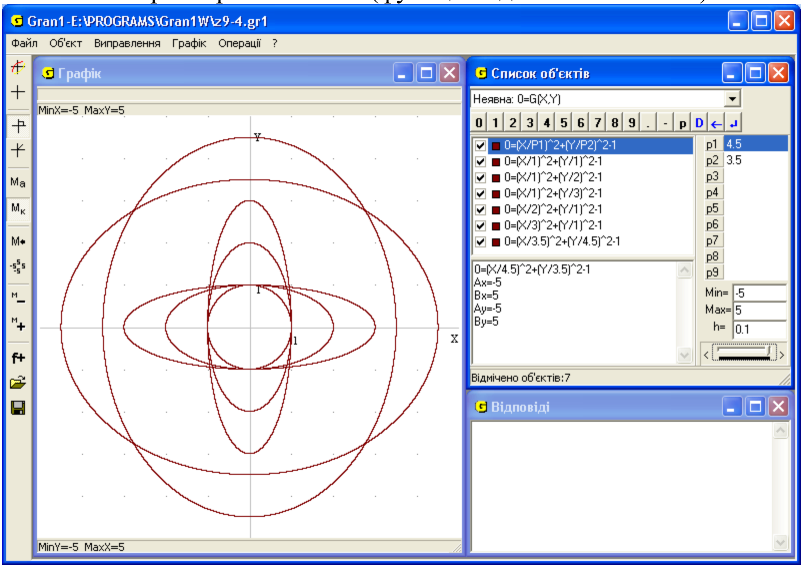


Рис. 3.6.

Щоб за допомогою послуг програми GRAN1 побудувати графік залежності між змінними x і y, заданої через параметр t у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, потрібно вказати у вікні “Список об’єктів” тип задання залежності “Параметрична: Y=Y(T), X=X(T)”. При зверненні до послуги створення нового об’єкту з’являється допоміжне вікно “Введення виразу залежності” (рис. 3.7). В рядку “X(T)=” потрібно ввести вираз для $x(t)$, відповідно в рядку “Y(T)=” – вираз для $y(t)$. У рядках “A=” і “B=” необхідно вказати відповідно нижню і верхню межі зміни параметра t (рис. 3.7).

Всі правила, що стосуються графічних побудов, залишаються такими ж, як і раніше.

Приклад 3. Рівняння $x = P1\cos t$, $y = P1\sin t$ при зміні параметра t в межах $[0;2\pi]$ визначають коло радіуса $P1$ з центром в початку координат. Справді $x^2 + y^2 = P1^2\cos^2 t + P1^2\sin^2 y = P1^2$. Для різних значень $P1$ відповідні зображення подані на рис. 3.7.

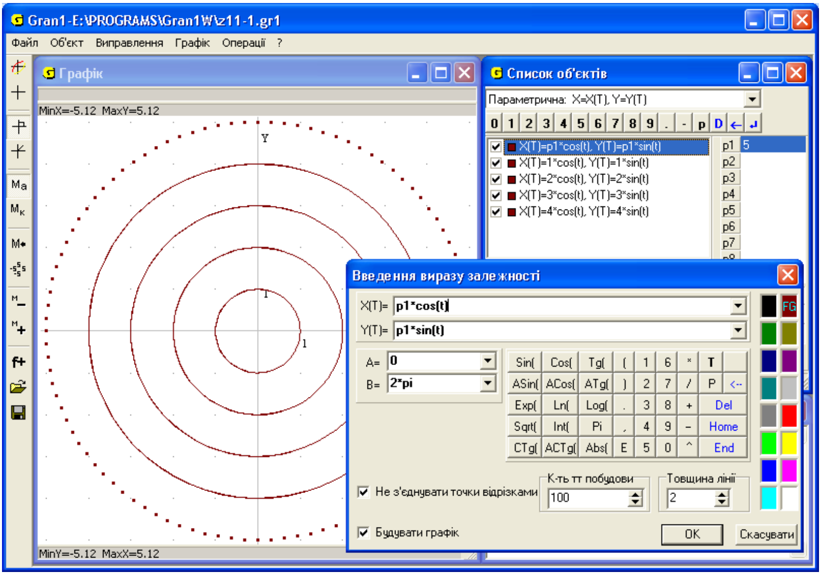


Рис. 3.7.

Щоб за допомогою програми GRAN1 побудувати графік залежності $r = \rho(\varphi)$ між полярними координатами r і φ, потрібно встановити у вікні “Список об’єктів” тип задання залежності “Полярна: R=R(F)” (рис. 3.8). При зверненні до послуги створення об’єкту з’являється вікно “Введення виразу залежності”. У рядку “R(F)=” потрібно ввести вираз $\rho(\varphi)$. В рядках “A=” і “B=” необхідно вказати відповідно нижню і верхню межі проміжку, на якому змінюється змінна φ (за замовчуванням вони рівні 0 і 2π).

Далі, використовуючи послуги пункту “Графік” (і інших пунктів), можна виконувати всі передбачені в програмі графічні операції, що стосуються розглянутої залежності між змінними r і φ.

Приклад 4. Графіком залежності $r = a\varphi$, ($a = const$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$), буде спіраль Архімеда (рис. 3.8); залежності $r = \dfrac{a}{\varphi}$, ($a = const$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$ – гіперболічна спіраль (рис. 3.9).

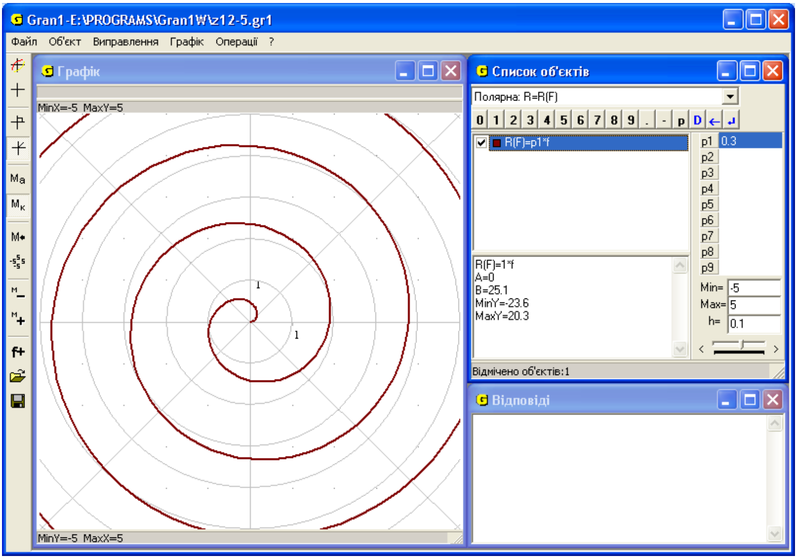


Рис. 3.8.

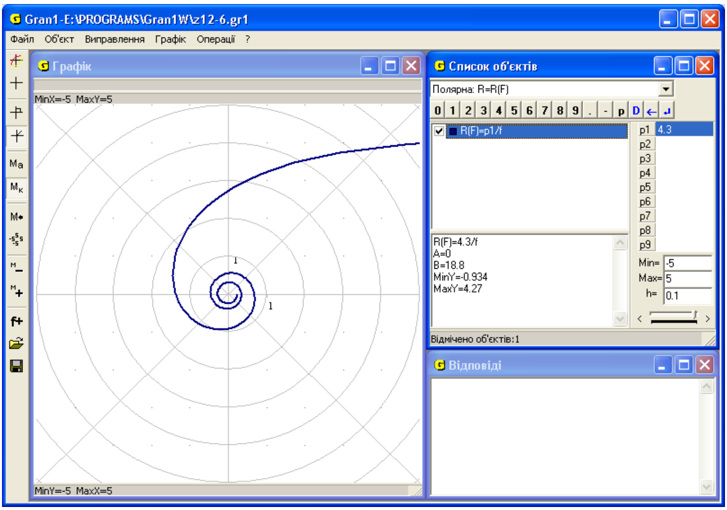


Рис. 3.9.

За допомогою графіків функцій у GRAN1 можна виконувати різного типу малюнки (рис. 3.10).

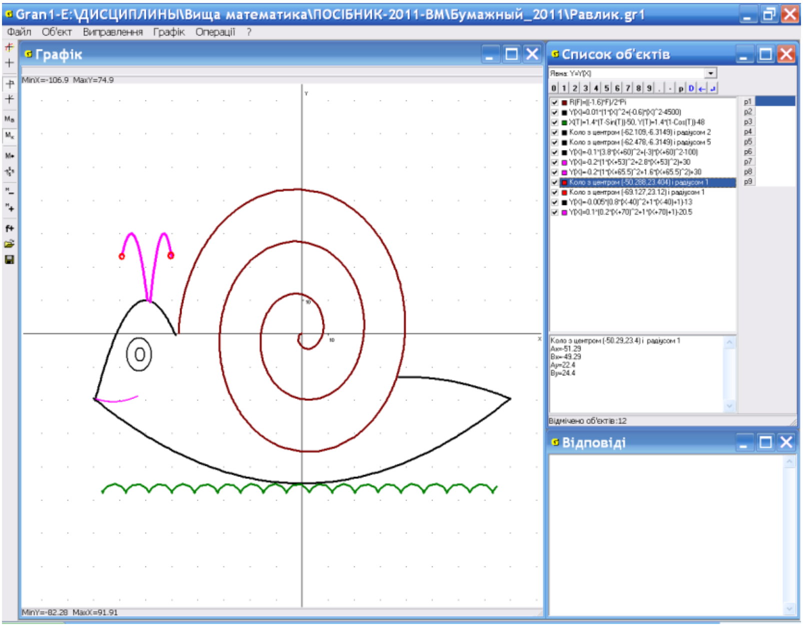


Рис. 3.10.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО ТВОРЧОЇ РОБОТИ №2

Варіант 1

Завдання 1. Визначити вид кривої і зобразити її графічно:

1). $y = x^2 + 5x + 6$ 2). $\dfrac{(x+2)^2}{16} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$

Завдання 2. Побудувати графіки явно заданих функцій:

1). $y = 3^{tgx}$ 2). $y = \arccos(\cos x)$ 3). $y = \sqrt[4]{\ln \sin x} + 2$

Завдання 3. Побудувати лінію у полярних координатах $r = a\cos\varphi$ та криву задано параметрично $x = a\cos t, y = b\sin^3 t$.

Завдання 4. За допомогою графіків функцій створити рисунок на довільну тему за допомогою GRAN1.

Варіант 2

Завдання 1. Визначити вид кривої і зобразити її графічно:

1). $x = y^2 + 2y + 3$ 2). $\dfrac{(x-3)^2}{25} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

Завдання 2. Побудувати графіки явно заданих функцій:

1). $y = 2^{|x|}$ 2). $y = arctg(tgx)$ 3). $y = \frac{x}{\pi} + \sqrt{\lg \cos x}$

Завдання 3. Побудувати лінію у полярних координатах $r = a \sin 3\varphi$ та криву задано параметрично $x = \frac{1}{2}\cos^3 t$, $y = \frac{1}{3}\sin^3 t$.

Завдання 4. За допомогою графіків функцій створити рисунок на довільну тему за допомогою GRAN1.

Варіант 3

Завдання 1. Визначити вид кривої і зобразити її графічно:

1). $y = -x^2 + 4x - 5$ 2). $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Завдання 2. Побудувати графіки явно заданих функцій:

1). $y = \cos^2 x$ 2). $y = arcctg(ctgx)$ 3). $y = (1-2x)(\arcsin x + \arccos x)$

Завдання 3. Побудувати лінію у полярних координатах $r = e^{\varphi}$ та криву задано параметрично $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$.

Завдання 4. За допомогою графіків функцій створити рисунок на довільну тему за допомогою GRAN1.

Варіант 4

Завдання 1. Визначити вид кривої і зобразити її графічно:

1). $x = -2y^2 + 4y - 3$ 2). $y = \frac{1+x}{y-2}$

Завдання 2. Побудувати графіки явно заданих функцій:

1). $y = \sin^2 x$ 2). $y = |x+2| + |x-4|$ 3). $y = x \cdot \cos x$

Завдання 3. Побудувати лінію у полярних координатах $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ та криву задано параметрично $x = t^2, y = \frac{t}{3}(3 - t^2)$.

Завдання 4. За допомогою графіків функцій створити рисунок на довільну тему за допомогою GRAN1.

Варіант 5

Завдання 1. Визначити вид кривої і зобразити її графічно:

1). $x = \frac{2y+3}{x+5}$ 2). $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Завдання 2. Побудувати графіки явно заданих функцій:

1). $y = x - \sqrt{x}$ 2). $y = \left|\sin|x|\right|$ 3). $y = x + e^{x}$

<u>Завдання 3.</u> Побудувати лінію у полярних координатах $r = a\sqrt{\sin 3\varphi}$ та криву задано параметрично $x = \cos t(1 + \cos t)$, $y = \sin t(1 + \cos t)$.

<u>Завдання 4.</u> За допомогою графіків функцій створити рисунок на довільну тему за допомогою GRAN1.

<u>Модуль 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних</u>

1. Мета вивчення модуля:

❖ ознайомитись та засвоїти теоретичні основи диференціального числення функцій багатьох (двох) змінних та набути практичних вмінь і навичок дослідження та побудови математичних моделей простіших економічних ситуацій, що пов'язані з оптимізацією досліджуваних процесів.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

☺ <u>знати:</u> фундаментальні поняття та означення, основні правила та теореми теорії диференціального числення функцій багатьох (двох) змінних.

☺ <u>вміти:</u> розв'язувати задачі на знаходження границь та похідних; будувати математичні моделі за допомогою апарату диференціального числення; самостійно знаходити та опрацьовувати математичну літературу та інші інформаційні джерела; обирати і використовувати необхідні методи і засоби для виконання самостійних завдань з даного модуля.

☺ <u>застосовувати:</u> отримані знання і вміння під час розв'язування прикладних задач економічного змісту (задача визначення мінімальних витрат та максимального прибутку фірми, гранична корисність та норма заміщення).

2. Структура і зміст 4 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.

3. Опорні знання

Для його розуміння Вам необхідні знання і навички отримані під час вивчення 3 модуля.

Для перевірки знань пропонуємо пройти наступний тест.

Тест-перевірка знань

1. Похідна функції $y = e^{2tgx}$ у точці $x = 0$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\ln 2$	e^2	1	2

2. Похідна функції $y = arctg\, e^{\sin x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{e^{\sin x}}{1+e^{2\sin x}}$	$\frac{e^{\sin x}\cos x}{1+e^{2\sin x}}$	$\frac{e^{\sin x}\cos x}{1-e^{2\sin x}}$	$\frac{e^{\sin x}}{\sqrt{1-e^{2\sin x}}}$

3. Похідна функції $y = tgx \cdot \ln\cos x$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$	$\frac{\ln\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin x}$	$\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x} - tgx$

4. Похідна функції $y = \frac{\ln x}{\sin x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{\sin x - x\cos x \cdot \ln x}{x\sin^2 x}$	$\frac{\sin x + x\cos x \cdot \ln x}{x\sin^2 x}$	$\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$	$-\frac{\cos x}{x\sin^2 x}$

5. Похідна y'_x функції $y = y(x)$, що задана параметрично системою рівнянь $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$, дорівнює:

А	Б	В	Г
$-\frac{3\sin^2 t}{2\cos t}$	$\frac{3}{2}\, ctg\, t$	$-\frac{3}{2}\, tg\, t$	$\frac{3\cos^2 t}{2\sin t}$

6. Друга похідна функції $y = e^x \cos 2x$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$e^x(\cos 2x - 2\sin 2x)$	$4e^x \cos 2x$	$4e^x \sin 2x$	$-e^x(3\cos 2x + 4\sin 2x)$

7. Критичними точками першої похідної y' функції $y = x^3 + x^2 + 5$ є:

А	Б	В	Г
$\{2/3\}$	$\{1;0\}$	$\{0;-2/3\}$	$\{0;-3/2\}$

8. Функція $y = e^x / (x^2 + 1)$:

А	Б	В	Г
спадає на проміжку $(-\infty;1)$	зростає на проміжках $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$	всюди зростає	спадає на проміжках $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$

9. Точками перегину графіка функції $y = x\ln^2 x - 2x\ln x - x$ є:

А	Б	В	Г
не існує	$M_1(0;0)$; $M_2(1;1)$	$M(1;-1)$	$M(-1;0)$

10. Вертикальною асимптотою до графіка функції $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ служить пряма, рівняння якої:

А	Б	В	Г
не існує	$x = 2$	$x = -2$	$x = -1$

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П. 7 (стор. 236-268)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 10 (стор. 341-378)
Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.	Розділ 8 (стор. 391-471), розділ 9 (стор. 472-507)
Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 517 с.	Частина 2, розділ 4 (тема 15-18) (стор. 275-336)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 23-24 (стор. 168-183)

5. Основні поняття модуля

Тема 4.1. Функція багатьох (двох) змінних, область визначення, область значень функції, способи задання функції, лінія рівня функції, функція корисності, виробнича функція, границя функції 2-х змінних, неперервність функції 2-х змінних, частинний приріст, повний приріст функції 2-х змінних, частинна похідна I, II, вищого порядків, необхідна і достатні умови диференційовності функції, повний диференціал функції 2-х змінних, похідна складеної функції, похідна за напрямом, градієнт, мішана частинна похідна.

Тема 4.2. Локальний екстремум, необхідні і достатні умови локального екстремуму функції 2-х змінних, стаціонарні точки, найбільше і найменше значення функції в області, метод найменших квадратів (МНК), умовний екстремум, граничний дохід, граничний прибуток, граничні витрати, оптимальний розподіл ресурсів та товарів, гранична корисність.

З історії…

Ще до створення диференціального числення *П'єр Ферма* в трактаті "Метод знаходження найбільших і найменших значень" (1638, опублікований в 1679 р.) сформулював перший загальний принцип знаходження екстремуму, який на сучасній мові звучить так: "У точці екстремуму лінійна частина приросту функції дорівнює нулю". Справедливо, що необхідна умова екстремуму, виражена в термінах диференціального числення його творцями Ісаком Ньютоном (1643–1727) і *Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем* (1646–1716) носить ім'я Ферма. Ферма розглядав також випадки, коли функція задана неявно. Подальший розвиток теорія екстремумів отримала в працях братів Бернуллі: Якоба (1654–1705) і Іоганна (1667–1748) і великого *Леонарда Ейлера* (1707–1783).

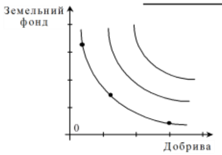
Ейлер писав: "В світі не відбувається нічого, в чому не було б видно сенсу будь-якого максимуму або мінімуму". Розв'язуючи задачу на знаходження точок умовного екстремуму, *Жозеф Луї Лагранж* (1736–1813) розробив метод невизначених множників, названий його ім'ям.

6. Опорні конспекти модуля

Функція двох змінних

$$S=(X,Y):(x,y)\in(X,Y)\xrightarrow{f} z, z\in Z\,,\ \underline{z=f(x,y)}$$

Лінія рівня: $\underline{f(x,y)=C=const}$



Виробнича функція – Кобба-Дугласа:

$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$, Y – обсяг випущеної продукції, K – обсяг основного капіталу, L – витрати праці, A, α, β – числові параметри, A>0, $\alpha+\beta=1$

Границя функції 2-х змінних:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Неперервність функції 2-х змінних:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)$$

Частинні і повні прирости:

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$
$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$$
$$\Delta_y z=f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$

Повний диференціал:

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Градієнт – вектор:

$$\mathbf{grad\ z}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\mathbf{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\mathbf{j},$$

Диференціювання складеної функції $z=f(u(x,\ y),\ v(x,\ y))$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Частинні похідні I порядку:

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}=D_x f=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$$
$$f'_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}=D_y f=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}$$

Частинні похідні II порядку:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=f'_{xx}(x_0;y_0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=f'_{yy}(x_0;y_0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Мішані похідні: $z''_{xy}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$z''_{yx}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

Рівні!

З історії…

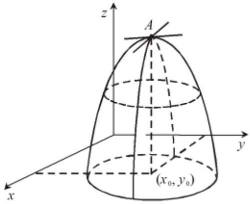
До початку XIX ст. вчені не мали певних правил для розв’язування системи рівнянь, в якій число невідомих менше за число рівнянь; донині вживалися приватні прийоми, що залежали від вигляду рівнянь і від дотепності обчислювачів, і тому різні обчислювачі, виходячи з тих же даних спостережень, приходили до різних висновків.

Адрієну Лежандру і *Карлу Гауссу* належить перше застосування до розв’язування вказаної системи рівнянь теорії ймовірностей. Цей спосіб був поширений і вдосконалений подальшими дослідженнями *П’єра Лапласа*, *Йоганна Енке*, *Фрідриха Бесселя*, *Петера Ганзена* і ін. і отримав назву *методу найменших квадратів*, тому що після підстановки в початкові рівняння невідомих величин, виведених цим способом, в правих частинах рівнянь виходять якщо і не нулі, то невеликі величини, сума квадратів яких виявляється меншою, ніж сума квадратів подібних залишків, після підстановки яких би то не було інших значень невідомих. Окрім цього, розв'язання рівнянь способом найменших квадратів дає можливість виводити вірогідні помилки невідомих, тобто величини, за якими судять про точність висновків.

Дослідження функції 2-х змінних

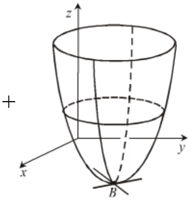
Точки <u>екстремуму</u> $(x_0;y_0)$:

максимуму $f(x_0;y_0)\geq f(x;y)$ мінімуму $f(x_0;y_0)\leq f(x;y)$



<u>Стаціонарні</u> точки: $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}$

<u>Критичні</u> точки: стаціонарні + точки, в яких похідна не існує.



<u>Необхідні умови екстремуму</u>: $f'_x(x_0;y_0)=0$ або не існує, $f'_y(x_0;y_0)=0$ або не існує, $(x_0;y_0)$ – критична точка

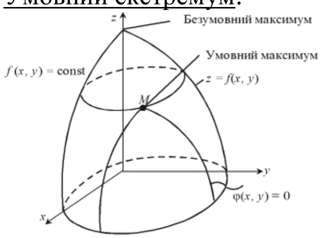
<u>Достатні умови екстремуму</u>:

$f''_{xx}(x_0;y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0;y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0;y_0)=C$ $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$

1). Δ>0, A>0 ↔ $f(x_0;y_0)=\min f$ 3). Δ<0 ↔ екстремуму немає

2). Δ>0, A<0 ↔ $f(x_0;y_0)=\max f$ 4). Δ=0 ↔ невизначений випадок

<u>Умовний екстремум</u>:



<u>Функція Лагранжа</u>:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

<u>Метод найменших квадратів</u> (МНК):

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y-(ax+b)\right)^2\Rightarrow\min$$

$$S'_a=0, S'_b=0$$

7. Запитання для самоперевірки

1. Що називається функцією багатьох (двох) змінних? Способи її задання?

2. Які лінії називаються лініями рівня функції двох змінних?
3. Які функції багатьох змінних використовуються в економічній теорії?
4. Яке означення границі та неперервності функції двох змінних?
5. Що таке частинні й повний прирости функції багатьох змінних?
6. Яке означення частинних похідних функцій двох (багатьох) змінних?
7. Як обчислюються частинні похідні другого, …, n-го порядків?
8. Які похідні називаються мішаними?
9. Яка необхідна умова і достатні умови диференційовності функції?
10. Що називається повним диференціалом функції двох (багатьох) змінних?
11. Як використовується повний диференціал функції в наближених обчисленнях?
12. Як обчислюється похідна складеної функції двох змінних, неявно заданої функції, похідні вищих порядків?
13. Що називається градієнтом функції? Що він характеризує? Геометричний та економічний його зміст?
14. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних?
15. Як знайти критичні, стаціонарні точки функції двох змінних?
16. Як формулюються необхідні і достатні умови локального екстремуму функції двох змінних?
17. Який алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум?
18. За яким алгоритмом знаходяться найбільше і найменше значення функції двох змінних в області?
19. Яка основна ідея методу найменших квадратів?
20. За якими формулами обчислюються коефіцієнти в МНК у випадку лінійної залежності $y = ax + b$?
21. Як знаходиться умовний екстремум функції двох змінних?
22. Яка функція називається виробничою? Властивості виробничих функцій?
23. Яка виробнича функція називається функцією Кобба-Дугласа?
24. Який набір ресурсів називається оптимальним?
25. Як визначається гранична норма заміщення одного ресурсу іншим?
26. Яка основна задача теорії багаторесурсної фірми?
27. В чому полягає суть задачі про мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу випуску продукції?
28. Що означає відношення переваги?
29. Які властивості функції корисності?
30. Які лінії називаються кривими байдужості?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Функція $z = f(x; y)$ буде неперервною в точці $(x_0; y_0)$, якщо:

А	Б	В	Г
функція має скінченну границю при $x \to x_0, y - y_0$	функція визначена в точці $(x_0; y_0)$	границя функції в точці $(x_0; y_0)$ дорівнює значенню функції в цій точці	за умови одночасного виконання А, Б і В

2. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?

А	Б
лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють нерівність $f(x, y) > 0$	лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють нерівність $f(x, y) < 0$
В	**Г**
лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють рівняння $f(x, y) = C$, де C – довільна стала	лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, C)$ координатної площини Oxy, які задовольняють рівняння $f(x, C) = 0$, де C – довільна стала

3. Градієнтом $grad\, f(M_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається:

А
вектор $grad\, f(M_0) = f(M_0)\left(f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}\right)$
Б
вектор $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}$
В
величина $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'_z(M_0)$
Г

величина $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0)\cdot f'_y(M_0)\cdot f'_z(M_0)$

4. Який геометричний зміст градієнта $grad\, f(M_0)$ функції $u = f(x, y, z)$?

А	Б
вектор $grad\, f(M_0)$ є вектором нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку	вектор $grad\, f(M_0)$ розташований під кутом 60° до вектора нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку
В	**Г**
вектор $grad\, f(M_0)$ утворює кут 45° з вектором нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку.	вектор $grad\, f(M_0)$ перпендикулярний до вектора нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$, яка проходить через цю точку.

5. Нехай задано функцію $Z = f(x; y)$. Відомо, що в деякій точці $(x_0; y_0)$ частинні похідні цієї функції дорівнюють нулю або не існують. Чи справджується твердження, що функція z має екстремум у цій точці:

А	Б	В	Г
ні	так, якщо виконується достатня умова екстремуму	так	так, якщо виконується необхідна умова екстремуму

6. Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається:

А	Б
точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють нерівності $f'_x(M_0) < 0$, $f'_y(M_0) < 0$, $f'_z(M_0) < 0$	точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють нерівності $f'_x(M_0) > 0$, $f'_y(M_0) > 0$, $f'_z(M_0) > 0$
В	**Г**
точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють рівності $f'_x(M_0) = 0$,	точка, в якій частинні похідні задовольняють хоча б одну з рівностей $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$,

$f'_y(M_0)=0,\ f'_z(M_0)=0$	$f'_z(M_0)=0$

7. Сформулювати достатню умову існування локального екстремуму для функції двох змінних $z=f(x,y)$.

А	Б
якщо $M_0(x_0,y_0)$ – стаціонарна точка функції $z=f(x,y)$ і справедлива нерівність $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0}<0$, тоді функція $z=f(x,y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0)<0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0)>0$	якщо $M_0(x_0,y_0)$ – стаціонарна точка функції $z=f(x,y)$ і справедлива нерівність $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0}>0$, тоді функція $z=f(x,y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0)>0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0)<0$
В	**Г**
якщо $M_0(x_0,y_0)$ – стаціонарна точка функції $z=f(x,y)$ і справедлива нерівність $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0}>0$, тоді функція $z=f(x,y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0)<0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0)>0$	якщо $M_0(x_0,y_0)$ – стаціонарна точка функції $z=f(x,y)$ і справедлива рівність $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0}=0$, тоді функція $z=f(x,y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0)<0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0)>0$

8. Нехай задано функцію $Z=f(x;y)$, якщо виконується умова $\varphi(x;y)=0.$ Потрібно завершити формулу функції Лагранжа:

А	Б
$L(x;y)=f(x;y)-\lambda\varphi(x;y)$	$L(x;y)=f(x;y)\lambda\varphi(x;y)$
В	**Г**
$L(x;y)=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$	$L(x;y)=\lambda\varphi(x;y)\div f(x;y)$

9. Вставити пропущені словосполучення у формулювання сутності методу найменших квадратів: «Невідомими параметрами … та … вибирають так значення, щоб … відхилень δ_i теоретичних значень … , знайдених за емпіричною формулою від відповідних дослідних, була мінімальною»:

А	Б	В	Г
різниця квадратів; $a;b;\ f(x_i)$	сума квадратів; $a;b;\ f(x_i)$	добуток квадратів; $a;b;\ f(x_i)$	частка квадратів; $a;b;\ f(x_i)$

10. Що називається повним диференціалом du функції $u=f(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$?

А
$du=f'_x(M_0)+f'_y(M_0)+f'_z(M_0)$
Б
$du=f'_x(M_0)\cdot f'_y(M_0)\cdot f'_z(M_0)\Delta x\Delta y\Delta z$, де $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$
В
$du=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+f'_z(M_0)\Delta z$, де $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$
Г
$du=\left(f'_x(M_0)+f'_y(M_0)+f'(M_0)\right)\Delta x\Delta y\Delta z$, де $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$

Практична частина:

11. Яка з наведених функцій, є функцією двох змінних:

А	Б	В	Г
$z=e^{x^2-4}$	$z=e^x\cdot\cos(5x-11)$	$z=e^x\cdot\cos(5y-7)$	$z=e^{y^2+11}$

12. Для функції $z=x^2-xy+y^2$ частинна похідна по змінній *x*:

А	Б	В	Г
x^2-y+2y	$2x-y$	$-x+2y$	$2x-y+2y$

13. Для функції $z=e^{2x-y^2}$ частинна похідна по змінній *y*:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}e^{2x-y^2}$	$2e^{2x-y^2}$	$e^{2x-y^2}(-2y)$	$e^{2x-y^2}(2-2y)$

14. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=arctg\,\frac{x}{y}$ в точці

$M_0(2;1)$:

А	Б	В	Г
-4/5	1/5	-2/5	-2/3

15. Значення частинної похідної функції $z = x^3 - xy - y^3$ по змінній x в точці $M_0(2;1)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
-5	10	11	4

16. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції:

$z = tg(x+y),\ x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot t,\ y = t^2$ в точці $t_0 = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$:

А	Б	В	Г
$\sqrt{2\pi}$	$\sqrt{3\pi}$	$\sqrt{6\pi}$	$2\sqrt{6\pi}$

17. Якщо $u = 3\sin(xy + 3xz - 2yz)$, $\vec{s}(1;2;-2)$ і $M_0(1;3;1)$, то похідна за напрямом $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
2	-4	-1	10

18. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x,y)$, яка задана неявно рівнянням $\ln\left(x^2 - 4y^3 - z^2 + 4xy + 1\right) = 0$, в точці $M_0(4;-1;2)$:

А	Б	В	Г
-1	1	-2	4

19. Повний диференціал функції $z = \frac{x}{y^2}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$dz = \frac{1}{y^2}dx - \frac{2x}{y^2}dy$	$dz = \frac{1}{y^2}dx + \frac{2x}{y^3}dy$	$dz = -\frac{2x}{y^3}dx + \frac{1}{y^2}dy$	$dz = \frac{1}{y^2}dx - \frac{2x}{y^3}dy$

20.Для функції $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$-4x - y$	$-x - 2y$	-1	1

21. Для функції $z = \ln(x^2 + y)$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\dfrac{2y - 2x^2}{(x^2 + y)^2}$	$\dfrac{2y + 2x^2}{(x^2 + y)^2}$	$\dfrac{2y - 2x^2}{(x^2 + y)}$	$\dfrac{2(y - x^2)}{(x^2 - y)^2}$

22. Чому дорівнює друга частинна похідна $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = ye^{x+y}$ в точці $M_0(-1;1)$?

А	Б	В	Г
-4	3	-3	2

23. Чому дорівнює друга частинна похідна $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \cos(x^2 - y^2)$ в точці $M_0(1;1)$?

А	Б	В	Г
-1	6	4	2

24. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17$:

А	Б	В	Г
функція має мінімум	функція має максимум	функція не має точок екстремуму	потрібне додаткове дослідження

25. Стаціонарною точкою функції $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 17$ є точка:

А	Б	В	Г
$M(2;3)$	$M(1;2)$	$M(3;4)$	$M(1;3)$

9. Індивідуальні домашні завдання №4

Базовий рівень:

Завдання 1. Задано функцію $u = f(x, y)$.

а) показати, що вона задовольняє даному рівнянню;

б) перевірити справедливість рівності $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Завдання 2. Дослідити функцію на екстремум.

Підвищений рівень:

Завдання 3. Фірма реалізує товари двох видів. Зв'язок ціни P_1 товару першого виду і його кількості Q_1 можна описати функцією $P_1 = f_1(Q_1)$. Аналогічно для товару другого виду $P_2 = f_2(Q_2)$. Загальні витрати задано функцією $C = S(Q_1, Q_2)$.

Знайти: а) максимальний прибуток фірми; б) оптимальні ціни на товари першого та другого видів.

Поглиблений рівень:

Завдання 4. Підприємство випускає вироби двох типів шляхом послідовної обробки їх спочатку в цеху А, а потім в цеху В. Обробка кожного виробу першого типу займає a_{11} годин у цеху А та a_{21} годин в цеху В; обробка кожного виробу другого типу займає a_{12} годин в цеху А та a_{22} годин в цеху В.

Цех А спроможний працювати в квартал не більше b_1 годин, а цех В – не більше b_2 годин. Відомо, що підприємство за кожний із виробів першого та другого типів дістає прибуток відповідно C_1 і C_2. Визначити, скільки виробів кожного типу треба випускати за квартал, щоб забезпечити найбільший прибуток.

Варіанти завдань

Завдання 1

Варі-ант	Функція	Рівняння
1	$u = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$	$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}$
2	$u = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$	$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{2}$
3	$u = (x+3)(y-5)$	$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = u$
4	$u = e^{\frac{x}{y^2}}$	$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
5	$u = \ln(e^x + e^y)$	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$
6	$u = \ln(x^2 + xy + y^2)$	$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2$
7	$u = arctg\,\frac{y}{x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

8	$u=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{y^2}{4a^2x}}$	$\frac{\partial u}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
9	$u=\cos(x^2+y^2)$	$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$
10	$u=e^{\frac{x}{y}}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$
11	$u=\sin(x-ay)+\cos(x+ay)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
12	$u=y\ln(x^2-y^2)$	$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$
13	$u=x arctg\frac{y}{x}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$
14	$u=\frac{xy}{x-y}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$
15	$u=x\ln\frac{y}{x}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$
16	$u=x^y$	$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln xy}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2y$
17	$u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{x+y}{x-y}$
18	$u=arctg\frac{x+y}{1-xy}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$
19	$u=x^y$	$y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial y}$
20	$u=\arcsin\frac{x}{x+y}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$
21	$u=\frac{xy}{x+y}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$
22	$u=e^{\frac{x}{y}}\ln y$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{\ln y}$
23	$u=e^x\cos y$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

24	$u=\ln(x^2+y^2)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
25	$u=xy+xe^{\frac{x}{y}}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=xy+u$
26	$u=\sqrt{x^2+y^2}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$
27	$u=e^{xy}$	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
28	$u=(x^2+y^2)tg\,\frac{x}{y}$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$
29	$u=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$	$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$
30	$u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3$	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3)$

Завдання 2

Варіант	Функція
1	$u=2(x+y)-x^2-y^2$
2	$u=x^3+y^3-3xy+6$
3	$u=6(x-y)-3x^2-3y^2$
4	$u=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
5	$u=2xy-5x^2-3y^2+2$
6	$u=(x-1)^2+(y-2)^2-1$
7	$u=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$
8	$u=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$
9	$u=xy-3x^2-2y^2$
10	$u=2x^2-xy-y^2-28x+7y-13$
11	$u=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$
12	$u=x^2+y^2-xy+x+y$
13	$u=x^3+3xy^2-51x-24y+1$
14	$u=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$

15	$u = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
16	$u = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$
17	$u = x^3 + y^3 - 3xy$
18	$u = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$
19	$u = 2xy - 2x^2 - 4y^2$
20	$u = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
21	$u = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
22	$u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
23	$u = (2x - x^2)(2y - y^2)$
24	$u = xy^3 - 2x^3y + 2y^3$
25	$u = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 18y - 3$
26	$u = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
27	$u = x^3 + y^3 - 9xy$
28	$u = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; (x > 0, y > 0)$
29	$u = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
30	$u = xy(12 - x - y)$

Завдання 3

Варіант	P_1	P_2	C
1	$100 - 0{,}5Q_1$	$40 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 2000$
2	$80 - Q_1$	$140 - Q_2$	$2Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 4200$
3	$60 - 0{,}5Q_1$	$80 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 2100$
4	$40 - 2Q_1$	$60 - Q_2$	$2Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 700$
5	$100 - Q_1$	$40 - Q_2$	$Q_1^2 + 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 40Q_2 + 1200$
6	$40 - Q_1$	$60 - Q_2$	$2Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 600$
7	$40 - 0{,}5Q_1$	$80 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 1700$
8	$50 - Q_1$	$100 - 3Q_2$	$Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 50Q_1 + 800$
9	$20 - 0{,}5Q_1$	$80 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 1500$
10	$60 - 2Q_1$	$20 - Q_2$	$2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 600$

11	$100 - Q_1$	$30 - Q_2$	$Q_1^2 + 3Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 10Q_2 + 1300$
12	$80 - 2Q_1$	$20 - Q_2$	$2Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - 60Q_1 + 1200$
13	$80 - 0{,}5Q_1$	$60 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 1800$
14	$120 - 0{,}5Q_1$	$60 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 3800$
15	$100 - Q_1$	$80 - 2Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 40Q_1 + 4200$
16	$200 - 3Q_1$	$30 - Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 10Q_2 + 2800$
17	$140 - 3Q_1$	$40 - Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 40Q_2 + 1200$
18	$20 - 0{,}5Q_1$	$100 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 250$
19	$160 - 2Q_1$	$100 - Q_2$	$2Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 4000$
20	$140 - Q_1$	$140 - 3Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 5100$
21	$40 - 0{,}5Q_1$	$20 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 400$
22	$20 - Q_1$	$100 - Q_2$	$3Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 1300$
23	$100 - Q_1$	$100 - Q_2$	$Q_1^2 + 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 3100$
24	$20 - Q_1$	$140 - 3Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 20Q_1 + 1200$
25	$40 - 0{,}5Q_1$	$60 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 800$
26	$100 - 2Q_1$	$100 - Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 3100$
27	$140 - 3Q_1$	$140 - Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 5100$
28	$60 - Q_1$	$40 - 2Q_2$	$Q_1^2 + 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 700$
29	$40 - 0{,}5Q_1$	$100 - 0{,}5Q_2$	$0{,}5Q_1^2 + 0{,}5Q_2^2 + 2100$
30	$100 - Q_1$	$160 - 3Q_2$	$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 4000$

Завдання 4

Варіант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	c_1	c_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7	7	5	9	1099	895	204	315
2	2	9	2	3	1714	634	312	470
3	1	8	1	4	982	542	77	310
4	8	8	4	7	976	851	259	403
5	1	5	8	8	566	1136	108	117
6	3	4	9	2	1040	1390	367	83
7	1	8	1	3	262	182	292	883
8	6	4	7	7	1716	2324	305	300
9	7	6	5	9	1567	1289	129	120

10	7	1	8	3	259	322	125	45
11	3	1	3	5	219	903	124	51
12	7	3	3	9	285	153	121	317
13	6	1	4	2	23	38	279	93
14	5	9	1	7	983	753	352	636
15	7	6	8	9	2092	2768	146	164
16	1	3	2	5	500	877	240	603
17	7	6	5	8	674	656	172	271
18	4	2	5	4	190	314	423	332
19	5	3	6	6	735	954	416	407
20	4	4	9	4	496	596	492	326
21	8	6	8	1	1656	1056	183	136
22	5	2	6	3	635	798	656	326
23	8	7	7	5	849	708	301	224
24	4	5	6	2	1229	1134	313	362
25	6	3	9	9	183	522	206	201
26	1	4	9	2	589	1595	461	423
27	2	5	4	5	1149	1333	119	281
28	6	8	6	3	762	747	263	132
29	6	2	2	1	940	327	799	396
30	9	8	6	4	541	350	219	151
31	8	5	4	7	1255	641	506	319
32	1	5	9	5	777	1953	335	306

10. Методичні вказівки до виконання творчої роботи №3 на тему «Застосування похідної функції двох змінних в економіці»

Творча робота передбачає самостійне виконання завдань з вищої математики з використанням комп’ютерного програмного засобу DERIVE та пакету MS EXCEL. Один варіант завдання виконується мікрогрупою студентів, що складається з 4-5 осіб.

*Приклади розв’язування задач в **DERIVE***

Для роботи з програмою DERIVE (для Windows) потрібно активізувати файл DFW.EXE (рис. 4.1).

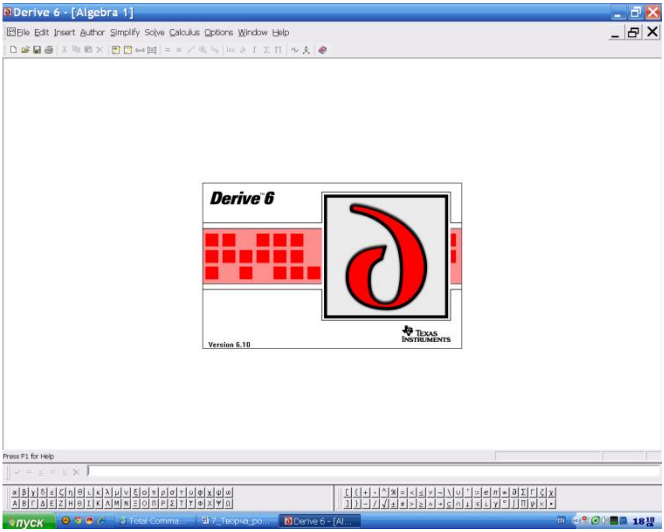


Рис. 4.1.

Після замовлення стає активним алгебраїчне вікно, про що вказує напис у верхній лівій частиш екрана. Програма передбачає можливість режимів 2D-PLOT Windows і 3D-PLOT Windows, які є графічними й відповідають дво- та тривимірному просторам.

Як і у більшості стандартних програмних пакетів для Windows, у верхній частині екрана розміщується основне меню програми, яке складається з набору команд (послуг, опцій). Для роботи з основним меню зручно користуватися маніпулятором «миша». Вибирати опцію основного меню можна за допомогою «гарячої клавіші» – підкресленої літери в назві опції (наприклад, *A* для вибору опції *Author)* або піктограми. Призначення опцій основного меню:

File – набір команд для роботи з файлами (збереження, завантаження, перезапис та ін.);
Edit – редагування раніше заданих виразів;
Author – створення нових виразів;
Solve – розв'язання рівнянь і їх систем;
Calculus – обчислення границь, похідних, інтегралів, сум, добутків та ін.;
Declare – задавання типу виразів, змінних (декларування);
Options – набір додаткових можливостей програми;
Windows – організація роботи у вікнах на екрані;
Help – допомога щодо роботи з програмою.

Вирази для роботи можна вводити безпосередньо з клавіатури або за допомогою спеціальної панелі символів. Передбачена також можливість завантаження роботи раніше створених виразів з файлів. Кожний із введених виразів відображується на екрані (в алгебраїчному вікні) під відповідним номером. Перебіг від одного виразу до іншого, а також від одного вікна до іншого (при роботі більш як з одним вікном) зручно здійснювати за допомогою «мишки».

Обчислення похідних за допомогою програми DERIVE

Для обчислення похідних призначена опція «*Calculus-Differentiate*», до якої потрібно звернутися після введення до розгляду функції, яку необхідно диференціювати.

Приклад 1. Обчислити похідну функції $y = 2\sin(\cos 5x)$.

Алгоритм розв'язування

1. Обираємо «*Author-Expression*» і вводимо до розгляду вираз: $y = 2\sin(\cos(5x))$.
2. З додаткового меню «*Calculus*» обираємо «*Differentiate…*».
3. У відповідь на запит системи вводимо номер виразу, який потрібно диференціювати (у даному випадку це номер, під яким в алгебраїчному вікні записано $y = 2\sin(\cos(5x))$).
4. Вводимо змінну (*variable*), за якою буде здійснюватися диференціювання (x) і порядок похідної (*order*, 1) (рис. 4.2).

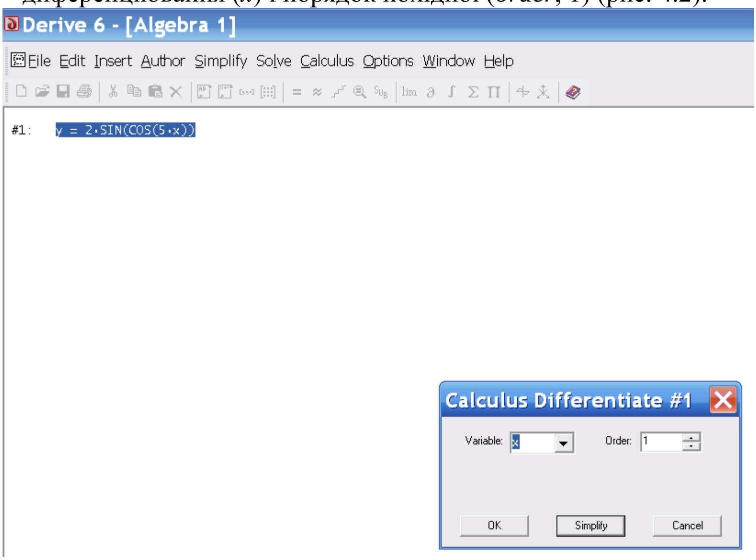


Рис. 4.2.

5. Завершуємо процес вибором опції «*Simplify*» (а не «*Ok*»). В алгебраїчному вікні під відповідним номером записується результат диференціювання (рис. 4.3).

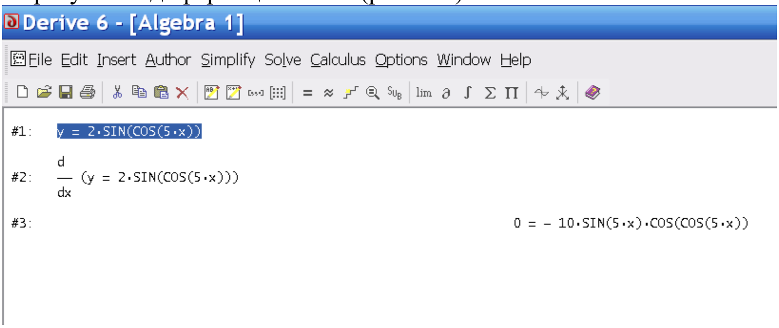


Рис. 4.3.

Аналогічний результат можна одержати, якщо після відповіді на запит щодо змінної диференціювання і порядку похідної вибрати не «*Simplify*», а «*Ok*». Але в алгебраїчному вікні записується не результат диференціювання, а вираз типу $\frac{dF}{dx}$, де F – вираз, який потрібно диференціювати, x – змінна диференціювання. Далі потрібно скористатися послугою головного меню «*Simplify*», а з неї «*Expand*» (рис. 4.4).

За допомогою послуги «*Calculus-Differentiate*» можна обчислювати також частинні похідні та похідні вищих порядків.

Приклад 2. Знайти мішану похідну другого порядку спочатку за змінною x, а потім за змінною y від функції двох змінних $z = xy\sin(x+y)\cos(x-y)$.

Алгоритм розв'язування

1. Вводимо вираз $z = x * y * \sin(x+y) * \cos(x-y)$.
2. Скориставшись послугою «*Calculus*», будуємо вираз $\frac{d}{dx}(z = xy\sin(x+y)\cos(x-y))$.
3. Звертаємося до команди меню «*Expand*» і отримуємо (рис. 4.5):

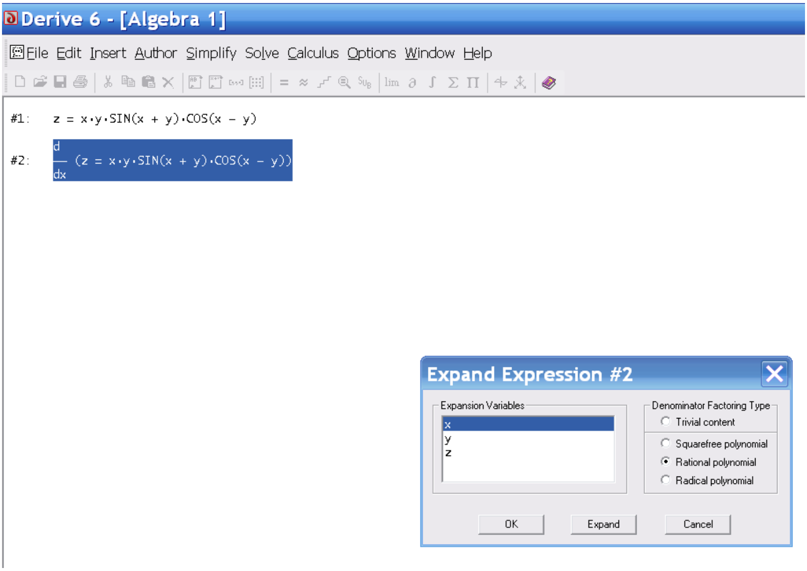


Рис. 4.4.

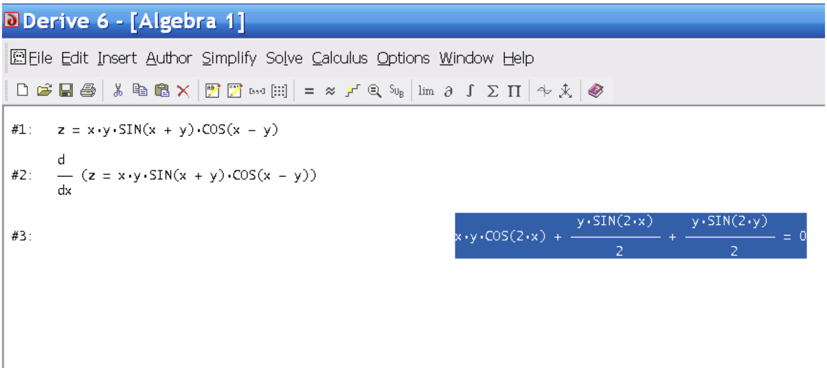


Рис. 4.5.

4. Аналогічно шукаємо від отриманого виразу другу похідну, але вже по змінній *y* (рис. 4.6).

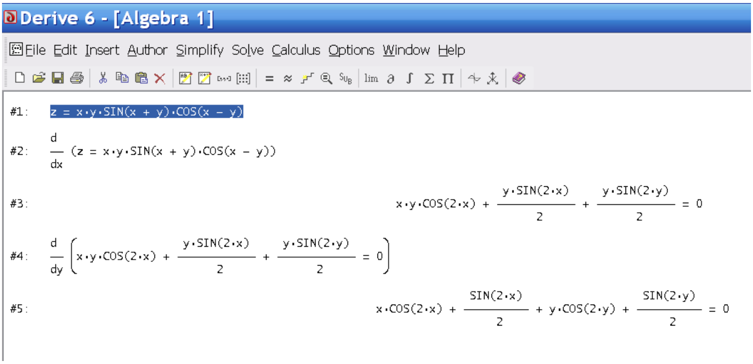


Рис. 4.6.

Приклад 3. Нехай задано виробничу функцію фірми $z = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$ та ринкові ціни продукції $p_0 = 2$ і факторів виробництва – відповідно $p_1 = 1, \quad p_2 = \dfrac{1}{2}$ умовних грошових одиниць. Знайти комбінацію ресурсів $\left(x^*, y^*\right)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток.

Алгоритм розв'язування

1. Функція прибутку фірми $P(x;y) = 2x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} - x - \frac{1}{2} y$. Дослідимо її на екстремум за допомогою програми Derive. Знаходимо частинні похідні і прирівнюємо їх до нуля (рис. 4.7). Вирази #3 і #5 відповідно – похідні функції по *x* і по *y*.

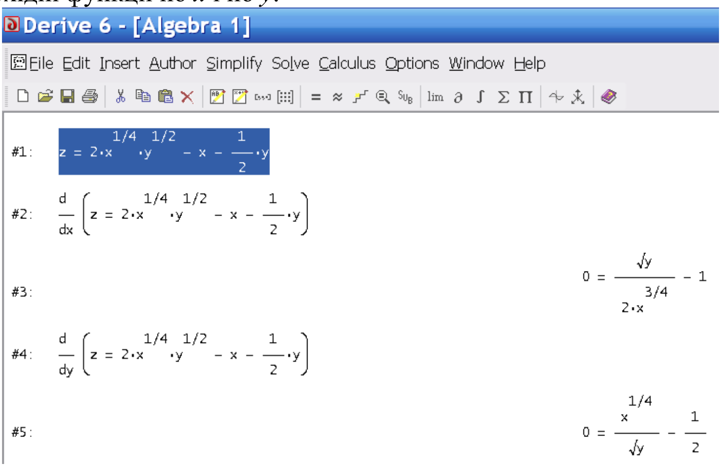


Рис. 4.7.

2. Для розв’язання системи рівнянь скористаємося командою «*Solve-System*» (рис. 4.8) та розв’язавши її отримаємо критичну точку (1;4) (рис. 4.9).

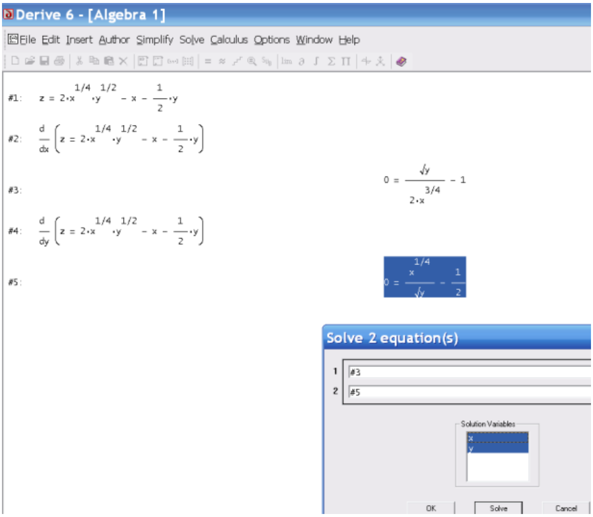


Рис. 4.8.

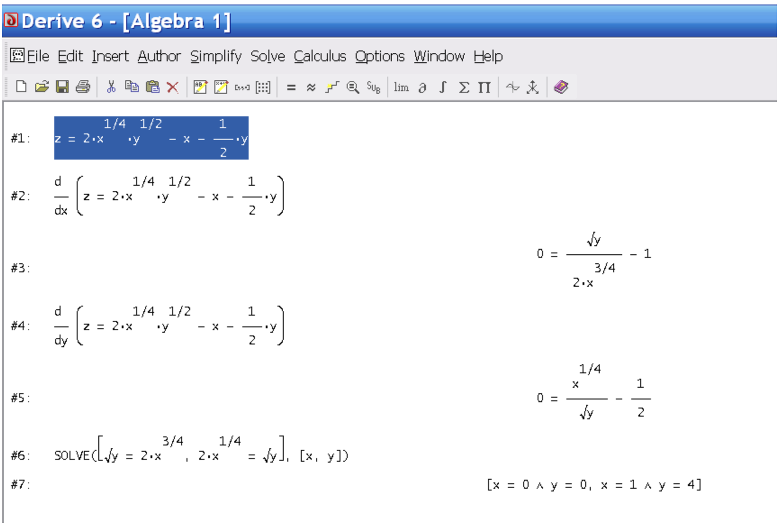


Рис. 4.9.

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку і обчислимо їх значення в точці (1;4) за допомогою команди «*Substitute for variables*», підставивши значення отриманої критичної точки у вирази похідних

(рис. 4.10) та (рис. 4.11). Одержали значення похідних в точці: $A=-\frac{3}{4}, B=\frac{1}{8}, C=-\frac{1}{16}$. Відповідно $\Delta=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{vmatrix}=\frac{1}{32}>0$, $A<0$.

Отже, точка (1;4) – точка максимуму.

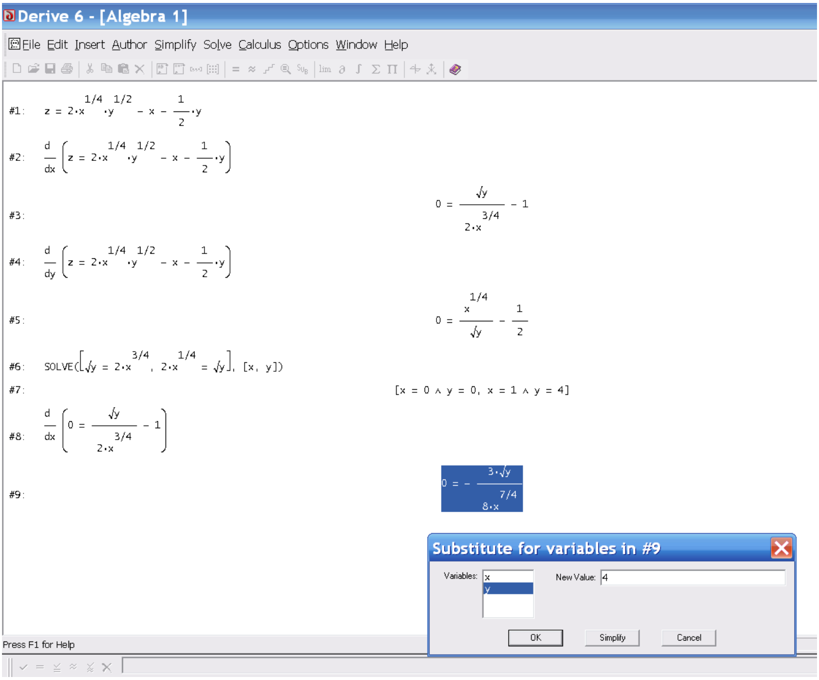


Рис. 4.10.

4. Обчислюємо максимальний прибуток фірми $P_{max} = P(1;4) = 1$.

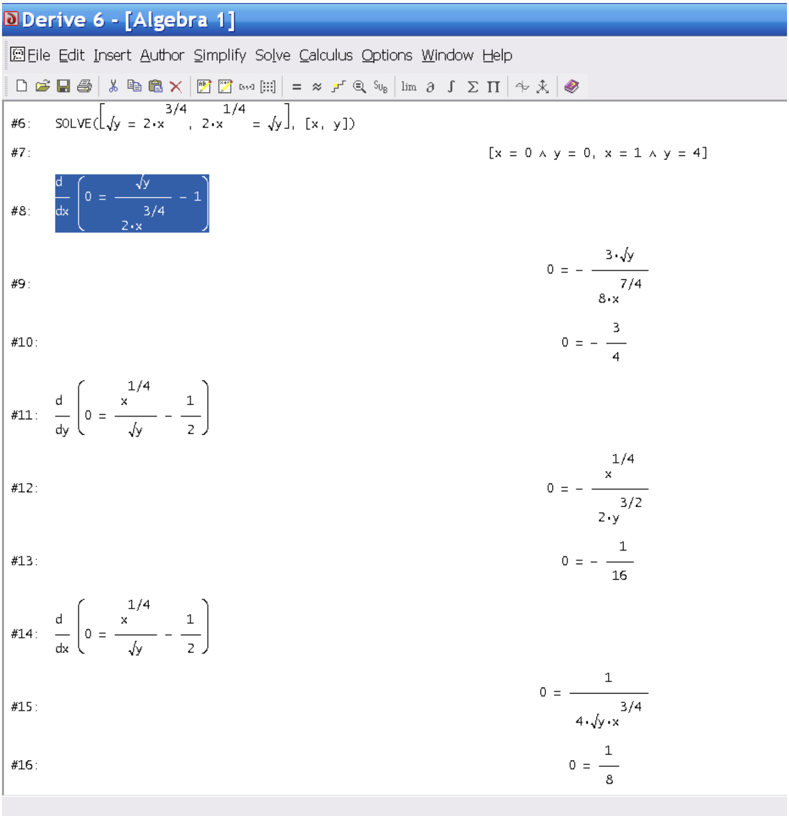


Рис. 4.11.

Деякі задачі потребують громіздких обчислень, які достатньо просто виконати в табличному процесорі Excel. Для розв'язання задач на МНК потрібно повторити, яким чином в Excel здійснюються основні арифметичні операції, як обчислюються визначники та обернена матриця (див. методичні вказівки до виконання творчої роботи №1).

Приклад розв'язування задач в ***MS EXCEL***

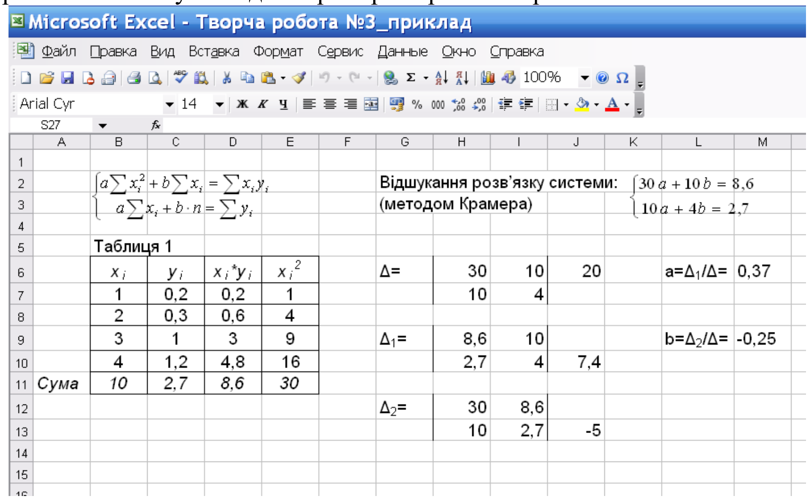
Приклад 1. Є наступні дані про витрати на рекламу x (тис. ум. од.) та продажу продукції y (тис. од.):

x_i	1	2	3	4
y_i	0,2	0,3	1,0	1,2

Методом найменших квадратів побудувати лінійну залежність $y = ax + b$. Порівняти отриману залежність з залежністю $y = \frac{1}{8}x^2$.

Алгоритм розв'язування

1. Для знаходження параметрів лінійної залежності побудуємо таблицю 1 проміжних обчислень в Excel (рис. 4.12). Параметри залежності будемо шукати з системи рівнянь, одержаної за допомогою МНК: $\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + b\cdot n = \sum y_i \end{cases}$. Підставивши значення сум з таблиці 1 у систему рівнянь, одержимо систему: $\begin{cases} 30a + 10b = 8{,}6 \\ 10a + 4b = 2{,}7 \end{cases}$, розв'язавши яку методом Крамера отримаємо розв'язок:


Microsoft Excel - Творча робота №3_приклад

$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + b\cdot n = \sum y_i \end{cases}$

Відшукання розв'язку системи: $\begin{cases} 30a + 10b = 8{,}6 \\ 10a + 4b = 2{,}7 \end{cases}$
(методом Крамера)

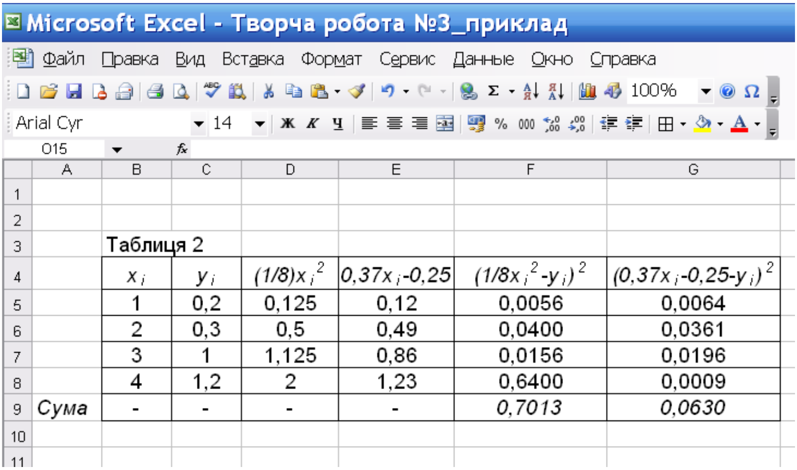
Таблиця 1

	x_i	y_i	x_i*y_i	x_i^2
	1	0,2	0,2	1
	2	0,3	0,6	4
	3	1	3	9
	4	1,2	4,8	16
Сума	*10*	*2,7*	*8,6*	*30*

Δ=	30	10	20	a=Δ₁/Δ=	0,37
	10	4			
Δ₁=	8,6	10		b=Δ₂/Δ=	-0,25
	2,7	4	7,4		
Δ₂=	30	8,6			
	10	2,7	-5		

Рис. 4.12.

2. Таким чином, лінійна залежність має вигляд: $y = 0{,}37x - 0{,}25$. Для порівняння знайденої залежності і залежності $y = \frac{1}{8}x^2$, порівняємо величини $S = \sum \left[f(x_i) - y_i \right]^2$. Додаткові обчислення представимо в таблиці 2 (рис. 4.13).


Microsoft Excel - Творча робота №3_приклад

Таблиця 2

	x_i	y_i	$(1/8)x_i^2$	$0,37x_i-0,25$	$(1/8x_i^2-y_i)^2$	$(0,37x_i-0,25-y_i)^2$
	1	0,2	0,125	0,12	0,0056	0,0064
	2	0,3	0,5	0,49	0,0400	0,0361
	3	1	1,125	0,86	0,0156	0,0196
	4	1,2	2	1,23	0,6400	0,0009
Сума	-	-	-	-	0,7013	0,0630

Рис. 4.13.

3. Очевидно, що $S_{\text{лінійна}} < S_{\text{квадратична}}$, отже лінійна залежність є більш точною для даних експерименту.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО ТВОРЧОЇ РОБОТИ №3

Варіант 1

Задача 1. Виробнича функція фірми має вигляд $z=\sqrt{x\sqrt[4]{y}}$, де x, y – обсяги першого і другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю – відповідно $p_x = 40$, $p_y = 20$ умовних грошових одиниць. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 80$ умовних грошових одиниць.

Задача 2. Є наступні експериментальні дані про кількість одиниць виробленої продукції *x* та витрат *y* (тис. ум. од.):

x_i	10	20	30	40	50
y_i	2,0	5,9	12,0	20,0	30,0

Функція витрат шукається у вигляді $y = ax^2 + b$. Визначити параметри *a* та *b* методом найменших квадратів.

Варіант 2

Задача 1. Знайти значення величин ресурсів (x,y), при яких фірма-виробник отримає максимальний прибуток, якщо задано виробничу функцію $K = 30\sqrt{x\sqrt[3]{y}}$ і ціни $p_x = 4$, $p_y = \dfrac{1}{48}$ на одиницю першого і другого ресурсів.

Задача 2. За експериментальними даними побудувати методом найменших квадратів лінійну емпіричну залежність $y = ax + b$. Порівняти одержану залежність з альтернативною $y = 2x + 0{,}1x^2$ і визначити, яка з них краще відповідає експериментальним даним.

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

Варіант 3

Задача 1. Виробнича функція фірми має вигляд $z = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x, y – обсяги першого і другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю – відповідно $p_x = 50$, $p_y = 25$ умовних грошових одиниць. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 100$ умовних грошових одиниць.

Задача 2. Є наступні експериментальні дані про кількість одиниць виробленої продукції *x* та кількості реалізованого товару *y* (тис. ум. од.):

x_i	100	120	140	160	180	200
y_i	100	114	130	146	163	180

Залежність шукається у вигляді $y = 100 + a(x - 100) - b\sqrt{x - 100}$. Визначити параметри *a* та *b* методом найменших квадратів.

Варіант 4

Задача 1. Знайти значення величин ресурсів (x,y), при яких фірма-виробник отримає максимальний прибуток, якщо задано виробничу функцію $K = 10\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$ і ціни $p_x = 2$, $p_y = \dfrac{2}{3}$ на одиницю першого і другого ресурсів.

Задача 2. За експериментальними даними побудувати методом найменших квадратів лінійну емпіричну залежність $y = ax + b$. Порівняти одержану залежність з альтернативною $y = 2^{-x}$ і визначити, яка з них краще відповідає експериментальним даним.

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	0,5	0,3	0,25	0,18	0,12

Варіант 5

Задача 1. Виробнича функція фірми має вигляд $z = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x, y – обсяги першого і другого ресурсів відповідно. Ціни за їхню одиницю

– відповідно $p_x = 10$, $p_y = 5$ умовних грошових одиниць. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 20$ умовних грошових одиниць.

<u>Задача 2.</u> За експериментальними даними побудувати методом найменших квадратів лінійну емпіричну залежність $y = ax + b$. Порівняти одержану залежність з альтернативною $y = \sqrt{x}$ і визначити, яка з них краще відповідає експериментальним даним.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

<u>Модуль 5. Інтегральне числення функцій</u>

1. Мета вивчення модуля:

- ❖ ознайомитись та усвідомити поняття первісної, невизначеного та визначеного інтегралів; засвоїти основні поняття, правила, методи інтегрування виразів; вміти розв'язувати задачі з застосуванням властивостей і правил обчислення інтегралів; застосовувати набуті знання і вміння до розв'язування прикладних задач.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

- ☺ <u>знати:</u> поняття первісної функції, визначеного та невизначеного інтегралів; таблицю невизначених інтегралів; поняття правильного і неправильного раціонального дробу; суть методу невизначених коефіцієнтів; поняття подвійного інтеграла.
- ☺ <u>вміти:</u> обчислювати невизначені та визначені інтеграли, використовуючи основні методи інтегрування та властивості інтеграла; інтегрувати раціональні дроби, найпростіші ірраціональні і деякі тригонометричні функції; обчислювати подвійний інтеграл через повторний.
- ☺ <u>застосовувати:</u> здобуті знання інтегрального числення функції однієї та двох змінних в задачах економічного, фізичного та геометричного спрямування (застосування у динамічних процесах, фінансових задачах, задачах реалізації товарів, обчислення площ фігур та об'ємів тіл і т.ін.).

2. Структура і зміст 5 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.

3. Опорні знання

Для його розуміння Вам необхідні знання і навички одержані під час вивчення 3 та 4 модулів.

Тест-перевірка знань

1. Похідна функції $y = x^5 + 5^x$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{x^5}{5} + \frac{5^x}{\ln 5}$	$x^5 \ln x + 5^x \ln 5$	$5x^4 + 5^x \ln 5$	$5x^4 + x5^{x-1}$

2. Похідна функції $y = \sqrt[3]{\arcsin x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3\sqrt{\arcsin x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{3\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{\arcsin^2 x}\sqrt{1-x^2}}$

3. Похідна функції $y = \ln \lg x$ у точці $x = 10$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{10\ln 10}$	$\frac{10}{\ln 10}$	0	1

4. Похідна функції $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$e^{\cos x}(\cos x - \sin x)$	$e^{\cos x}(\cos x + \sin^2 x)$	$e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$	$-\sin 2x \cdot e^{\cos x}$

5. Похідна функції $y = \frac{\ln x}{\cos x}$ дорівнює:

А	Б
$\frac{\cos x - \sin x \cdot \ln x}{x\cos^2 x}$	$\frac{\cos x + x\sin x \cdot \ln x}{x\cos^2 x}$
В	Г
$-\frac{\cos x + x\sin x \cdot \ln x}{x\cos^2 x}$	$\frac{\cos x + x\sin x}{x\cos^2 x}$

6. Друга похідна функції $y = x\cos 2x$ у точці $x = \pi$ дорівнює:

А	Б	В	Г
3π	-4π	0	4π

7. Друга похідна функції $y = e^{-x}\sin x$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$2e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$	$-2e^{-x}\cos x$	$2e^{-x}\sin x$	$-e^{-x}(\sin x + \cos x)$

8. Чому дорівнює частинна похідна z'_x функції $z = \arcsin\frac{x^2}{y^2}$ в точці $M_0(1,2)$:

А	Б	В	Г
$-1/\sqrt{15}$	$-2/\sqrt{15}$	$3/\sqrt{15}$	$2/\sqrt{15}$

9. Чому дорівнює друга частинна похідна z''_{xx} функції $z = e^{x^2/y}$ в точці $M_0(-1;1)$:

А	Б	В	Г
-2e	*1*	*0*	*6e*

10. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = 4arctg(xy)$ в точці $M_0(-1;1)$:

А	Б	В	Г
-4	3	-3	2

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П. 8 (стор. 269-300)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 8-9 (стор. 284-340), глава 13 (стор. 438-448)
Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.	Розділ 10 (стор. 508-577), розділ 11 (стор. 578-613)
Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 517 с.	Частина 2, розділ 5 (тема 19-25) (стор. 337-435)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 18-22 (стор. 137-167)

5. Основні поняття модуля

Тема 5.1. Первісна функції, невизначений інтеграл, підінтегральна функція, змінна інтегрування, властивості невизначеного інтеграла, таблиця інтегралів від основних елементарних функцій, метод безпосереднього інтегрування, метод заміни змінної (підстановки), метод інтегрування частинами, рекурентні формули.

Тема 5.2. Раціональна функція, трансцендентна функція, підстановка

Ейлера, універсальна тригонометрична підстановка, дробово-раціональна функція, розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші, метод невизначених коефіцієнтів.

Тема 5.3. Задача про площу криволінійної трапеції, задача про роботу змінної сили, задача про обсяг продукції, інтегральна сума функції, визначений інтеграл функції, інтегровна функція, межі інтегрування, проміжок інтегрування, властивості визначеного інтеграла, формула Ньютона-Лейбніца, метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами, невласний інтеграл I та II роду, формула прямокутників, формула трапецій, формула Симпсона наближеного обчислення інтегралів.

Тема 5.4. Подвійний інтеграл функції, властивості подвійного інтеграла, повторний інтеграл, площа плоскої фігури, довжина дуги кривої, об'єм тіла обертання, площа поверхні тіла обертання, робота змінної сили, пройдений шлях точки, обсяг виробленої продукції, дисконтування, приріст капіталу за відомими інвестиціями, крива Лоренца, коефіцієнт Джині, задача реалізації товарів, надлишок споживача та виробника.

З історії…

Інтегрування використовувалось ще в давньому Єгипті, близько 1800 рр. до н. е., Московський математичний папірус демонструє знання формули об'єму зрізаної піраміди. Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод «вичерпування» *Євдокса Кнідського* (близько 370 рр. до н. е.), який намагався знайти площі та об'єми, розриваючи їх на безмежну множину частин, для яких площа або об'єм вже відомі. Обчислив наближений об'єм Землі, яку вважав кулеподібною. Цей метод розвивав далі Архімед та використовувався для розрахунку площ парабол і наближеного розрахунку площі круга. Аналогічні методи були розроблені незалежно в Китаї в 3-му ст. н. е. Лю Хуейєм, який використовував їх для відшукання площі круга. Цей метод був в подальшому використаний Дзю Чонгші для знаходження об'єму кулі.

Наступний серйозний крок в численні інтегралів був зроблений в Іраку, в XI столітті, математиком *Ібн аль-Хайсамом* (відомим як Alhazen в Європі), в своїй роботі «Про вимірювання параболічного тіла» він приходить до рівняння четвертого ступеню. Розв'язуючи цю проблему, він проводить обчислення, рівносильні обчисленням визначеного інтегралу, щоб знайти об'єм параболоїда. Використовуючи математичну індукцію він зміг узагальнити свої результати для інтегралів від многочленів до четвертого ступеня. Таким чином, він був близький до пошуку загальної формули для інтегралів від поліномів, але він не розглядав будь-яких многочленів вище четвертого ступеня.

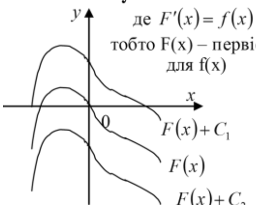
6. Опорний конспект модуля

Інтегральне числення функцій

Невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

де $F'(x) = f(x)$, тобто F(x) – первісна для f(x)



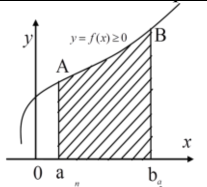
Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Таблиця основних інтегралів

(див. у підручнику!)

Визначений інтеграл



$$S_{aABb} = \lim_{\substack{\max \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_b^a f(x)dx$$

Властивості інтегралів

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 2. $\int dF(x) = F(x) + C$
3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ 4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$
5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

1. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Методи інтегрування: I. безпосереднє II. заміни змінної III. інтегрування частинами

Інтегрування раціональних виразів

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, де P(x), Q(x) – многочлени

Інтегрування ірраціональних виразів

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx$,

де R – раціональна функція (підстановки $x = a\sin t, x = atgt, x = a/\cos t$)

Інтегрування тригонометричних функцій

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ (універсальна підстановка $t = tg(x/2)$

Невласні інтеграли

I роду – з нескінченними межами інтегрування:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

II роду – від необмежених функцій

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$$

Наближені обчислення інтегралів

- формула прямокутників; - формула трапецій; - формула парабол (Симсона)

Застосування визначеного інтеграла

обчислення площ плоских фігур *S*; довжини дуги кривої *l*; площі поверхні обертання S_x; об’єму тіла обертання *V*; обсягу виробленої продукції *Q*.

Подвійний інтеграл $I = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_j = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right]dx$,

D – область обмежена графіками функцій *y=h(x), y=g(x)*

З історії…

Наступний значний прогрес в численні інтегралів з’явиться лише в XVI столітті. В роботах *Бонавентура Кавальєрі* з його методом неподільних, а також в роботах *П’єра Ферма*, були закладені основи сучасного інтегрального числення. Подальші кроки були зроблені на початку XVII століття *Ісак Барроу* і *Еванджеліста Торрічеллі*, які представили перші натяки на зв’язок між інтегруванням та диференціюванням.

Ісак Ньютон використовував малі вертикальні панелі над змінною, вказуючи інтегрування це або змінна. Вертикальну риску x' було легко сплутати з $\dot{x}$, що Ньютон використовував для позначення диференціювання, це було важко розрізняти при печатанні та читанні, тому ці позначення не були широко розповсюджені.

Сучасне позначення невизначеного інтегралу було введено *Готфридом Лейбніцем* у 1675 році. Він адаптував інтегральний символ $\int$, утворений з букви S – скорочення латинського слова summa (сума). Сучасне позначення визначеного інтегралу, с обмеженнями над і під знаком інтегралу, були вперше використані *Жаном Фур’є* в 1819-1820 роках.

Суттєвими для розвитку інтегрального числення є роботи видатного українського математика *Михайла Остроградського*.

7. Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається первісною для даної функції? Який загальний вигляд первісної?
2. Основні властивості первісної?
3. Що називається невизначеним інтегралом даної функції? Його основні властивості.
4. Які існують основні методи інтегрування? Їх суть.
5. Який раціональний дріб називається правильним, неправильним? Який між ними зв’язок?
6. Яким чином правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних?
7. У чому суть методу невизначених коефіцієнтів?
8. Які є методи інтегрування ірраціональних виразів?
9. Що таке універсальна тригонометрична підстановка?
10. Яке означення визначеного інтеграла функції $y=f(x)$ на проміжку [a;b]?
11. Основні властивості визначеного інтеграла?
12. Як записується формула Ньютона-Лейбніца?

13. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
14. Як записується формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла?
15. Яка відмінність між невласними інтегралами I та II роду?
16. Які існують наближені формули для обчислення визначених інтегралів?
17. Яке означення подвійного інтеграла? Його властивості і правила обчислення.
18. Що таке криволінійна трапеція?
19. Як знаходяться площі плоских фігур з допомогою визначеного інтеграла?
20. Що таке довжина дуги кривої?
21. Як визначається об'єм тіла обертання навколо осі Ох, Оу?
22. Що називається поверхнею площі обертання? Як вона обчислюється?
23. Який економічний зміст визначеного інтеграла?
24. Що характеризує коефіцієнт Джині?
25. Що таке надлишок споживача, додаткова вартість? Як їх обчислити?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Інтеграл $\int F'(x)dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$F'(x)+C$	$dF(x)$	$F(x)$	$f(x)+C$

2. Формула інтегрування частинами в невизначеному інтегралі має вигляд:

А	Б	В	Г
$\int UdV = UV - \int UdU$	$\int UdV = UV - \int VdV$	$\int UdU = UV + \int VdU$	$\int UdV = UV - \int VdU$

3. Інтеграл від раціонального дробу типу $\frac{1}{x+a}$ ($a \in R$) дорівнює:

А	Б	В	Г
$(x+a)^{-2}+C$	$-(x+a)^{-2}+C$	$\ln\lvert x+a\rvert+C$	$\ln\lvert x\rvert+\ln\lvert a\rvert+C$

4. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ це:

А	Б	В	Г
$F(x)+C$ де $F'(x)=f(x), C-const$	$F(a)-F(b)$, де $F'(x)=f(x)$	$F(b)-F(a)$, де $F'(x)=f(x)$	$F(a)+F(b)$, де $F'(x)=f(x)$

5. Інтеграл $\int_a^b dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$b-a$	$a-b$	$a\cdot b$	$a+b$

6. Завершити аналітичний запис властивостей визначеного інтеграла:

1) $\int_a^b af(x)dx$

А	Б	В
$\int_b^a \frac{1}{a} f(x)dx$	$a\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = ...$

А	Б	В
$\int_a^b f(x) \mp \int_a^b g(x)dx$	$\int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$	$\int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)dx$

7. Завершити аналітичний запис властивостей визначеного інтеграла:

1) якщо $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx =$

А	Б	В
$\int_a^c f(x) + \int_a^b f(x)dx$	$\int_a^c f(x) - \int_a^b f(x)dx$	$2\int_a^b f(x)dx$

2) якщо на $[a;b]$ виконується $f(x) \le g(x)$, то:

А	Б	В
$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$

8. Площа плоскої фігури, обмеженої графіками ліній $f_1(x), f_2(x)(f_1(x) \ge f_2(x))$, $x=a, x=b$, обчислюється за формулою:

А	Б	В	Г
$S=\int_a^b f_1(x)dx$	$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$	$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$	$S=\int_b^a (f_1(x)-f_2(x))dx$

9. Інтеграл виду $\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ обчислює:

А	Б	В	Г
площу криволінійної трапеції	об'єм тіла обертання	довжину дуги кривої y=f(x)	площу поверхні тіла

10. Геометрично значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
площі трикутника	об'єму тіла	площі криволінійної трапеції	площі трапеції

Практична частина:

11. Для обчислення інтеграла $\int \frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}$ використовується:

А	Б	В	Г
заміна $t=3-\sqrt{x+1}$	заміна $u=\sqrt{x+1}$	інтегрування частинами	заміна $u=x+1$

12. Обчислити $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$ можна:

А	Б	В	Г
перетворивши до виразу $\int \sqrt{\cos x}dx \int \sin x dx$	заміною $u=\cos x$	заміною $t=\sqrt{\cos x}$	заміною $u=\sin x$

13. Обчислити $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}dx$ можливо:

А	Б	В	Г
перетворивши до вигляду $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx+\int \frac{\sqrt{x}}{4}dx$	заміною $x=t^4$	заміною $x=t^2$	заміною $x=t^3$

14. Інтеграл $\int \cos 4x dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{\cos^2 4x}{2}+C$	$4\sin 4x+C$	$\frac{1}{4}\sin 4x+C$	$-\frac{1}{4}\sin x+C$

15. Інтеграл $\int x\cdot e^x dx$ можна знайти:

А	Б	В	Г
перетворивши вираз до $\int xdx\int e^x dx$	перетворивши вираз до $\int xdx+\int e^x dx$	за допомогою інтегрування частинами $U=x, dV=e^x dx$	за допомогою інтегрування частинами $U=e^x, dV=xdx$

16. Інтеграл $\int\frac{dx}{1+5\sin x}$ можна знайти за допомогою метода підстановки:

А	Б	В	Г
$u=\sin x$	$u=tgx$, тоді $\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$u=1+5\sin x$	$u=tg\frac{x}{2}$, тоді $\sin x=\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}$

17. Розклад правильного раціонального дробу $\frac{x^2+4x-8}{x^3+4x}$ на суму елементарних дробів має вигляд:

А	Б	В	Г
$\frac{3}{x}+\frac{x+2}{x^2+4}$	$\frac{-5}{x}+\frac{-x+2}{x^2+4}$	$\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{-2}{x-2}$	$\frac{-2}{x}+\frac{3x+4}{x^2+4}$

18. Невизначений інтеграл $\int\sin(3x+2)dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\cos(3x+2)+C$	$-\cos(3x+2)+C$	$-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$	$-\frac{1}{2}\cos(3x+2)+C$

19. Невизначений інтеграл $\int\frac{x^3}{4x^4+1}dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{4}\lg\left\|4x^4+1\right\|+C$	$\frac{1}{16}\ln\left\|4x^4+1\right\|+C$	$4\ln\left\|4x^4+1\right\|+C$	$\ln\left\|4x^4+1\right\|+C$

20. Невизначений інтеграл $\int\frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}+C$	$2\cdot 5^{\sqrt{x}}+C$	$\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C$	$5^{\sqrt{x}}\cdot \ln 5+C$

21. Невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$2\sqrt{x}+\ln\|x\|+C$	$2\sqrt{x}+2\ln\|x\|+C$	$2\sqrt{x}-\ln\|x\|+C$	$\sqrt{x}-2\ln\|x\|+C$

22. Чому дорівнює визначений інтеграл $\int_0^1 (x+1)^3 dx$:

А	Б	В	Г
17/4	15/4	16/3	15/3

23. Яку заміну змінної інтегрування треба застосувати для обчислення визначеного інтеграла $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ і чому дорівнює його значення:

А	Б
$x=u^2$; $\int_4^9 \frac{2u}{u-1}du=2\left(5+\ln\frac{8}{3}\right)$	$x=u^2$; $\int_2^3 \frac{1}{u-1}du=\ln 2$
В	**Г**
$x=u^2$; $\int_4^9 \frac{1}{u-1}du=\ln\frac{8}{3}$	$x=u^2$; $\int_2^3 \frac{2u}{u-1}du=2(1+\ln 2)$

24. Обчислення за означенням невласного інтеграла $I=\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{4+x^4}$ приводить до наступного результату:

А	Б	В	Г
інтеграл розбігається	інтеграл збігається, $I=\pi/8$	інтеграл збігається, $I=\pi/4$	інтеграл збігається, $I=\pi^2/6$

25. Чому дорівнює площа S плоскої області D: $y=x^2$; $x-y+2=0$:

А	Б	В	Г
8/3	5/4	9/2	3

9. Індивідуальні домашні завдання №5

Базовий рівень:

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли.

Завдання 2. Обчислити визначені та невласні інтеграли.

Підвищений рівень:

Завдання 3. Обчислити інтеграл спочатку за формулою Ньютона-Лейбніца, а потім – наближеним методом за формулою трапецій, розбивши відрізок інтегрування на 8 рівних частин (обчислення провести з заокругленням до четвертого десяткового знаку).

Завдання 4. Обчислити площі фігур, обмежених заданими лініями.

Поглиблений рівень:

Завдання 5. На основі досліджень встановлено залежність ціни P від попиту Q: $P=f(Q)$. Визначити надлишок споживача для відомої рівноважної ціни P_0. Зробити схематичний рисунок.

Варіанти завдань

Варіант 1

1.

1. $\int \frac{dx}{x^2}$ 2. $\int \cos(1-2x)dx$

3. $\int \frac{dx}{2x+1}$ 4. $\int 2^x 3^{x-1} dx$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$ 6. $\int x^2 e^{x^3} dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ 8. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$

9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$ 10. $\int \frac{x+3}{x^2-x-2} dx$

2.

1. $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ 2. $\int_{2}^{5} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-3}} dx$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ 4. $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

3. $\int_{-1}^{7}\sqrt[3]{9x+1}dx$ **4.** $y=x^2-x$ і $x+y-1=0$ **5.** $P=10-Q, P_0=8$

Варіант 2

1.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

2. $\int\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

3. $\int\frac{dx}{3x-2}$

4. $\int e^x\left(1-e^{-x}+2^x\right)dx$

5. $\int\frac{x^2dx}{5x^3+1}$

6. $\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$

7. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}$

8. $\int\sin 3x\cos 3xdx$

9. $\int\frac{x+4}{x^2-4x+8}dx$

10. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+7}}dx$

2.

1. $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{1+\sin x}$

3. $\int_{0}^{1}x^2e^xdx$

4. $\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

3. $\int_{-2}^{6}\sqrt[3]{9x+10}dx$ **4.** $y=tgx, x=0, y=-1$

5. $P=Q^2-300Q+20000, P_0=6400$

Варіант 3

1.

1. $\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x^2}dx$

2. $\int e^{-3x}dx$

3. $\int\frac{dx}{(x+1)^3}$

4. $\int\frac{x^4dx}{x^5+2}$

5. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

6. $\int \frac{dx}{7x+1}$

7. $\int \left(x^2-3x+1\right)e^{-2x}$

8. $\int \sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}dx$

9. $\int \frac{2x-1}{x^2+x+17}dx$

10. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+6x+11}}dx$

2.

1. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

2. $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+1}$

3. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} arctg\,2xdx$

4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{2x-3}{x^2+3x+4}dx$

3. $\int\limits_{-2}^{6} \sqrt[3]{9x+19}dx$

4. $xy=6$ і $3x+y-9=0$

5. $P=-Q^2-2Q+9, P_0=1$

Варіант 4

1.

1. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{x}\right)dx$

2. $\int 4^{-x}dx$

3. $\int (8x+11)^7 dx$

4. $\int ctgxdx$

5. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1}$

6. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

8. $\int x^2\sin 3xdx$

9. $\int \frac{3x-2}{x^2-10x+26}dx$

10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

2.

1. $\int\limits_0^1 xe^{-2x^2}dx$

2. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$

3. $\int_{0}^{\frac{3}{2}} \arcsin 2x dx$

4. $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

3. $\int_{-4}^{4} \sqrt[3]{9x+28} dx$ **4.** $y = \ln x, x = \frac{1}{2}, y = 2$

5. $P = \frac{10}{Q+1} + 2, P_0 = 4$

Варіант 5

1.

1. $\int \frac{dx}{x^4}$

2. $\int \sin(2-3x) dx$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$

6. $\int xe^{-2x^2} dx$

7. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

8. $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$

9. $\int \frac{x-3}{4x^2+8x+5} dx$

10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-6x+10}} dx$

2.

1. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{3-\sqrt{3x+1}}$

2. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

4. $\int_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-6)^2}}$

3. $\int_{-5}^{3} \sqrt[3]{9x+37} dx$ **4.** $y = x^2 + x$ і $x - y + 1 = 0$

5. $P = -10Q + 400, P_0 = 280$

Варіант 6

1.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$
2. $\int \cos 2x dx$
3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
5. $\int \sin^2 x dx$
6. $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$
7. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
8. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
9. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+17} dx$
10. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x-4}} dx$

2.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$
2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 4x}$
3. $\int\limits_0^1 arcctg \frac{x}{2} dx$
4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} dx$

3. $\int\limits_0^8 \sqrt[3]{9x-8} dx$ **4.** $y = ctgx, x = \frac{\pi}{2}, y = 1$

5. $P = 2Q^2 - 45Q + 250, P_0 = 9$

Варіант 7

1.

1. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x} dx$
2. $\int \cos 7x dx$
3. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$
4. $\int x \cos x^2 dx$
5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
6. $\int \ln\left(x^2+4\right) dx$

7. $\int tg\,2x dx$

8. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^4}$

9. $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+25}dx$

10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$

2.

1. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

2. $\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

3. $\int_1^e x\ln x dx$

4. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2+1}$

3. $\int_1^9 \sqrt[3]{9x-17}dx$

4. $xy=8$ і $4x+y-12=0$

5. $P=-0{,}05Q^2+30, P_0=10$

Варіант 8

1.

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x^3}dx$

2. $\int \sin\left(2-\frac{x}{3}\right)dx$

3. $\int \frac{dx}{(2x+1)^6}$

4. $\int \frac{x^2dx}{2x^3+1}$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$

6. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$

7. $\int xe^{-2x}dx$

8. $\int arctg\frac{x}{2}dx$

9. $\int \frac{x+2}{x^2-8x+20}dx$

10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2-12x+5}}dx$

2.

1. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$

3. $\int_0^1 \arccos x dx$

4. $\int_0^1 x\ln x dx$

3. $\int_{2}^{10}\sqrt[3]{9x-26}\,dx$ **4.** $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ y=\dfrac{1}{2}$ **5.** $P=\dfrac{Q+10}{Q+2},\ P_0=11$

Варіант 9

1.

1. $\int\dfrac{dx}{(x-1)^3}$
2. $\int\dfrac{dx}{\cos^2(1-2x)}$
3. $\int\dfrac{x^2dx}{x^3+5}$
4. $\int\dfrac{dx}{\ln^2(x+1)(x+1)}$
5. $\int\dfrac{arctgx}{1+x^2}dx$
6. $\int\sin 2x\cos 2x dx$
7. $\int xe^{-5x}dx$
8. $\int\dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$
9. $\int\dfrac{2x-5}{4x^2+4x+5}dx$
10. $\int\dfrac{2x+1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx$

2.

1. $\int_{0}^{5}\dfrac{dx}{\sqrt{5x+2}}$
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^3 x dx$
3. $\int_{0}^{1}xarctgxdx$
4. $\int_{0}^{2}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3. $\int_{3}^{11}\sqrt[3]{9x-35}\,dx$ **4.** $y=x^2+5x$ і $x-y+5=0$

5. $P=210-7Q,\ P_0=154$

Варіант 10

1.

1. $\int\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
2. $\int\cos(2x+5)dx$
3. $\int x^2\cos x^3dx$
4. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $\int e^{-x+1}dx$

6. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

7. $\int (8x^3-3)^4 x^2 dx$

8. $\int ctg\,4x dx$

9. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x-3}dx$

10. $\int \frac{x-4}{\sqrt{9x^2-24x+8}}dx$

2.

1. $\int_1^7 \frac{dx}{\sqrt{4x-1}}$

2. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$

3. $\int_0^2 x2^x dx$

4. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

3. $\int_4^{12} \sqrt[3]{9x-44}dx$

4. $y=tgx, x=-\frac{\pi}{4}, y=0$

5. $P=-Q^2-\frac{35}{3}Q+50, P_0=6$

Варіант 11

1.

1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[4]{x}}$

2. $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$

3. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$

4. $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$

5. $\int x^2 \sin x^3 dx$

6. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\int x^2 \cos x dx$

8. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

9. $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+8}dx$

10. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4x^2+4x-1}}dx$

2.

1. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

3. $\int_0^1 xarcctgxdx$

4. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

3. $\int_{-1}^{7} \sqrt[3]{7x+15}dx$

4. $xy=6$ і $x+2y-8=0$

5. $P=25-2Q, P_0=15$

Варіант 12

1.

1. $\int e^{-x}\left(e^x-e^{2x}\right)dx$

2. $\int \frac{dx}{(4x+1)}$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$

5. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx$

6. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$

7. $\int x^2e^xdx$

8. $\int \ln\left(x^3+3\right)dx$

9. $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+18}dx$

10. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$

2.

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$

2. $\int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$

3. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

4. $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

3. $\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{7x+22}dx$

4. $y=x^2+x-2$ і $y=-x^2+3x-2$

5. $P=40-0{,}1Q, P_0=30$

Варіант 13

1.

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+2\right)dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-9x^2}}$

3. $\int \frac{xdx}{x^2+10}$

4. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

5. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 6x}$

7. $\int x^2 \ln xdx$

8. $\int arctg\, 2xdx$

9. $\int \frac{3x+4}{x^2+10x+25}dx$

10. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{-8+6x-x^2}}dx$

2.

1. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} x\arcsin xdx$

4. $\int_0^{\infty} \frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx$

3. $\int_{-3}^{5} \sqrt[3]{7x+29}dx$ **4.** $y=x^2-5x$ і $x+y-5=0$

5. $P=\frac{500}{Q+6}, P_0=50$

Варіант 14

1.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^2}dx$

2. $\int 3^x 2^{x-2}dx$

3. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-3}}dx$

4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$

5. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$

6. $\int x\cos\left(\frac{\pi}{4}-x^2\right)dx$

7. $\int \arcsin 2xdx$

8. $\int xe^{3x}dx$

9. $\int \frac{x+3}{x^2-4x+5}dx$

10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+6x-9}dx}$

2.

1. $\int_{2}^{10}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ 2. $\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{3x^3+1}$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos\frac{x}{2}dx$ 4. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$

3. $\int_{2}^{10}\sqrt[3]{7x-6}dx$ **4.** $y=ctgx$ і $x=\frac{3\pi}{4}, y=1$

5. $P=-Q^2-2Q+27, P_0=3$

Варіант 15

1.

1. $\int\frac{dx}{x^8}$ 2. $\int 3^{(x+1)}dx$

3. $\int\frac{\cos xdx}{1+\sin x}$ 4. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{3x}{2}}$

5. $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1}$ 6. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$

7. $\int(x^2-1)\cos xdx$ 8. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

9. $\int\frac{x+2}{x^2-3x+2}dx$ 10. $\int\frac{x+1}{\sqrt{-5-6x-x^2}}dx$

2.

1. $\int_{1}^{5}\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$ 2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\cos 2x}$

3. $\int_{0}^{1}x^2e^{3x}dx$ 4. $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

3. $\int_{3}^{11}\sqrt[3]{7x-13}dx$ **4.** $xy=8$ і $x+4y-12=0$

5. $P=-\log_2\frac{Q}{80}, P_0=2$

Варіант 16

1.

1. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2dx$
2. $\int\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$
3. $\int\frac{x^4dx}{1+x^{10}}$
4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
5. $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}dx$
6. $\int\left(1-x^2\right)^4xdx$
7. $\int x\cos 2xdx$
8. $\int arcctgxdx$
9. $\int\frac{3x-4}{x^2-4x+13}dx$
10. $\int\frac{x+6}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx$

2.

1. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 xdx$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx$
4. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-2)^2+4}$

3. $\int_4^{12}\sqrt[3]{7x-20}dx$ **4.** $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$

5. $P=-Q^2-6Q+31, P_0=15$

Варіант 17

1.

1. $\int\frac{dx}{(x+1)^3}$
2. $\int\left(\sin\left(4x-\frac{3x}{2}\right)-1\right)dx$
3. $\int\frac{dx}{\cos^2(1-x)}$
4. $\int\frac{x^4dx}{x^5+11}$

5. $\int \frac{e^{-x}dx}{e^{-2x}+1}$

6. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

7. $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt[3]{x^2-4x+10}}$

8. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

9. $\int \frac{x+1}{x^2+8x+25}dx$

10. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

2.

1. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$

2. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin 2x}$

3. $\int_0^1 arctgx dx$

4. $\int_0^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$

3. $\int_5^{13} \sqrt[3]{7x-27}dx$

4. $y=x^2+2x$ і $x-y+2=0$

5. $P=-\log_3 \frac{Q}{81}, P_0=3$

Варіант 18

1.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$

2. $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

3. $\int e^{-x}\left(3^{-x}+e^x\right)dx$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

5. $\int \frac{arcctgx}{1+x^2}dx$

6. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}$

7. $\int xe^{-x}dx$

8. $\int x\ln x dx$

9. $\int \frac{2x+1}{x^2-10x+29}dx$

10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$

2.

1. $\int\limits_{-4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$ 2. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin\frac{x}{2} dx$ 4. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$

3. $\int\limits_{6}^{14} \sqrt[3]{7x-34}dx$ **4.** $y = tgx, x = \frac{\pi}{4}, y = 0$

5. $P = -0{,}5Q + 30, P_0 = 20$

Варіант 19

1.

1. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ 2. $\int \cos 5x dx$

3. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+1}} dx$ 4. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

5. $\int 10^{x-1} dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{3}{2}x}$

7. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 8. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$

9. $\int \frac{3x+1}{2x^2+8x+9} dx$ 10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{9x^2+24x+8}} dx$

2.

1. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{5x-4}}$ 2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8+1}}$

3. $\int\limits_{0}^{1} arcctgx dx$ 4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^5}}$

3. $\int\limits_{-1}^{7} \sqrt[3]{10x+11}dx$ **4.** $y = \frac{1}{1+x^2}, x = -1, x = 1$

5. $P = -4Q^2 - 8Q + 156, P_0 = 16$

Варіант 20

1.

1. $\int \frac{dx}{x^5}$
2. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)dx$
3. $\int \left(e^{-x} + e^{2x} - 2\right)dx$
4. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
5. $\int \frac{xdx}{9x^4 - 1}$
6. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 1)}$
7. $\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}dx$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$
9. $\int \frac{x-4}{x^2 - 2x - 10}dx$
10. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{4x - x^2}}dx$

2.

1. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}$
2. $\int_{0}^{3} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2 + 3x + 7}}dx$
3. $\int_{1}^{e^2} x^2 \ln x dx$
4. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

3. $\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{10x + 21}dx$ **4.** $y = x^2 - 2x$ і $x + y - 2 = 0$

5. $P = -4Q + 49, P_0 = 9$

Варіант 21

1.

1. $\int \frac{dx}{x^6}$
2. $\int \frac{3x-7}{x^2 + 4x + 5}dx$
3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^4}}$
4. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
5. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx$
6. $\int \frac{arctg^5 x}{1 + x^2}dx$

7. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}} dx$

8. $\int \ln(x+2) dx$

9. $\int \frac{2x-3}{x^2+6x+18} dx$

10. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+16x+7}} dx$

2.

1. $\int_{-4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}+1}$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} tg^2 2x dx$

3. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arccos x dx$

4. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3. $\int_{-3}^{5} \sqrt[3]{10x+31} dx$ **4.** $y = ctgx, x = \frac{3\pi}{4}, y = 0$

5. $P = \frac{20-Q}{3}, P_0 = 5$

Варіант 22

1.

1. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

2. $\int \cos(5x-1) dx$

3. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 9}$

4. $\int \frac{3-2x}{4x^2+9} dx$

5. $\int e^{-tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

6. $\int (1 - \sin 3x)^2 dx$

7. $\int (x-4) \cos 7x dx$

8. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

9. $\int \frac{3x-2}{x^2-8x+17} dx$

10. $\int \frac{x+3}{\sqrt{12+4x-x^2}} dx$

2.

1. $\int_{-6}^{1} \frac{dx}{\sqrt{6-5x}}$

2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$

3. $\int_{-1}^{1} x\,arctgx\,dx$

4. $\int_{0}^{\infty} \frac{2x-5}{x^2-5x+10}dx$

3. $\int_{0}^{8} \sqrt[3]{10x+1}\,dx$ **4.** $xy=8$ і $x+2y-10=0$

5. $P=-\log_2 \frac{Q}{64}, P_0=2$

Варіант 23

1.

1. $\int\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1\right)dx$

2. $\int\left(5^{\frac{x}{2}}+e^{3x}\right)dx$

3. $\int \frac{dx}{x(1+3\ln x)}$

4. $\int \frac{3-x}{3x^2-4}dx$

5. $\int \frac{dx}{x\ln 2x}$

6. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$

7. $\int xe^{2x}dx$

8. $\int x^2\cos x\,dx$

9. $\int \frac{2x+1}{4x^2+4x+17}dx$

10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-12x+9}}dx$

2.

1. $\int_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$

2. $\int_{1}^{e^2} \frac{\ln^4 x}{x}dx$

3. $\int_{0}^{3} x3^x\,dx$

4. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-2)^5}}$

3. $\int_{1}^{9} \sqrt[3]{10x-9}\,dx$ **4.** $y=x^2+3x$ і $x-y+3=0$

5. $P=-10Q+80, P_0=30$

Варіант 24

1.

1. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
2. $\int \frac{(1+x)dx}{x^2-9}$
3. $\int \frac{dx}{arctg\,2x(1+4x^2)}$
4. $\int\left(\ln x-\frac{1}{2x}\right)dx$
5. $\int \frac{2-x}{9+x^2}dx$
6. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
7. $\int e^{3x}\sin x dx$
8. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln x dx$
9. $\int \frac{3x+4}{x^2+2x-15}dx$
10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{-4x-x^2}}dx$

2.

1. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^4+1}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$
3. $\int_0^2 x\,arcctg\,x dx$
4. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$

3. $\int_2^{10}\sqrt[3]{10x-19}dx$ **4.** $y=tgx, x=0, y=-1$

5. $P=-\sqrt[3]{Q}+30, P_0=25$

Варіант 25

1.

1. $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2}dx$
2. $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x}dx$
3. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$
4. $\int \frac{tg^3 4x}{\cos^2 4x}dx$
5. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$
6. $\int \cos^7 x\sin x dx$

7. $\int x\sin 4x dx$

8. $\int x\ln(x+1)dx$

9. $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+17}dx$

10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{16+6-x^2}}dx$

2.

1. $\int_1^7 \frac{dx}{1+\sqrt{9x+1}}$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^4}dx$

4. $\int_0^{\infty} \frac{x-1}{(x+1)(x+3)}dx$

3. $\int_3^{11} \sqrt[3]{10x-29}dx$ **4.** $xy=6$ і $x+y-5=0$

5. $P=-Q^3+80, P_0=16$

Варіант 26

1.

1. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x^{-1}\right)dx$

2. $\int 7^{\cos x}\sin x dx$

3. $\int e^{-2x^3+1}\cdot x^2 dx$

4. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+5}$

5. $\int (\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^3+8}x^2 dx$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(9+tg^2 x)}$

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^4-9}}$

9. $\int \frac{2x+3}{x^2-2x-15}dx$

10. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{-12x+4x^2}}dx$

2.

1. $\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$

2. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5x-4}}$

3. $\int_0^1 x\arcsin dx$

4. $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$

3. $\int_0^8 \sqrt[3]{7x+8}dx$ **4.** $y=\ln x, x=e, y=-2$

5. $P=\frac{2Q+18}{Q-1}, P_0=7$

Варіант 27

1.

1. $\int \frac{dx}{3x-2}$
2. $\int e^x\left(1-e^{-x}+2^x\right)dx$
3. $\int \frac{x^2dx}{5x^3+1}$
4. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$
5. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$
6. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}$
8. $\int \sin 3x \cos 3xdx$
9. $\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}dx$
10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+7}}dx$

2.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
2. $\int_2^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-3}}dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos xdx$
4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2+1}$

3. $\int_0^3 e^{-x^2}dx$ **4.** $y=x^2-3x$ і $x+y-3=0$

5. $P=Q^2-55Q+750, P_0=300$

Варіант 28

1.

1. $\int \sin 5xdx$
2. $\int \frac{dx}{1-3x}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x}}$

4. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$

5. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x+1}$

6. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

8. $\int x^2 \sin 3x dx$

9. $\int \frac{2x-1}{x^2-5x+4}dx$

10. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-8x+15}}dx$

2.

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$

3. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $y = ctgx, x = \frac{\pi}{2}, y = -1$

5. $P = -2Q^3 + 375, P_0 = 125$

Варіант 29

1.

1. $\int \frac{dx}{3x+7}$

2. $\int \left(e^x - e^{-x} - 2\right)dx$

3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

5. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

6. $\int x 2^{x^2} dx$

7. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

8. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$

9. $\int \frac{3x-4}{x^2+7x+12}dx$

10. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x-4}}dx$

2.

1. $\int_{-1}^{1} 3x\,dx$

2. $\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+1}$

3. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} arctg\,2x\,dx$

4. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

3. $\int_{-3}^{2} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$ **4.** $y=\frac{1}{1+x^2}, y=\frac{1}{5}$ **5.** $P=\frac{Q+18}{2Q}, P_0=5$

Варіант 30

1.

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)^6}$

2. $\int \frac{x^2dx}{2x^3+1}$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$

4. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$

5. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$

6. $\int tgx\,dx$

7. $\int xe^{-2x}dx$

8. $\int arctg\frac{x}{2}dx$

9. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x+6}dx$

10. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{15-4x-4x^2}}dx$

2.

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

2. $\int_{2}^{5} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$

3. $\int_{0}^{\frac{3}{2}} \arcsin 2x\,dx$

4. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+4)}$

3. $\int_{0}^{3} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^4+5}}dx$ **4.** $y=x^2-4x$ і $x+y-4=0$ **5.** $P=4Q^3+7, P_0=115$

10. Методичні вказівки до виконання творчої роботи №4 на тему «Геометричні та економічні застосування інтеграла»

Творча робота передбачає самостійне виконання завдань з вищої математики з використанням комп’ютерного програмного засобу GRAN1. Один варіант завдання виконується мікрогрупою студентів, що складається з 4-5 осіб.

Обчисленння визначених інтегралів в GRAN1

Для обчислення визначених інтегралів виду $\int_a^b f(x)dx$ можна використовувати послугу «Операції/Інтеграли/Інтеграл...” (рис. 5.1).

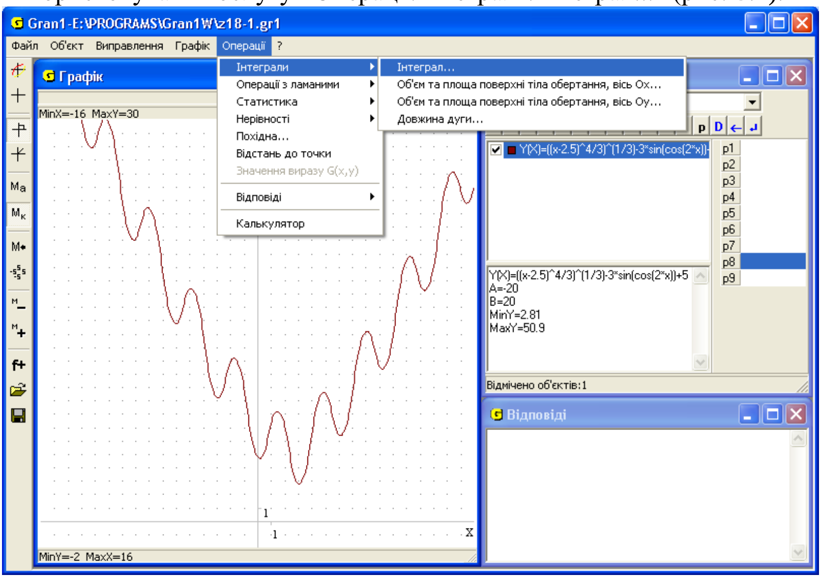


Рис. 5.1.

Дана послуга призначена для обчислення визначених інтегралів від функцій, заданих явно у вигляді $y = f(x)$, поліномів, що наближають таблично задані функції, щільностей розподілу статистичних ймовірностей (графіками яких є гістограми). Інтеграл обчислюється для відміченої функції, позначення якої у вікні «Список об’єктів» відмічено міткою ☑. Якщо таких об’єктів немає, то інтеграл обчислюється для поточної функції (на позначення якої встановлений вказівник об’єктів).

Якщо відмічено кілька функцій, то значення інтегралів, знайдених для кожної окремої функції, додаються. Останнє дає можливість обчислювати інтеграли для функцій, заданих різними виразами на різних відрізках. Якщо вказані межі інтегрування функції виходять за відрізок, на якому задана функція, то інтеграл обчислюється на частині відрізка, спільній для двох заданих. Наприклад, якщо функція задана на відрізку [-5, 5], а межі інтегрування вказані [0, 10], то значення інтеграла буде обчислено на відрізку [0, 5].

Після звернення до послуги «Операції/Інтеграли/Інтеграл...» з’являється допоміжне вікно «інтегрування», у якому потрібно ввести значення «А=» – лівої межі відрізка інтегрування і значення «В=» – правої межі відрізка інтегрування (рис. 5.2.).

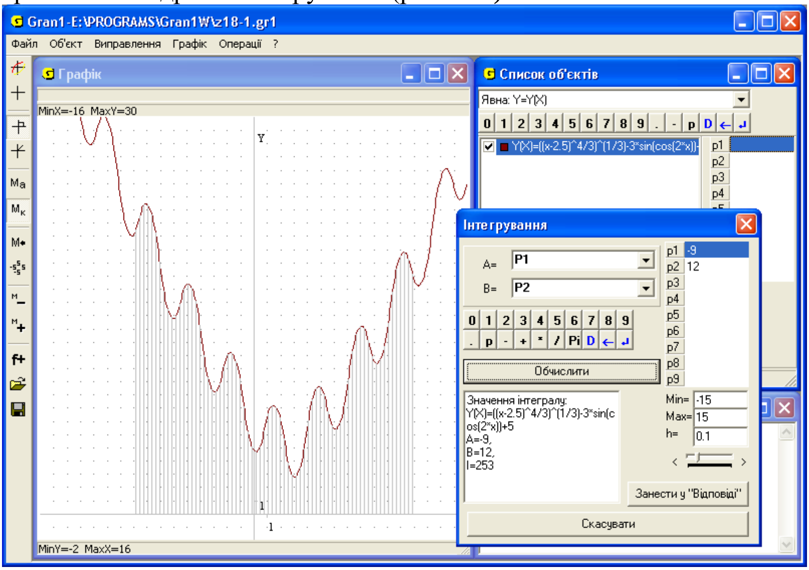


Рис. 5.2.

Після виконання послуги та звернення до пункту «*Занести у “Відповіді”*» у вікні «Відповіді» з’являється вираз функції, для якої проводилося обчислення інтегралу, вказані межі інтегрування, а також знайдене значення визначеного інтеграла I .

Якщо при цьому у вікні «Графік» був побудований графік функції, інтеграл від якої обчислюється, то область, обмежена графіком функції, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$, заштриховується (рис. 5.2.).

Обчисленння довжини дуги кривої в GRAN1

У програмі GRAN1 передбачена спеціальна послуга «Операції / Інтеграли /Довжина дуги...», звернення до якої дає можливість визначити довжину дуги між двома вказаними точками.

При цьому відповідна залежність може бути задана явно, параметрично, в полярних координатах, у вигляді полінома, що наближає таблично задану функцію.

Для використання послуги необхідно ввести межі, в яких змінюється значення аргументу, так само, як це робилось при обчисленні інтегралу.

Обчисленння об'ємів і площ поверхонь тіл обертання в GRAN1

Для обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл, обмежених поверхнями, утвореними обертанням ламаних ліній навколо однієї з координатних осей, призначені послуги «Операції/Операції з ламаними/Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ox» і «Операції /Операції з ламаними/Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Oy». При цьому ламана не повинна перетинати вісь обертання.

Якщо ламана незамкнена, тоді обчислюється площа поверхні, описуваної ламаною, і об'єм тіла, що утворилося б при обертанні замкненої ламаної, одержуваної з заданої після проектування її вільних кінців на вісь обертання і вставляння цих точок-проекцій між вільними кінцями ламаної (обидві точки-проекції з'єднуються зі своїми прообразами і між собою).

Приклади розв'язання задач за допомогою GRAN1

Приклад 1. Обчислити площу, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 3$, $y = 0$.

Алгоритм розв'язування

1. Вводимо задані функції ($y = x\hat{}2$, $y = 1/x$, $y = 0$) та будуємо їх графіки.
2. Шукана площа складається з двох областей, кожну з яких обчислюємо окремо. Звертаємось до послуги «Операції / Інтеграли / Інтеграл...» і вказавши межі інтегрування першої області $a = 0, b = 1$ одержимо $I_1 = 0{,}333$ (рис. 5.3), межі інтегрування другої області $a = 1, b = 3$: $I_2 = 1{,}099$ (рис. 5.4).
3. Площа шуканої фігури обчислюється як сума знайдених інтегралів, взятих за абсолютною величиною: $S = 0{,}333 + 1{,}099 = 1{,}432$ (кв. од.).

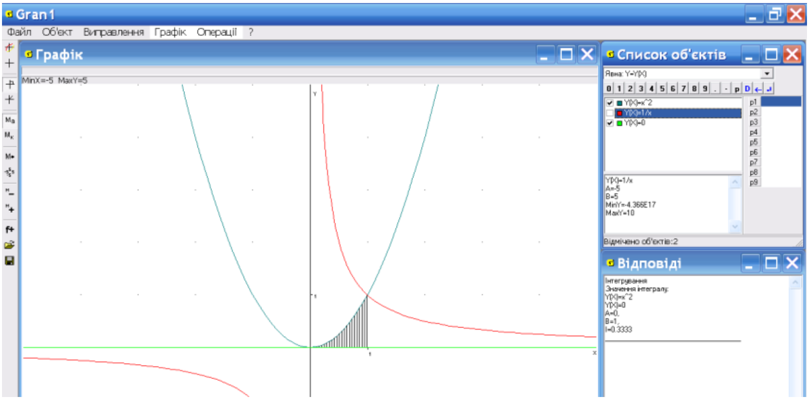


Рис. 5.3.

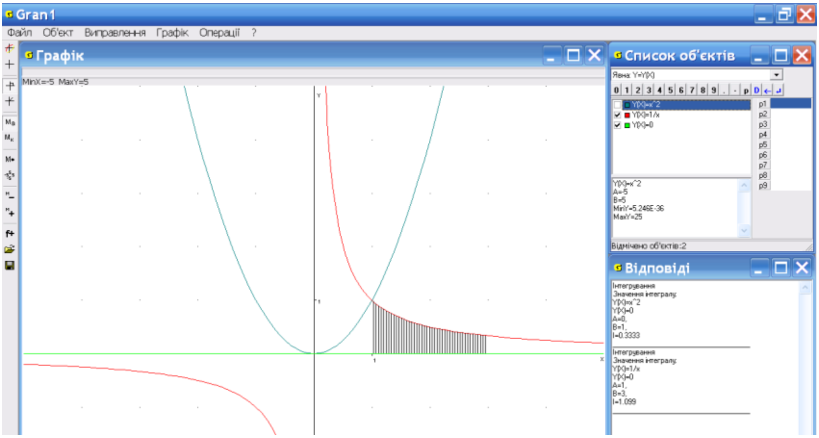


Рис. 5.4.

Приклад 2. Обчислити довжину дуги параболи $y = x^2$ від точки (0, 0) до точки (3, 9).

Задача зводиться до обчислення інтеграла $\int_0^3 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$.

Використовуючи послугу "Операції / Інтеграли / Інтеграл...", одержимо $\int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 9.747$ (рис. 5.5).

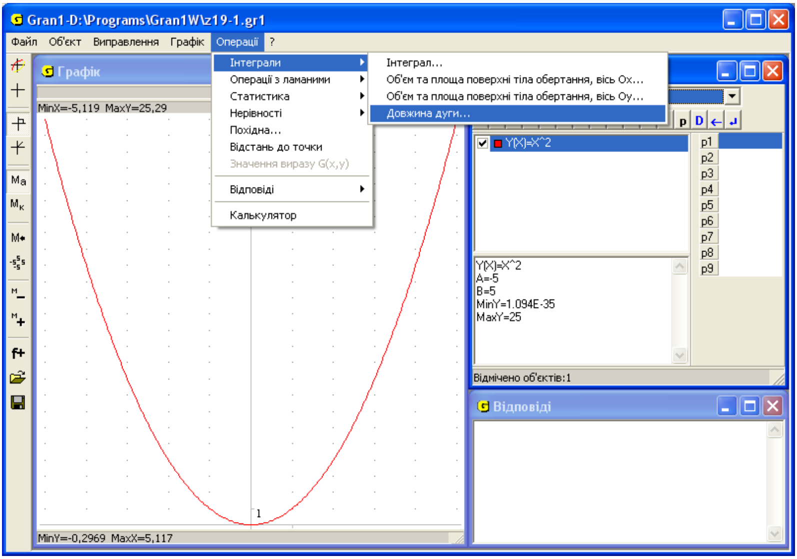


Рис. 5.5.

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням кривої $y = \frac{x}{3} + \cos(2x) + 3$ навколо осі Ox, в межах від $x_1 = -\pi$ до $x_2 = \pi$.

Алгоритм розв'язування

1. Будуємо графік заданої функції.

2. Звертаємося до послуги «Операції / Інтеграли / Об'єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Ox ...», вказавши задані межі інтегрування $a = -\pi$, $b = \pi$. В результаті одержимо $V \approx 194{,}7$, $S \approx 203{,}4$ (рис. 5.6).

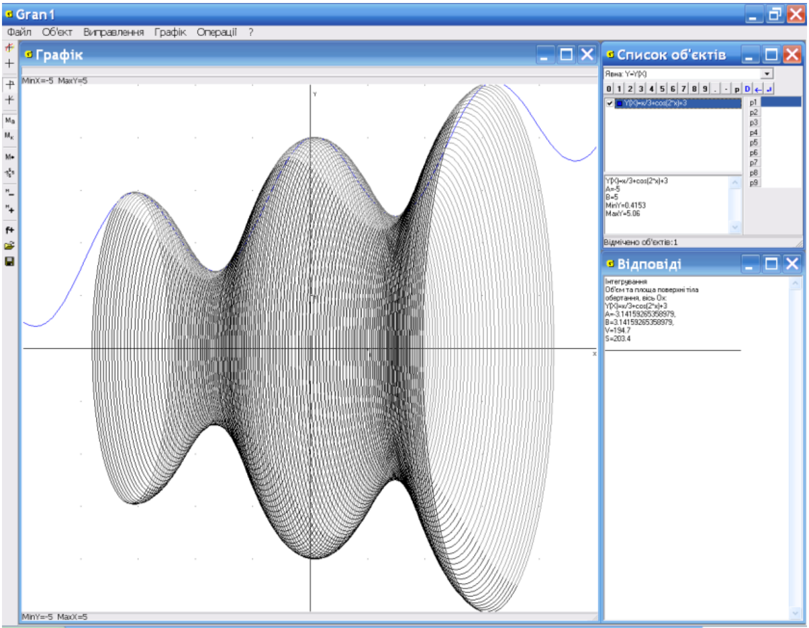


Рис. 5.6.

Приклад 4. За даними досліджень про розподіл доходів в одній з країн Європи крива Лоренца описується рівнянням $y = \dfrac{x}{3-2x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу доходів населення (коефіцієнт Джині).

Алгоритм розв'язування

1. Будуємо криву Лоренца (графік заданої функції та графік функції $y = x$).

2. Коефіцієнт Джині обчислюється за формулою (рис. 5.7):

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{0{,}5} = 1 - 2S_{OBAC}$$

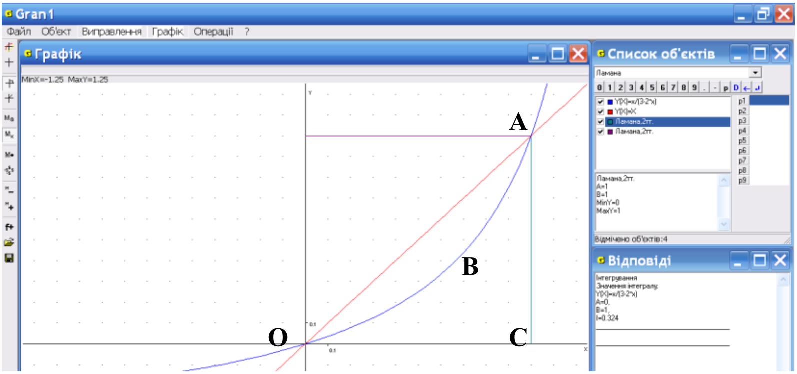


Рис. 5.7.

3. Площу шуканої фігури обчислимо за допомогою визначеного інтеграла (рис. 5.8). Тоді коефіцієнт Джині становитиме: $k = 1 - 2 \cdot 0{,}324 = 0{,}352$.

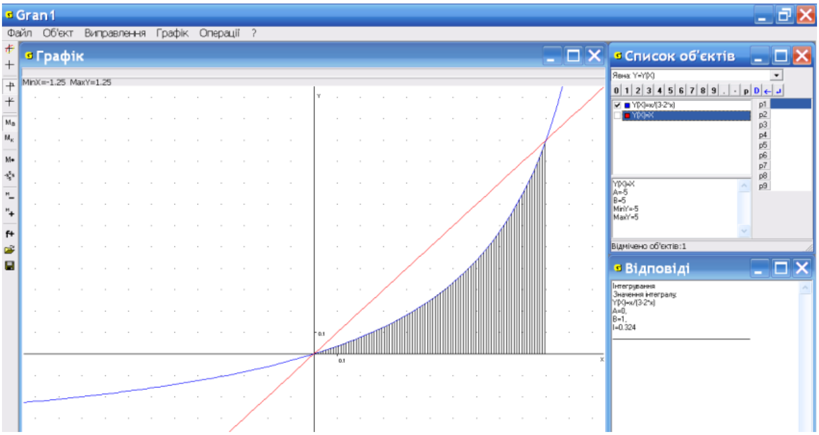


Рис. 5.8.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО ТВОРЧОЇ РОБОТИ №4

<u>Варіант 1</u>

<u>Задача 1.</u> Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{4}{x}$,

$y = 4x$, $y = \frac{1}{4}x$ (фігура розташована в першій чверті).

Задача 2. За даними досліджень про розподіл доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 0{,}85x^2 + 0{,}15x$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині. Зробити висновок про розподіл доходів населення.

Варіант 2

Задача 1. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

Задача 2. За даними досліджень про розподіл доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 2^x - 1$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині. Зробити висновок про розподіл доходів населення.

Варіант 3

Задача 1. Обчислити об'єм тіла, утворених при обертанні навколо осі Ох плоскої фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $xy = 8$, $y = 0, x = 4$.

Задача 2. За даними досліджень про розподіл доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 0{,}7x^3 + 0{,}3x^2$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині. Зробити висновок про розподіл доходів населення.

Варіант 4

Задача 1. Обчислити площу поверхні обертання, отриманої при обертанні навколо осі Ох кривої $9y^2 = x(3-x)^2$ при $x \in [0;3]$.

Задача 2. За даними досліджень про розподіл доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 7 - \sqrt{49 - x^2}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині. Зробити висновок про розподіл доходів населення.

Варіант 5

Задача 1. Обчислити об'єм тіла, утворених при обертанні навколо осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями: $y = \sqrt{6x}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x = 0$.

Задача 2. За даними досліджень про розподіл доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 5 - \sqrt{25 - x^2}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині. Зробити висновок про розподіл доходів населення.

Модуль 6. Диференціальні рівняння

1. Мета вивчення модуля:

❖ ознайомитись та засвоїти теоретичні основи апарату звичайних диференціальних рівнянь та набути практичних вмінь і навичок розв'язування основних типів задач та прикладних задач економічного змісту.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

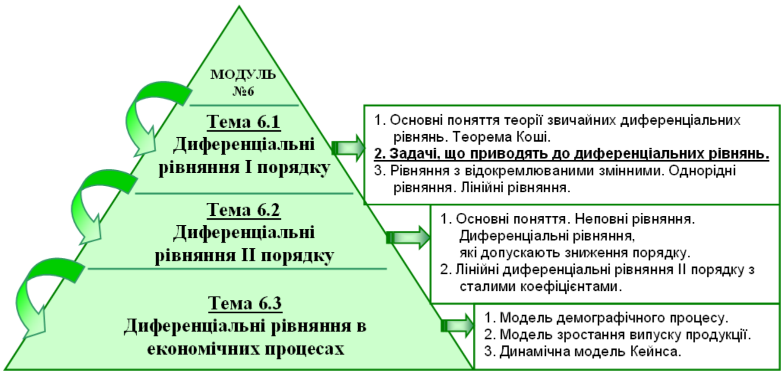
☺ знати: фундаментальні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь, основні типи диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування.

☺ вміти: розпізнавати відповідний тип диференціального рівняння та розв'язувати його; самостійно знаходити та опрацьовувати інформаційні джерела, необхідні для вивчення модуля.

☺ застосовувати: одержані математичні знання під час розв'язування задач економічного змісту, пов'язаних із сферою майбутньої професійної діяльності (модель демографічного процесу, модель зростання випуску продукції, динамічна модель Кейнса).

2. Структура і зміст 6 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.



3. Опорні знання

Для його розуміння Вам необхідні знання і навички одержані під час вивчення 5 модуля.

Тест-перевірка знань

1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на $[a,b]$,

якщо:

А	Б	В	Г
для $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$	для $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) \neq f(x)$	для $\forall x \in [a,b]$ $f'(x) = F(x)$	для $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) > f(x)$

2. Невизначений інтеграл $\int f(ax+b)dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{a}F(ax+b)+C$	$F(ax+b)+C$	$\frac{1}{b}F(ax+b)+C$	$aF(ax+b)+C$

3. Невизначений інтеграл $\int cos(2x+3)dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}\sin(2x+3)+C$	$\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$	$\sin(2x+3)+C$	$-2\sin(2x+3)+C$

4. Невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}+C$	$\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C$	$\frac{3}{2}\sqrt{\ln^3 x}+C$	$2\sqrt{\ln x}+C$

5. Невизначений інтеграл $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$	$\frac{2}{3}\arcsin\frac{2x}{3}+C$	$\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$	$\frac{3}{2}\arcsin\frac{3x}{2}+C$

6. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$2\,arctg\sqrt{x}+C$	$2\ln\lvert x-1\rvert+\ln x+C$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right\rvert+C$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right\rvert+C$

7. Який вигляд має формула Ньютона-Лейбніца, що виражає зв'язок між визначеним інтегралом $\int_a^b f(x)dx$ і відповідним невизначеним інтегралом $\int f(x)dx = F(x)+C$:

А	Б
$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(a) - F(b)$	$\int_a^b f(x)dx = f(x)\Big\vert_a^b = f(b) - f(a)$
В	**Г**
$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(x) - F(b) - F(a)$	$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$

8. Чому дорівнює визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}dx$:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$	$\ln\frac{5}{4}$	$\ln 5 - \ln 4$	$2\ln\frac{5}{4}$

9. Чому дорівнює визначений інтеграл $\int_1^e x\ln x\,dx$:

А	Б	В	Г
$-\frac{e^2+1}{4}$	$\frac{e^2+1}{4}$	$\frac{e^2-1}{2}$	$\frac{e^2}{2}$

10. Чому дорівнює визначений інтеграл $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$:

А	Б	В	Г
2/3	$\pi/2$	$-\pi/3$	$-1/3$

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П. 10 (стор. 315-350)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 12 (стор. 410-437)
Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.	Розділ 12 (стор. 614-662)

Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 517 с.	Частина 2, розділ 6 (тема 26-27) (стор. 436-463)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 26-27 (стор. 192-208)

5. Основні поняття модуля

Тема 6.1. Диференціальне рівняння n-го порядку, порядок диференціального рівняння, розв’язок (інтеграл) диференціального рівняння, загальний розв’язок, частинний розв’язок, задача про вільне падіння матеріальної точки, задача про нагромадження капіталу, задача про рух фондів, задача про рекламу, диференціальне рівняння І порядку, початкові умови, задача Коші, інтегральна крива, рівняння з відокремлюваними змінними, однорідна функція, однорідне рівняння, лінійне рівняння, рівняння Бернуллі.

Тема 6.2. Диференціальне рівняння ІІ порядку, неповне диференціальне рівняння, лінійне однорідне рівняння ІІ порядку з сталими коефіцієнтами, структура загального розв’язку лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами, лінійне неоднорідне рівняння ІІ порядку з сталими коефіцієнтами, метод невизначених коефіцієнтів.

Тема 6.3. Закон зміни чисельності населення в часі, модель демографічного процесу, модель зростання випуску продукції, модель Кейнса.

6. Опорний конспект модуля

Диференціальні рівняння

<u>I порядку</u>: $F(x,y,y')=0$ або $y'=f(x,y)$

<u>З відокремлюваними змінними</u>: $y'=f(x)g(y)$ або $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$.

<u>Однорідні</u>: $f(x,y)dx=g(x,y)dy$

Однорідна функція: $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Підстановка: $y=tx$.

<u>Лінійні</u>: $y'+p(x)y=g(x)$.

Підстановка: $y(x)=u(x)v(x)$.

Рівняння Бернуллі: $y'+p(x)y=g(x)y^{\alpha},\alpha\neq 0,\alpha\neq 1$

<u>II порядку</u>: $F(x,y,y',y'')=0$ або $y'=f(x,y,y')$

Допускають зниження порядку: <u>1.</u> $y''=f(x)\rightarrow\ y=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx$

<u>2.</u> $y''=f(x,y')\rightarrow$ заміна: $y'=p(x)$ <u>3.</u> $y''=f(y,y')\rightarrow$ заміна: $y'=p(y)$

Лінійні з сталими коефіцієнтами:

<u>Однорідні</u>: $y''+py'+qy=0$

Характеристичне рівняння:

$k^2+pk+q=0$ (розв'язки k_1,k_2)

Загальний розв'язок диф. рівняння:

1. $k_1\neq k_2\rightarrow\ y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2. $k_1=k_2=k\rightarrow\ y=e^{kx}(C_1+C_2x)$
3. $k_1=\alpha+i\beta,k_2=\alpha-i\beta\rightarrow y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

<u>Неоднорідні</u>: $y''+py'+qy=f(x)$

Загальний розв'язок диф. рівняння:

$y_{загальний}=y_{однорідне}+y_{частинний(неоднорідне)}$

Методи знаходження частинного розв'язку: метод невизначених коефіцієнтів, метод Лагранжа (варіації довільних сталих)

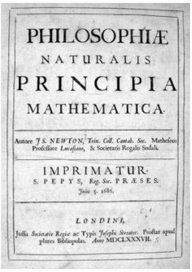
<u>Вищих порядків</u>: $y^{(n)}=f(x,y,y',..,y^{n-1})$ або $F(x,y,y',..,y^{n})=0$

Функція *f(x)*	Частинний розв'язок
$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx_n$	1. $k_1\neq 0,k_2\neq 0\rightarrow\ y^*=A_0+A_1x+...+A_n$ 2. $k_1\neq k_2=0\rightarrow y^*=x(A_0+A_1x+...+A)_n$
$f(x)=e^{\alpha x}$	1. $y^*=Ae^{\alpha x}$, якщо $k_1\neq\alpha,k_2\neq\alpha$ 2. $y^*=Axe^{\alpha x}$, якщо $k_1=\alpha,k_2\neq\alpha$ 3. $y^*=Ax^2e^{\alpha x}$, якщо $k_1=k_2=\alpha$
$f(x)=M\cos bx+N\sin bx$	1. $\pm\beta i\neq k_{1,2}\rightarrow y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ 2. $\pm\beta i=k_{1,2}\rightarrow y^*=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

З історії…

Диференціальні рівняння винайдені Ісаком Ньютоном (1642-1727). Ньютон вважав цей свій винахід настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми, зміст якої в сучасних термінах можна вільно передати так: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями».

Основним аналітичним досягненням Ньютона було розкладання всіляких функцій в ступеневі ряди (зміст другої анаграми Ньютона в тому, що для розв’язання будь-якого рівняння потрібно підставити в рівняння ряд і прирівняти члени однакового степеня). Особливе значення мала відкрита ним формула бінома Ньютона (зрозуміло, не тільки з цілими показниками, для яких формулу знав, наприклад, Вієт (1540-1603), але і, що особливо важливе, з дробовими і від’ємними показниками). Ньютон розклав в «ряди Тейлора» всі основні елементарні функції (раціональні, радикали, тригонометричні, експоненту і логарифм). Це, разом з складеною ним таблицею первісних (яка перейшла в майже незмінному вигляді в сучасні підручники аналізу), дозволяло йому, за його словами, порівнювати площі будь-яких фігур «за половину чверті години».


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Ньютон вказував, що коефіцієнти його рядів пропорційні послідовним похідним функції, але не зупинявся на цьому детально, оскільки він справедливо вважав, що всі обчислення в аналізі зручніше проводити не за допомогою кратних диференціювань, а шляхом обчислення перших членів ряду. Для Ньютона зв’язок між коефіцієнтами ряду і похідними був скоріше засобом обчислення похідних, чим засобом складання ряду. Одним з найважливіших досягнень Ньютона є його теорія сонячної системи, викладена в «Математичних принципах натуральної філософії» («Principia») без допомоги математичного аналізу. Зазвичай вважають, що Ньютон відкрив за допомогою свого аналізу закон всесвітнього тяжіння. Насправді Ньютону належить лише доказ еліптичності орбіт в полі тяжіння за законом зворотних квадратів: сам цей закон був вказаний Ньютону Гуком (1635-1703) і, мабуть, вгадувався ще декількома вченими.

З величезного числа робіт XVIII століття з диференціальних рівнянь виділяються роботи Леонарда Ейлера (1707-1783) і Жозефа Луї Лагранжа (1736-1813). У цих роботах була передусім розвинена теорія малих коливань, а отже – теорія лінійних систем диференціальних рівнянь.

Коли була доведена нерозв’язність алгебраїчних рівнянь в радикалах, *Жозеф Ліувілль* (1809-1882) побудував аналогічну теорію для диференціальних рівнянь, встановивши неможливість рішення низки рівнянь (зокрема таких класичних, як лінійні рівняння другого порядку) в елементарних функціях і квадратурі. Пізніше норвезький математик Софус Лі (1842-1899), аналізуючи питання про інтегрування рівнянь в квадратурі, прийшов до необхідності детально досліджувати групи дифеоморфізмів (що отримали згодом ім’я груп Лі) – так з теорії диференціальних рівнянь виникла одна з найбільш плідних областей сучасної математики, подальший розвиток якої був тісно пов’язаний зовсім з іншими питаннями.

Новий етап розвитку теорії диференціальних рівнянь починається з робіт

французького математика *Анрі Пуанкаре* (1854-1912), створена ним «якісна теорія диференціальних рівнянь» разом з теорією функцій комплексних змінних привела до заснування сучасної топології. Якісна теорія диференціальних рівнянь, або, як тепер її частіше називають, теорія динамічних систем, зараз розвивається найактивніше і має найбільш важливі застосування теорії диференціальних рівнянь в природознавстві.

7. Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Дати означення загального розв’язку, частинного розв’язку, загального інтеграла диференціального рівняння?
4. Що таке інтегральна крива, її властивості?
5. В чому полягає задача Коші для диференціального рівняння I порядку, II порядку?
6. Як формулюється теорема існування і єдиності розв’язку задачі Коші для рівнянь I порядку?
7. Яке диференціальне рівняння I порядку називається рівнянням з відокремлюваними змінними? Як воно розв’язується?
8. Яке диференціальне рівняння I порядку називається однорідним?
9. Яке диференціальне рівняння I порядку називається лінійним?
10. Як формулюється теорема про структуру розв’язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь I порядку?
11. Які є основні типи й методи інтегрування диференціальних рівнянь II порядку, що допускають зниження степеня?
12. Як записується загальний розв’язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку з сталими коефіцієнтами в різних випадках?
13. Як формулюється теорема про структуру розв’язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь II порядку?
14. В чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв’язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння II порядку?
15. В яких економічних моделях застосовуються методи знаходження розв’язків диференціальних рівнянь?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Обрати формулу диференціального рівняння n-го порядку в загальному випадку:

А	Б	В	Г
$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$	$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$	$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$	$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = 0$

2. Диференціальне рівняння з відокремленими змінними має вигляд:

А	Б
$f(x)dy + g(x)dx = 0$	$f(x)dy = g(y)dy$
В	Г
$y' + p(x)y = q(x)$	$M(x)N(x)dx + P(y)Q(y)dy = 0$

3. Із поданих рівнянь обрати рівняння з відокремлюваними змінними:

А	Б
$f(x)dy + g(x)dx = 0$	$f(x)dy + g(y)dy = 0$
В	Г
$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$	$M(x)N(x)dx + P(y)Q(y)dy = 0$

4. Лінійне диференціальне рівняння I порядку можна записати у вигляді:

А	Б	В	Г
$y' + p(x)y = 0$	$y' + p(x)y = q(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = p(x)xy$	$y' = f(x)g(y)$

5. Задано лінійне диференціальне рівняння I порядку $y' + P(x)y = Q(x).$ У якому вигляді слід шукати розв'язок такого рівняння:

А	Б
$y = u + v$, де $u = u(x), v = v(x)$	$y = \dfrac{u}{v}$, де $u = u(x), v = v(x)$
В	Г
$y = uv,$ де $u = u(x), v = v(x)$	$y = u - v$, де $u = u(x), v = v(x)$

6. Рівняння Бернуллі має вигляд:

А	Б
$y' + p(x)y = q(x)$	$y' + p(x)y = q(x)y$
В	Г
$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \alpha \neq 1, \alpha \neq 0$	$y' + p(x)y = 0$

7. Рівняння виду $y'' = f(x)$ розв'язується наступним методом:

А	Б	В	Г
двократним інтегруванням	заміною $y' = p(x)$	заміною $y' = p(y)$	заміною $y'' = p(y)$

8. Диференціальне рівняння II порядку, що допускають зниження порядку і не містять явною функцію y, має вигляд:

А	Б	В	Г
$F(y, y', y'') = 0$	$F(x, y', y'') = 0$	$F(y, y') = 0$	$y'' = f(y, y')$

9. Нехай задано лінійне однорідне диференціальне рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' + py' + gy = 0$. Характеристичне рівняння, яке йому відповідає, має вигляд:

А	Б	В	Г
$k^2 - pk + g = 0$	$k^2 + pk + g = 0$	$k^2 + pk - g = 0$	$k^2 - pk - g = 0$

10. Якщо корені характеристичного рівняння $k^2 + pk + g = 0$ дійсні і рівні, тоді розв'язок рівняння шукається у вигляді:

А	Б	В
$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Практична частина:

11. Диференціальне рівняння $x^2 yy' = x + 1$ після розділення змінних набуде вигляду:

А	Б	В	Г
$x^2 y' = \frac{x+1}{y}$	$y' = \frac{x+1}{x^2 y}$	$x^2 ydy = (x+1)dx$	$ydy = \frac{x+1}{x^2} dx$

12. Визначити тип диференціального рівняння $y' = \sin x - y$:

А	Б	В	Г
однорідне	лінійне	рівняння Бернуллі	рівняння з відокремлюваними змінними

13. Визначити, яке з даних диференціальних рівнянь є рівнянням з відокремлюючими змінними:

А	Б
$xydx + dy = 0$	$(x + y)dx + ydy = 0$
В	Г
$y' + x^2 y = \sin x$	$x^2 y' + xy = y^2$

14. Визначити, яке з даних рівнянь є однорідним відносно змінних диференціальних рівнянь I порядку:

А	Б	В	Г
$y' = xy$	$y' = xy + x^2$	$x^2 yy' = x^3 + y^3$	$x^2 y' = 2xy + y^2$

15. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $y'e^{-x} = 1$:

А	Б	В	Г
$y=e^{x}+C$	$y=e^{-x}+C$	$y=e^{x}$	$y=e^{-x}$

16. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння I порядку $y'=3$, $y(1)=1$:

А	Б	В	Г
y=3x-2	*y=3x+3*	*y=3x+5*	*y=3x-1*

17. Загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку $y''=x+e^{x}$ має вигляд:

А	Б
$y=\frac{x^3}{6}+e^{x}+C_1x+C_2$	$y=\frac{x^3}{6}+e^{x}+C_1$
В	Г
$y=\frac{x^3}{6}+e^{x}$	$y=\frac{x^3}{6}+e^{x}+C_1x$

18. Загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку $y''+5y'=0$ має вигляд:

А	Б
$y=C_1e^{x}+C_2e^{5x}$	$y=C_1+C_2e^{-5x}$
В	Г
$y=C_1e^{-5x}$	$y=C_1e^{-8x}+C_2e^{5x}$

19. Розв'язати рівняння з сталими коефіцієнтами $y''-10y'+25y=0$:

А	Б
$y=(C_1+C_2x)e^{5x}$	$y=(C_1+C_2x)e^{-5x}$
В	Г
$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x}$	$y=C_1+C_2e^{-5x}$

20. Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння II порядку $y''+5y'=x^2-4$ має вигляд:

А	Б
$y^*=Ax+B$	$y^*=Ax^2+Bx+C$
В	Г
$y^*=(Ax^2+Bx+C)x$	$y^*=(Ax+B)e^{x}$

9. Індивідуальні домашні завдання №6

<u>Базовий рівень:</u>

Завдання 1. Перевірити, що функція є розв'язком диференціального рівняння.

Завдання 2. Розв'язати диференціальні рівняння I порядку: 1. З відокремлюваними змінними 2. Однорідне 3. Лінійне.

<u>Підвищений рівень:</u>

Завдання 3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння II порядку з сталими коефіцієнтами: 1. Однорідне 2. Неоднорідне.

<u>Поглиблений рівень:</u>

Завдання 4. Розв'язати задачу економічного змісту.

Варіанти завдань

Варіант 1

1. Функція: $y = \frac{1}{12x} + C_1 x^5 + C_2 x$, рівняння: $x^2 y'' - 5xy' + 5y = \frac{1}{x}$.

2. 1. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ 2. $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$ 3. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{y}$

3. 1. $y'' + 5y' + 6y' = 0$ 2. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x$, $y(0) = -2, y'(0) = -2$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 40 - 2p - 4\frac{dp}{dt}$, $x = 30 + 2p + \frac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу $p = 7{,}5$.

Варіант 2

1. Функція: $y = x\sin(C - x)$, рівняння: $xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$.

2. 1. $xy' + 2y = 2xyy'$ 2. $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$ 3. $y' - \frac{4y}{x} = \frac{1}{x}$

3. 1. $y'' - 7y' + 6y = 0$ 2. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$, $y(0) = 3, y'(0) = 1/2$

4. Чисельність населення $y = y(t)$ селища міського типу описується рівнянням $\frac{dy}{dt} = 0{,}2y\left(1 - 10^{-4} y\right)$, де час t вимірюється в роках. Встановити число років, коли населення селища збільшиться в 4 рази, якщо в початковий момент часу в селищі мешкало 1000 осіб.

Варіант 3

1. Функція: $y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}x^3)e^{2x}$, рівняння: $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

2. 1. $(3x-1)dy+y^2dx=0$ 2. $y'=\dfrac{y^2}{x^2+xy}$ 3. $y'+\dfrac{y}{x}=xe^{\frac{x}{2}}$

3. 1. $y''-25y=0$ 2. $y''-2y'+5y=x^2+1$, $y(0)=-3, y'(0)=-1/5$

4. Знайти вираз залежності обсягу реалізованої продукції $y=y(t)$ і його значення при *t=2*, якщо відомо, що крива попиту має вигляд $p(y)=3-2y$, коефіцієнт пропорційності $l=2/3$, норма інвестицій *m=0,6, y(0)=1*.

Варіант 4

1. Функція: $y=(C+x)/(1-Cx)$, рівняння: $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

2. 1. $a(xy'+2y)=xyy'$ 2. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$ 3. $y'-2y=e^{2x}$

3. 1. $y''+2y'-15y=0$ 2. $y''+2y'-8y=3\sin x$, $y(0)=-1, y'(0)=-3/2$

4. Знайти функцію попиту, якщо $E_p=-2=const$ і задана ціна *p=10* при деякому значенні попиту *y=4*.

Варіант 5

1. Функція: $y=(C_1+C_2x)e^x$, рівняння: $y''-2y'+y=0$.

2. 1. $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy=0$ 2. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$ 3. $y'=x^2+y$

3. 1. $y''-2y'=0$ 2. $y''-6y'+9y=\cos 2x$, $y(0)=1, y'(0)=1/3$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y=100-3p+4\dfrac{dp}{dt}$, $x=120+2p+\dfrac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу $p=10$.

Варіант 6

1. Функція: $y=C_1\sin x+C_2\cos x$, рівняння: $y''+y'=0$.

2. 1. $\sqrt[3]{1-2x^3+x^6}dy=x^2y^2dx$ 2. $xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$ 3. $4y'+\dfrac{2y}{x+1}=\dfrac{x^3}{y}$

3. 1. $y''+2y'+y=0$ 2. $y''-4y'+5y=2e^{3x}$, $y(0)=2, y'(0)=-3/4$

4. В селищі з населенням 3000 осіб розповсюдження простудних захворювань описується рівнянням $\dfrac{dy}{dt}=0{,}001y(3000-y)$, де y – кількість хворих в момент часу *t*; *t* – число тижнів. Визначити час, коли захворіє 70% населення, якщо в початковий момент їх було троє.

Варіант 7

1. Функція: $\arcsin\frac{y}{x}=Cx$, рівняння: $xy'-y+x\sqrt{x^2-y^2}=0$.

2. 1. $e^{x+y}dx+ydy=0$ 2. $(y-x)ydx+x^2dy=0$ 3. $y'+\frac{(1-4x)y}{x^2}=3$

3. 1. $y''-6y'+9y=0$ 2. $y''-4y'+3y=3e^{2x}$, $y(0)=2, y'(0)=-1$

4. З'ясувати, через який проміжок часу обсяг реалізованої продукції збільшиться в 2 рази порівняно з початковим, якщо значення коефіцієнта пропорційності k=0,1 (в рівнянні $y'=ky$, де y – обсяг виробництва). На скільки відсотків потрібно збільшити норму інвестицій, щоб проміжок часу, який необхідний для подвоєння обсягу реалізованої продукції, зменшився на 20%?

Варіант 8

1. Функція: $x^2+y^2=C$, рівняння: $y'=-\frac{x}{y}$.

2. 1. $y'e^{-x}=x-1$ 2. $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{x}{y}$ 3. $y'+\frac{6xy}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^4}$

3. 1. $y''+36y=0$ 2. $y''-4y'+4y=-x^2+3x$, $y(0)=3, y'(0)=4/3$

4. Знайти функцію попиту, якщо $E_p=-0{,}5=const$ і задана ціна *p=5* при деякому значенні попиту *y=2*.

Варіант 9

1. Функція: $y=\frac{5}{x}+6$, рівняння: $y''+\frac{2}{x}y'=0$.

2. 1. $4xy=(x^2+1)y'$ 2. $(y^2-x^2)dx+2xydy=0$ 3. $\frac{dy}{dx}-2xy=x^3$

3. 1. $y''-2y'+5y=0$ 2. $y''+2y'+10y=-\sin 2x$, $y(0)=0, y'(0)=3/4$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y=54-4p-3\frac{dp}{dt}$, $x=26+3p+2\frac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу *p = 6* .

Варіант 10

1. Функція: $y=(1+2x+3x^2+\frac{x^3}{6})e^x$, рівняння: $y'''-3y''+3y'-y=e^x$.

2. 1. $(x^2+1)y'=xy$ 2. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$ 3. $y'-\frac{2y}{x+a}=(x+a)^3$

3. 1. $y''+6y'+10y=0$ 2. $y''+y'-6y=x^2-1$, $y(0)=0, y'(0)=1$

4. Чисельність населення $y = y(t)$ острова описується рівнянням $\frac{dy}{dt} = 0{,}05y\left(1 - 10^{-6}y\right)$, де час t вимірюється в роках. Встановити число років, коли населення острова збільшиться в 10 разів, якщо в початковий момент часу населення острова складало 10000 осіб.

Варіант 11

1. Функція: $x^2 + y^2 = 2Cx$, рівняння: $2xy' = y^2 - x^2$.

2. 1. $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$ 2. $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$ 3. $y'\cos^2 x + y = tgx$

3. 1. $y'' - 7y' + 10y = 0$ 2. $y'' - 2y' + y = 1 + x$, $y(0) = 2, y'(0) = -3$

4. В умовах ненасиченості ринку знайти обсяг виробництва через 6 місяців, якщо в початковий момент часу обсяг виробництва $y_0 = y(0) = 24$ (ум. од.), при нормі інвестицій *0,6*, ціні продажу рівній *0,15* ум. од. та *l=0,4*.

Варіант 12

1. Функція: $y\frac{C - (x+2)e^{-x}}{x+1}$, рівняння: $y' + \frac{y}{1+x} = e^{-x}$.

2. 1. $(1+y)dx = (1-x)dy$ 2. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 3. $(1+x^2)y' + y = arctgx$

3. 1. $y'' + y - 6y = 0$ 2. $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

4. Знайти функцію попиту, якщо $E_p = -0{,}8 = const$ і задана ціна *p=15* при деякому значенні попиту *y=1*.

Варіант 13

1. Функція: $y = 1 + C\cos x$, рівняння: $y' + ytgx = tgx$.

2. 1. $Stgtdt + dS = 0$ 2. $(x+y)dx + xdy = 0$ 3. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$

3. 1. $y'' - 5y' = 0$ 2. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 100 - p - 2\frac{dp}{dt}$, $x = 140 + p - 3\frac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу $p = 5$.

Варіант 14

1. Функція: $y = (Cx^2 - 1)^2$, рівняння: $xy' = 4(y + \sqrt{y})$.

2. 1. $xydx = (1+x^2)dy$ 2. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$ 3. $y' + 2ytg2x = \sin 4x$

3. 1. $y'' - 2y' - 3y = 0$ 2. $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

4. В селищі з населенням 3000 осіб розповсюдження простудних захворювань описується рівнянням $\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(3000 - y)$, де y – кількість хворих в момент часу *t*; *t* – число тижнів. Скільки хворих буде в селищі через 2 тижні, якщо в початковий момент їх було троє?

Варіант 15

1. Функція: $y = (C_2 - C_1 x)^{-1}$, рівняння: $yy' - 2y'^2 = 0$.

2. 1. $y^2 dx + (x+2)dy = 0$ 2. $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$ 3. $y' + y = -e^{2x} y^2$

3. 1. $y'' - 6y' + 5y = 0$ 2. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2, y'(0) = 3$

4. Припускаючи, що ціна на товар задається функцією $p(y) = (5 + 3e^{-y})y^{-1}$, *m=0,6*, *l=0,4*, *y(0)=1*, знайти залежність $y = y(t)$ обсягу реалізованої продукції від часу.

Варіант 16

1. Функція: $y = xe^{\frac{c}{x} - 1}$, рівняння: $xy' + y \ln \frac{y}{x} = 0$.

2. 1. $x^2 dy - (2xy + 3y)dx = 0$ 2. $(x - y)dx + xdy = 0$ 3. $y' - \frac{3y}{x} = e^x x^3$

3. 1. $y'' + 8y' + 16y = 0$ 2. $y'' + 4y' = xe^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

4. Знайти функцію попиту, якщо $E_p = -2 = const$ і задана ціна *p=3* при деякому значенні попиту *y=1/6*.

Варіант 17

1. Функція: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$, рівняння: $y'' - 4y' = 8x^3$.

2. 1. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$ 2. $y' = \frac{y}{x} - tg\frac{y}{x}$ 3. $xy' - y = x^2 \cos x$

3. 1. $y'' - 10y' + 25y = 0$ 2. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1$, $y(0) = y'(0) = 0$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 120 - 2p + 5\frac{dp}{dt}$, $x = -30 + 3p + 50\frac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу *p = 36* .

Варіант 18

1. Функція: $y = C_2 - C_1 \cos x - x$, рівняння: $y'' tgx = y' + 1$.

2. 1. $\cos yy' = 1 + x^2$ 2. $y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$ 3. $xy' + y = -x^2 y^2$

3. 1. $y'' - 6y' + 25y = 0$ 2. $y'' - y = 2 - 2x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

4. Чисельність населення $y = y(t)$ селища міського типу описується рівнянням $\frac{dy}{dt} = 0{,}3y\left(2 - 10^{-4} y\right)$, де час t вимірюється в роках. В початковий момент часу в селищі мешкало 500 осіб. Яка кількість населення буде в селищі через 3 роки?

Варіант 19

1. Функція: $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$, рівняння: $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

2. 1. $(1 + y^2)dx = xydy$ 2. $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$ 3. $y' \sin x - y \cos x = 1$

3. 1. $y'' - 2y' + 5y = 0$ 2. $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$, $y(0) = 4, y'(0) = 0$

4. Знайти залежність $y = y(t)$ обсягу реалізованої продукції від часу, припускаючи, що ціна на товар задається функцією $p(y) = \left(7 + 2e^{-y}\right)y^{-1}$, *m=0,8, l=0,5, y(0)=1.*

Варіант 20

1. Функція: $y = C_1 x + C_2 - \ln \cos x$, рівняння: $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. 1. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ 2. $y' = \frac{x - y}{x + y}$ 3. $xy' + 2y = 3x^5 y^2$

3. 1. $y'' - 4y' + 7y = 0$ 2. $y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$

4. Знайти функцію попиту, якщо $E_p = -3 = const$ і задана ціна *p=2* при деякому значенні попиту *y=27*.

Варіант 21

1. Функція: $y = Ce^{-\frac{x}{y}}$, рівняння: $(y - x)dx + x^2 dy = 0$.

2. 1. $x + xy + yy'(1 + x) = 0$ 2. $y' = \frac{x + y}{x - y}$ 3. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$

3. 1. $y'' - 6y' + 13y = 0$ 2. $y'' - y = 9xe^{2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = -5$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 50 - 3p + 4\frac{dp}{dt}$, $x = 62 - 3p + 2\frac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу $p = 5$.

Варіант 22

1. Функція: $y = e^{-x}(x + C)$, рівняння: $e^x (y + y') = 1$.

2. 1. $3y'\sqrt{x} = y$ 2. $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$ 3. $xy' + y - 3 = 0$

3. 1. $y'' + y' - 6y = 0$ 2. $y'' + 3y' + 2y = xe^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

4. Збільшення кількості $y = y(t)$ жителів деякого району описується рівнянням $\frac{dy}{dt} = \frac{0,2}{m}(m - y)$, де m – максимально можливе число жителів для даного району. В початковий момент часу число жителів складало 1% від максимального. Встановити, коли число жителів складе 80% від максимального.

Варіант 23

1. Функція: $y = (x + C)tg\frac{x}{2}$, рівняння: $y'\sin x - y = 1 - \cos x$.

2. 1. $y'\cos^2 x = \sin^2 x$ 2. $xyy' - 8x^2 + y^2 = 0$ 3. $x^2 y' = 2xy + 3$

3. 1. $y'' - y' - 2y = 0$ 2. $y'' + 2y' + y = e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = -2$

4. Знайти функцію попиту, якщо $E_p = -3 = const$ і задана ціна *p=3* при деякому значенні попиту *y=15*.

Варіант 24

1. Функція: $y = 3x^2$, рівняння: $y' - \frac{y}{x} = 3x$.

2. 1. $\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}dx = 0$ 2. $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$ 3. $xy' + y - x = 1$

3. 1. $y'' + 2y' - 8y = 0$ 2. $y'' + 4y = 4\sin x$, $y(0) = 0, y'(0) = 2$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$, $x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу *p = 9* .

Варіант 25

1. Функція: $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$, рівняння: $y' + xy - x = 0$.

2. 1. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ 2. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$ 3. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

3. 1. $y'' + 9y = 0$ 2. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 3$, $y(0) = 2, y'(0) = -1$

4. Чисельність населення $y = y(t)$ селища міського типу описується рівнянням $\frac{dy}{dt} = 0,2y(1 - 10^{-4}y)$, де час *t* вимірюється в роках. Встановити число років, коли населення селища збільшиться в 3 рази, якщо в початковий момент часу в селищі мешкало 500 осіб.

Варіант 26

1. Функція: $y = x(\sin x + C)$, рівняння: $xy' - y = x^2\cos x$.

2. 1. $y' = -2xy$ 2. $xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 3. $xy' - x^2 + 2y = 0$

3. 1. $y'' - y' - 2y = 0$ 2. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2, y'(0) = 3$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 50 - 2p - 4\dfrac{dp}{dt}$, $x = 70 + 2p - 5\dfrac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу $p = 10$.

Варіант 27

1. Функція: $y = e^{-x^2}(\dfrac{x^2}{2} + C)$, рівняння: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

2. 1. $y' = 3^{x+y}$ 2. $y' = \dfrac{8x + 5y}{5x - 2y}$ 3. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

3. 1. $y'' - 6y' + 9y = 0$ 2. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$, $y(0) = 2, y'(0) = 3$

4. Чисельність населення $y = y(t)$ острова описується рівнянням $\dfrac{dy}{dt} = 0{,}05y(1 - 10^{-6}y)$, де час *t* вимірюється в роках. Встановити число років, коли населення острова збільшиться в 5 разів, якщо в початковий момент часу населення острова складало 1000 осіб.

Варіант 28

1. Функція: $y = (C + x)/(1 - Cx)$, рівняння: $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

2. 1. $xy' + 2y = \cos x$ 2. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$ 3. $y' - \dfrac{y}{1 + x} + x^2 = 0$

3. 1. $y'' - 4y' + 5y = 0$ 2. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$

4. Функції попиту і пропозиції на деякий товар мають вигляд $y = 30 - p - 4\dfrac{dp}{dt}$, $x = 20 + p + \dfrac{dp}{dt}$. Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу $p = 5$.

Варіант 29

1. Функція: $x^2 + y^2 = 2Cx$, рівняння: $2xy' = y^2 - x^2$.

2. 1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 1$ 2. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ 3. $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$

3. 1. $y'' - 4y' + 4y = 0$ 2. $y'' + 3y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$

4. Збільшення кількості $y = y(t)$ жителів деякого району описується рівнянням $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{0{,}2}{m}(m - y)$, де m – максимально можливе число жителів для даного району. В початковий момент часу число жителів складало 1% від максимального. Встановити, коли число жителів складе 60% від максимального.

Варіант 30

1. Функція: $y=(Cx^2-1)^2$, рівняння: $xy'=4(y+\sqrt{y})$.

2. 1. $xy'-2y=x+1$ 2. $xy^2y'=x^3+y^3$ 3. $y'=x+y$

3. 1. $y''-y'=0$ 2. $y''-2y'+5y=xe^{2x}$, $y(0)=1, y'(0)=0$

4. В селищі з населенням 3000 осіб розповсюдження простудних захворювань описується рівнянням $\dfrac{dy}{dt}=0{,}001y(3000-y)$, де y – кількість хворих в момент часу *t*; *t* – число тижнів. Визначити час, коли захворіє 80% населення, якщо в початковий момент їх було троє.

Модуль 7. Ряди

1. Мета вивчення модуля:

- ознайомитись та засвоїти основні положення теорії рядів та набути практичних вмінь і навичок розв'язування типових задач, пов'язаних з числовими та функціональними рядами.

Після засвоєння модулю Ви повинні:

- ☺ знати: фундаментальні поняття та означення теорії рядів; необхідні та достатні умови збіжності (розбіжності) числових рядів, основні властивості збіжних (розбіжних) рядів, правила розкладання функцій в ряд.
- ☺ вміти: розв'язувати задачі на дослідження числових рядів на збіжність (розбіжність), знаходження інтервалів збіжності функціональних рядів, розкладання функцій в ряд.
- ☺ застосовувати: отримані знання та вміння про розклад функцій в степеневі ряди до наближених обчислень визначених інтегралів, значень математичних функцій.

2. Структура і зміст 7 модуля:

Зміст модулю зображено на рисунку. Теми, винесені на самостійне опрацювання, виділено **жирним підкресленим шрифтом**.

3. Опорні знання

Для його розуміння Вам необхідні знання і навички одержані під час вивчення 3 та 5 модулів. Для перевірки знань пропонуємо пройти наступний тест.

Тест-перевірка знань

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+1}\right)^{4-6x} =$

А	Б	В	Г
1	e^{6}	e^{12}	$+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x(x+3)} =$

А	Б	В	Г
0	*1*	*0,25*	*5/3*

3. Невизначений інтеграл $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\ln\left\lvert e^{3x}+5\right\rvert + C$	$3\ln\left\lvert e^{3x}+5\right\rvert + C$	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert e^{3x}+5\right\rvert + C$	$4\ln\left\lvert e^{3x}+5\right\rvert + C$

4. Чому дорівнює визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi}\sin^3 x\, dx$:

А	Б	В	Г
2/3	1/28	-1/10	1/3

5. Що називається невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$:

А	Б
$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx$	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{-a}^{b} f(x)dx$
В	**Г**
$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx$	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}\lvert f(x)\rvert dx$

6. При якій умові збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ і яке при цьому його значення:

А	Б
$0<\alpha<1;\quad \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}$	$\alpha<0;\quad \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}$
В	**Г**
$\alpha=1;\quad \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=0$	$\alpha>1;\quad \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}$

7. Обчислення за означенням невласного інтеграла $I=\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2-2x+10}$ приводить до наступного результату:

А	Б	В	Г
інтеграл розбігається	інтеграл збігається, $I=\pi/6$	інтеграл збігається, $I=-\pi/2$	інтеграл збігається, $I=\pi/4$

8. Обчислення за означенням невласного інтеграла $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+9}$ приводить до наступного результату:

А	Б	В	Г
інтеграл розбігається	інтеграл збігається, $I=\pi/2$	інтеграл збігається, $I=\pi/3$	інтеграл збігається, $I=\pi/4$

9. Обчислення за означенням невласного інтеграла $I=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ приводить до наступного результату:

А	Б	В	Г
інтеграл розбігається	інтеграл збігається, $I=\ln 2$	інтеграл збігається, $I=\ln\ln 2$	інтеграл збігається, $I=1/\ln 2$

10. Обчислення за означенням невласного інтеграла $I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$ приводить до наступного результату:

А	Б	В	Г
інтеграл розбігається	інтеграл збігається, $I = 2e^{-1}$	інтеграл збігається, $I = 1/2$	інтеграл збігається, $I = e^{-1}/2$

4. Рекомендовані інформаційні джерела

Інформаційне джерело	№ теми або параграфу
Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.	П. 9 (стор. 301-314)
Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.	Глава 11 (стор. 379-409)
Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 517 с.	Частина 2, розділ 7 (тема 28-30) (стор. 464-514)
Математика для економістів: теорія та застосування: Підручник /В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.	Частина 1, тема 25 (стор. 184-191)

5. Основні поняття модуля

Тема 7.1. Числовий ряд, член ряду, сума ряду, частинна сума, арифметична прогресія, геометрична прогресія, гармонічний ряд, збіжний ряд, розбіжний ряд, необхідна умова збіжності ряду, ознака порівняння збіжності ряду, ознака Д'Аламбера, ознака Коші, інтегральна ознака Коші, абсолютна і умовна збіжність ряду, знакозмінний ряд, ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду.

Тема 7.2. Функціональний ряд, степеневий ряд, область збіжності степеневого ряду, радіус збіжності, інтервал збіжності, ряд Маклорена, розклад функцій e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$ в ряд Маклорена, ряд Тейлора, формула Тейлора, властивості степеневих рядів.

6. Опорні конспекти модуля

Числові ряди

Загальний вигляд: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Сума перших n членів: $S_n = a_1 + a_2 + ... a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Якщо існує $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ - ряд збіжний.

Сума арифметичної прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

Сума геометричної прогресії: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

Необхідна ознака збіжності: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Достатні ознаки збіжності – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним (розбіжним), якщо:

1. І ознака порівняння: існує збіжний (розбіжний) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: $a_n \le b_n (a_n \ge b_n)$, $n>n_0$

Знакозмінний ряд:

$a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...$

Ознака збіжності (Лейбніца):

1) $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$

2) $a_n \to 0, n \to \infty$

2. ІІ ознака порівняння: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p \in (0;\infty)$ 3. Ознака Д'Аламбера: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D < 1 (> 1)$

4. Ознака Коші (радикальна): $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K < 1 (> 1)$

5. Інтегральна ознака Коші: збігається (розбігається) інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$

З історії…

4 травня 2006 року сталося унікальне явище… Години, хвилини, секунди і дати побудувалися в унікальну послідовність: 01.02.03.04.05.06. Це відбулося рівно в 1 годину 2 хвилини і 3 секунди 4-го числа 5-го місяця 6-го року нового століття. Такі співпадіння відбуваються один раз на десятки поколінь. Відповідно до ряду езотеричних вчень, саме в цей момент в атмосфері Землі мав відкритися містичний тунель для космічних променів гармонії, які мали вигляд особливої енергії. Ці вчення базуються на особливому значенні чисел, які лежать в основі світостворення. Після 4 травня наступний числовий феномен – числовий функціональний ряд, доведеться чекати 72 роки. Він відбудеться в 12 годин 34 хвилини 5 червня 2078 року нашого століття. Тоді числовий ряд буде також відрізнятися надзвичайною гармонією: 12345678.

Функціональні ряди

Загальний вигляд: $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$

Степеневий ряд: $a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

Узагальнений степеневий ряд: $a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n(x-x_0)^n+b_n(x-x_0)^{-n}\right)$

Тригонометричний ряд: $a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Інтервал збіжності: $(x_0-R;x_0+R)$

Радіус збіжності: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ АБО $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$

Ряд Маклорена: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$

частинний випадок

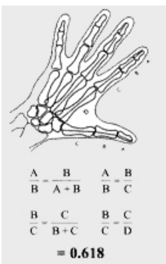
Ряд Тейлора: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$

Формула Тейлора: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$

R_n – залишковий член формули Тейлора, записаний у формі Лагранжа

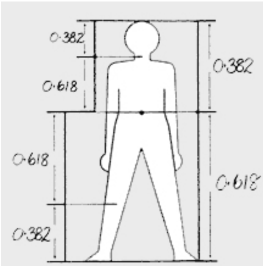
З історії…

Леонардо Фібоначчі (XII – XIII ст.н.е., Італія, Піза) – один з великих математиків Середньовіччя. У одній з своїх праць “Книга обчислень” Фібоначчі описав індо-арабську систему числення і переваги її використання перед римською. Числова послідовність Фібоначчі, складається з цифр 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Фібоначчі відкрив її при спостереженні потомства в сім’ї кроликів. Числова



послідовність Фібоначчі має багато цікавих властивостей. Наприклад, сума двох сусідніх чисел послідовності дає значення наступного за ними (наприклад, 1+1=2; 2+3=5 і так далі). Одним з найголовніших наслідків цієї властивості є існування так званих коефіцієнтів Фібоначчі, тобто постійних співвідношень різних членів послідовності. Вони визначаються таким чином: відношення кожного числа до наступного все більше прямує до 0,618 після збільшення порядкового номера. Відношення ж кожного числа до попереднього прямує до 1,618 (оберненому до 0,618). Число 0,618 називають φ. При діленні кожного числа на наступне за ним через одне отримуємо число 0,382; навпаки – відповідно 2,618. Підбираючи таким чином співвідношення, отримуємо основний набір коефіцієнтів Фібоначчі: 4,235, 2,618, 1,618, 0,618, 0,382, 0,236. Всі вони грають особливу роль в природі, і зокрема – в технічному аналізі.

Наприклад, число 0,618 є постійним коефіцієнтом в так званому золотому перерізі, де будь-який відрізок ділиться таким чином, що співвідношення між його меншою і більшою частиною дорівнює співвідношенню між більшою частиною і всім відрізком. Таким чином, число 0,618 відомо ще як золотий коефіцієнт або золота середина. Такого типа пропорцію можна зустріти практично скрізь.



Ряди виникли в XVIII ст. як спосіб представлення функцій, що допускають нескінченне диференціювання. Проте функція, що називалася рядом, не називалася його сумою, і взагалі у той час не було ще визначено, що таке сума числового або функціонального ряду, були лише спроби ввести це поняття.

Наприклад, німецький математик *Леонард Ейлер* (1707–1783), записавши для функції відповідний їй степенний ряд, надавав змінній x конкретне значення x_0. Отримували числовий ряд. Сумою цього ряду Ейлер вважав значення заданої функції в точці x_0. Але це не завжди правильно. Про те, що розбіжний ряд не має суми, вчені стали здогадуватися тільки в XIX ст. У теорії розбіжних рядів Ейлер отримав немало істотних результатів, проте результати ці довго не застосовувалися. Ще в 1826 р. *Нільс Генрих Абель* (1802–1829) називав розбіжні ряди «диявольською вигадкою». Результати Ейлера знайшли обґрунтування лише в кінці XIX ст.

В формуванні поняття про суму збіжного ряду велику роль зіграв французький учений *Огюстен Луі Коші* (1789–1857). Він зробив надзвичайно багато не лише в теорії рядів, але і в теорії границь, в розробці самого поняття границі. У будь-якому курсі математичного аналізу зустрічається багато теорем Коші, пов’язаних з цим поняттям. Саме Коші заявив в 1826 р., що розбіжний ряд не має суми. Він же сформулював критерій збіжності рядів.

7. Запитання для самоперевірки

1. Що називається числовим рядом?
2. Який ряд називається збіжним (розбіжним)?
3. Сформулювати необхідну ознаку збіжності числового ряду.
4. Сформулювати достатні ознаки збіжності числового ряду.
5. В яких випадках застосовується ознака Д’Аламбера, в яких – ознака Коші збіжності числового ряду?
6. Який ряд називається знакозмінним?
7. Що таке абсолютна та умовна збіжність ряду?
8. Як формулюється ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду?

9. Що називається функціональним рядом?
10. Дати означення степеневого ряду?
11. Що називається областю збіжності (розбіжності) степеневого ряду? Що таке інтервал збіжності? Як обчислюється радіус збіжності степеневого ряду?
12. Записати ряд Маклорена, ряд Тейлора у загальному вигляді.
13. Записати формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.
14. Які є властивості степеневих рядів?
15. Яким чином ряди застосовуються в наближених обчисленнях?

8. Тест-контроль вивчення модуля

Теоретична частина:

1. Числовим рядом називається…

А	Б
сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нескінченного числа доданків, якими служать члени довільної числової послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$	сума скінченного числа довільних доданків $\sum_{n=1}^{N} a_n$, де $N < \infty$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – деяка числова послідовність
В	**Г**
границя $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$	сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нескінченного числа доданків, кожний з яких служить елементом деякої скінченної числової множини

2. Часткова сума S_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ визначається рівністю:

А	Б
$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$
В	**Г**
$S_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k = a_n + a_{n+1} + \cdots$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, якщо:

А	Б
якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$, де S_n – часткова сума	якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n$, де S_n – часткова сума
В	**Г**
якщо не існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n$, де S_n – часткова сума	якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, де S_n – часткова сума

4. У чому полягає необхідна умова збіжності ряду:

А	Б
якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
В	**Г**
якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $0 < \lim_{n\to\infty} a_n < 1$	якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

5. У чому полягає основна (перша) ознака порівняння рядів з додатними членами:

А	Б
якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n > 0)$ і $u_n \le v_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тоді 1) якщо “більший” $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряд збігається, то “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається; 2) якщо “менший” $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд розбігається, то “більший” ряд	якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n > 0)$ і $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тоді обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбігається	
В	Г
якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p \quad (0 \le p < +\infty)$, тоді обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно	якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ і $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тоді обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно

6. У чому полягає гранична (друга) ознака порівняння рядів з додатними членами:

А	Б
якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$ $(0 \le p < +\infty)$, тоді обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно	якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ і $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тоді обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно
В	**Г**
якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ і $a_n \le b_n \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тоді 1) якщо “більший” $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряд збігається, то “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається; 2) якщо “менший” $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряд розбігається, то “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбігається	якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$ і $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тоді 1) якщо “більший” $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряд збігається, то “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається; 2) якщо “менший” $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд розбігається, то “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається

7. У чому полягає інтегральна ознака збіжності або розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами $a_n > 0$? Яка оцінка справедлива для суми S цього ряду?

А
нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $a_{n+1} \geq a_n$ $(n=1,2,...)$ і $\int_1^{\infty} f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, $f(n) = a_n$ $(n=1,2,...)$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігаються чи розбігаються одночасно. При цьому $0 \leq S \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1$
Б
нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $(n=1,2,...)$ і $\int_1^{\infty} f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, $f(n) = a_n$ $(n=1,2,...)$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігаються чи розбігаються одночасно. При цьому $\int_1^{\infty} f(x)dx \leq S \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1$
В
нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $(n=1,2,...)$ і $\int_1^{\infty} f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, $f(n) = a_n$ $(n=1,2,...)$. Тоді 1) якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається; 2) якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

При цьому $a_1 \le S \le \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$
Г
нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $a_{n+1} \ge a_n \ge 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ і $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, $f(x) \ge 0$, $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ збігаються чи розбігаються одночасно. При цьому $\int\limits_1^{n} f(x)\,dx \le S \le \int\limits_1^{n} f(x)\,dx + a_1$ $(n = 1, 2, \dots)$

8. Для деякого степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ серед запропонованих формул обрати правильну щодо знаходження його радіуса збіжності R:

А	Б	В	Г
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\|$	$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$	$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right\|$	$R = \lim\limits_{n\to 0} \left\| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$

9. Деякий степеневий ряд продиференційовано та проінтегровано. Тоді ряди, отримані в результаті цих операцій:

А	Б	В	Г
збігаються	розбігаються	мають той самий інтервал збіжності, що і заданий ряд	ряд, отриманий диференціюванням, має той самий інтервал збіжності; ряд, отриманий інтегруванням, – інший інтервал збіжності

10. Для суми деякого степеневого ряду з інтервалом збіжності $(-R; R)$ виконується:

А	Б	В
сума є неперервною функцією у кожній точці інтервалу збіжності	сума не є неперервною функцією у кожній точці інтервалу збіжності	про неперервність суми певного висновку зробити не можна

Практична частина:

11. Для якого з указаних рядів не виконується необхідна умова збіжності:

А	Б	В	Г
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100n}{n^2+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^4+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n}{10n+3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{\pi}{n}$

12. Визначити, який з указаних рядів розбігається, користуючись достатньою ознакою розбіжності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$:

А	Б	В	Г
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n}{n^3+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\sqrt{\frac{n}{4n+5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^4}$

13. Який з указаних рядів є геометричним рядом і чому дорівнює його знаменник q:

А	Б	В	Г
ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n5^n}$ є геометричним. Його знаменник $q=2/5$	ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{5^n}$ є геометричним. Його знаменник $q=5/2$	ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}$ є геометричним. Його знаменник $q=2/5$	жодний з цих рядів не є геометричним

14. Якщо $n=4$, то n-на частинна сума S_n геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{n-1}$ дорівнює:

А	Б
$S_4=\frac{1-3^4}{2(1-3)}=20$	$S_4=4\cdot\frac{1-3^2}{1-3}=16$
В	**Г**
$S_4=2\cdot\frac{1-3^4}{1-3}=80$	$S_4=2\cdot\frac{1-3^{4+1}}{1-3}=242$

15. Який з указаних рядів є узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ і чому дорівнює показник степеня α:

А	Б	В	Г
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ $\alpha=\frac{5}{4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt[3]{n^5+1}}$ $\alpha=\frac{7}{6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^{10}}}$ $\alpha=\frac{5}{6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^n}$ $\alpha=n-\frac{1}{2}$

16. Яку ознаку треба застосувати для встановлення збіжності чи розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$? Чи буде цей ряд збіжним:

А	Б	В	Г
основну ознаку порівняння. Ряд розбігається.	радикальну ознаку Коші. Ряд розбігається.	ознаку Д'Аламбера. Ряд збігається.	ознаку Д'Аламбера. Ряд розбігається.

17. Яку ознаку треба застосувати для встановлення збіжності чи розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{((2n-1)/n)^n}$? Чи буде збіжним цей ряд:

А	Б	В	Г
граничну ознаку порівняння. Ряд збігається.	радикальну ознаку Коші. Ряд розбігається.	інтегральну ознаку. Ряд збігається.	ознаку Д'Аламбера. Ряд збігається.

18. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^5}$ є абсолютно чи умовно збіжним, або взагалі розбіжним і чому:

А	Б	В	Г
ряд абсолютно збіжний, бо збігається ряд із модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^5}$	ряд розбіжний, бо розбігається ряд із модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^5}$	ряд умовно збіжний, бо розбігається ряд із модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^5}$, а сам ряд задовольняє ознаку Лейбніца	ряд умовно збіжний, бо збігається ряд із модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^5}$, а сам ряд не задовольняє ознаку Лейбніца

19. Який з указаних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}}{n^3+2n+2}$ потребує застосування радикальної ознаки Коші? Чи буде цей ряд збіжним:

А	Б	В	Г
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$, розбігається	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^{n^2}$, збігається	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$, збігається	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}}{n^3+2n+2}$, розбігається

20. Яку ознаку можна застосувати до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$ для дослідження його на збіжність? Чи збігається цей ряд:

А	Б	В	Г
ознаку Д'Аламбера, ряд збігається	радикальну ознаку Коші, ряд збігається	інтегральну ознаку Коші, ряд розбігається	граничну ознаку порівняння зі збіжним геометричним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, ряд збігається

9. Індивідуальні домашні завдання №7

Базовий рівень:

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду.

Підвищений рівень:

Завдання 2.

1. Знайти області збіжності функціонального ряду.
2. Визначити радіус та інтервал збіжності степеневого ряду та дослідити його поведінку в граничних точках інтервалу збіжності.

Поглиблений рівень:

Завдання 3. Розкласти функцію *f(x)* в ряд Тейлора.

Варіанти завдань

Варіант 1

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(n\sqrt[3]{n}\right)}{n\sqrt[3]{n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n+3}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!!}\cdot(x-1)^n$

3. $f(x)=\frac{10}{3-x-2x^2}$ по степенях x.

Варіант 2

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2n}{n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(n+1)}{n(n+2)}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2x}{4x+1}\right)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\cdot(x+1)^n$

3. $f(x)=\frac{8}{15+2x-x^2}$ по степенях $(x+1)$.

Варіант 3

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sqrt[5]{n}}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\left(2x^2+3x+2\right)^{-n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(x-2)^n$

3. $f(x)=\sqrt[3]{8-3x}$ по степенях x.

Варіант 4

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{3}{2}}\sin\frac{2+(-1)^{n-1}}{n^3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\left(x^2-4x+5\right)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+(-3)^n}{\sqrt{n}}\cdot(x-1)^n$

3. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt[3]{31-4x}}$ по степенях $(x-1)$.

Варіант 5

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^7}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{4n}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{1+x^{2n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n\cdot n}{3^n+5^n}$

3. $f(x)=\ln\left(1+x-20x^2\right)$ по степенях x.

Варіант 6

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{(n+1)(n+2)}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{3n+1}}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (2x-3)^n$

3. $f(x) = \ln\left(5x - 2x^2 - 2\right)$ по степенях $(x-1)$.

Варіант 7

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2+(-1)^{n-1}}{3}n\right)}{n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n^2+5}\left(x^2+5x+9\right)^{-n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+\cos \pi n)(2x)^n}{\sqrt{n}}$

3. $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} - 3$ по степенях x.

Варіант 8

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n^4+2n}}{\sqrt{n^3+n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\pi n\sqrt[3]{n}\right)}{n\sqrt[3]{n}}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+x)^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[3^n + \frac{(-1)^n}{n^2}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^n$

3. $f(x) = x^2 - 2x^2 \sin^2 \frac{x}{4}$ по степенях x.

Варіант 9

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin\frac{n\pi}{2}}{n\sqrt[5]{n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)\ln(n+2)}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{2x+3n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$

3. $f(x) = \frac{arctg\, 2x}{x}$ по степенях x.

Варіант 10

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n}{2^n}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+5x)}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{(-2)^n+3^n}$

3. $f(x)=\cos 2x-\frac{\sin 2x}{x}$ по степенях x.

Варіант 11

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(3^n)}{n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2x)^n}{n^{n+3x}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

3. $f(x)=\ln\left(-6x^2-13x-6\right)$ по степенях $(x+1)$.

Варіант 12

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 2n}{n^3+2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2^n)}{2^n}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}\cos\pi n}{n^{2x^2-1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x+1)^n}{\ln n}$

3. $f(x)=\frac{1}{6x^2+5x+1}$ по степенях x.

Варіант 13

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3+\cos\pi n)}{2n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arcsin 3^{-n}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{x^3n^x}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{2^{n^2}}$

3. $f(x)=\cos^4 x$ по степенях x.

Варіант 14

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^{n-1}}{2^{n+3}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n^2+1)3^n}\left(8x^2+5\right)^n$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n x^n$

3. $f(x)=\dfrac{8}{15-2x-x^2}$ по степенях x.

Варіант 15

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+n}}$ 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)^2}{n!}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+1}{n^2+e^{nx}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}\cdot(x-2)^n$

3. $f(x)=\dfrac{5}{3+x-2x^2}$ по степенях $(x-1)$.

Варіант 16

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+1}}$ 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{2n-3}}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\left(x^2+4\right)^{-n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi^n}{2^{2n}}\cdot(x+1)^n$

3. $f(x)=(x+2)\sqrt[4]{26-5x}$ по степенях $(x+2)$.

Варіант 17

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}(\cos\pi n+5)}{\sqrt[5]{n^8+1}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n!}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-4x+7\right)^n}{4^n\left(n^3+1\right)}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{n-1}}{n^2+1}\cdot(3x)^n$

3. $f(x)=\ln\left(1+2x-8x^2\right)$ по степенях x.

Варіант 18

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!\left(2^n-1\right)}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(4x^2-1\right)^n}{(2n+1)3^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4^n}\cdot(\pi x-1)^n$

3. $f(x)=\ln\left(14x-3x^2-15\right)$ по степенях $(x-2)$.

Варіант 19

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n-1}}{\sqrt{n}\left(2+\sin{\pi n}/{2}\right)}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt{n+1}}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n^2+1}}{n^2+x^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt[3]{n^3+2}}\cdot(x+1)^n$

3. $f(x)=\frac{\cos 2x-1}{2x^2}$ по степенях x.

Варіант 20

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg}{1}/{\sqrt{n}}}{n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{n(n+3)}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^3+1}{2^{nx}+3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^n+\frac{\cos\pi n}{n}\right)\cdot(x-\pi)^n$

3. $f(x)=x-2x\cos^2\frac{x}{8}$ по степенях x.

Варіант 21

1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n}{n+1}}{\sqrt{n^2+2n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n+5)}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{nx}}{n+3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right)^n(2x-\pi)^n$

3. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{16-3x}}$ по степенях x.

Варіант 22

1. 1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{3n}}{\sqrt[3]{n^3-n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3\sqrt[3]{n}}$

2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2+1\right)a^{nx}}{n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^n\right)}{n^3+1}\cdot(4x+1)^n$

3. $f(x)=\frac{\arcsin 3x}{x}$ по степенях x.

Варіант 23

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+n+2}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt[5]{2n}}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\left(x^2+1\right)}{\left(n^2+1\right)2^x}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}+\frac{1}{n}\right]\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^n$

3. $f(x)=\sin 3x-x\cos 3x$ по степенях x.

Варіант 24

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{2+(-1)^n}{3}}{3^n+n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\sqrt[3]{n^2+1}+2\right)^{2x+3}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\cdot(x-e)^n$

3. $f(x)=\ln\left(12-17x-6x^2\right)$ по степенях $(x-1)$.

Варіант 25

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}{2n+1}$ 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)^2 2^n}{n!}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n^2}}{n^{x^2-2}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n\cdot n!$

3. $f(x)=\frac{1}{15+11x+2x^2}$ по степенях $(x+2)$.

Варіант 26

1. 1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\arccos\left[(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n}\right]}{n^2+1}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{(2n-1)\pi}{4}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$

3. $f(x)=x^3-2x^2+6x-3$ по степенях $(x+2)$.

Варіант 27

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n+1)!}{(3n-1)!}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^5 x^{2n}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

3. $f(x)=x^4-6x^3+5x+1$ по степенях $(x+2)$.

Варіант 28

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}(n+1)!}{n^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^n$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}(x-2)^n}{n+1}$

3. $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ по степенях $(x+2)$.

Варіант 29

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}\left(3^{-n}\right)n!}{(2n)!}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n}$

3. $f(x)=\sqrt{x^3}$ по степенях $(x-1)$.

Варіант 30

1. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n-1)!!}{(2n)!}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^n+2^n}$

2. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

3. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ по степенях $(x-1)$.

Орієнтовні теми рефератів (презентацій)

1. Жорданова форма матриці. Невід'ємні матриці.
2. Матриці та визначники в економічних розрахунках.
3. Економічний зміст похідної. Використання поняття похідної в економіці
4. Дотична площина та нормаль до поверхні.
5. Функції однієї змінної в задачах з економіки.
6. Заміни змінних для виразів, що залежать від функції багатьох змінних.
7. Аналіз задач з економіки за допомогою виробничих функцій.
8. Лінійна залежність в економічних задачах.
9. Кореляційний аналіз. Основні положення кореляційного аналізу.
10. Повторні границі. Неперервність та рівномірна неперервність.
11. Геометрична інтерпретація підстановок Ейлера.
12. Еліптичні інтеграли. Формула Гріна.
13. Економічні застосування інтегралів.
14. Класифікація особливих точок диференціального рівняння I порядку: вузол, фокус, центр, сідло.
15. Теореми існування розв'язків диференціального рівняння.
16. Застосування умов Гурвіца для дослідження стійкості розв'язків диференціального рівняння.
17. Диференціальні рівняння в економічних моделях.
18. Безумовна оптимізація в економічних задачах.
19. Умовна оптимізація в економічних задачах.
20. Функції Ляпунова.
21. Застосування перетворень Лапласа для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.
22. Розв'язування диференціального рівняння Ейлера $\sum_{k=0}^{n} x^k y^{(k)} = f(x)$.
23. Ознаки Раабе, Куммера, Гаусса збіжності числових рядів.
24. Ознаки Абеля та Діріхле рівномірної збіжності функціональних рядів.
25. Повторні та подвійні ряди.
26. Формула Стірлінга.
27. Біноміальний ряд.
28. Комплексний ряд Фур'є. Інтеграл Фур'є.
29. Відомі математики України.
30. Відомі математики світу.

ДОДАТКИ

Латинський алфавіт

Друковані літери	*Назва літери*	*Друковані літери*	*Назва літери*
A a	*а*	**N n**	*ен*
B b	*бе*	**O o**	*о*
C c	*це*	**P p**	*пе*
D d	*де*	**Q q**	*ку*
E e	*е*	**R r**	*ер*
F f	*еф*	**S s**	*ес*
G g	*же*	**T t**	*те*
H h	*аш*	**U u**	*у*
I i	*і*	**V v**	*ве*
J j	*йот*	**W w**	*дубль-ве*
K k	*ка*	**X x**	*ікс*
L l	*ель*	**Y y**	*ігрек*
M m	*ем*	**Z z**	*зет*

Грецький алфавіт

Друковані літери	*Назва літери*	*Друковані літери*	*Назва літери*
Α α	*альфа*	**Ν ν**	*ню*
Β β	*бета*	**Ξ ξ**	*ксі*
Γ γ	*гамма*	**Ο ο**	*омікрон*
Δ δ	*дельта*	**Π π**	*пі*
Ε ε	*епсилон*	**Ρ ρ**	*ро*
Ζ ζ	*дзета*	**Σ σ**	*сигма*
Η η	*ета*	**Τ τ**	*тау*
Θ θ	*тета*	**Υ υ**	*іпсилон*
Ι ι	*йота*	**Φ φ**	*фі*
Κ κ	*каппа*	**Χ χ**	*хі*
Λ λ	*ламбда*	**Ψ ψ**	*псі*
Μ μ	*мю*	**Ω ω**	*омега*

Література

1. Барковський В.В., Барковська Н. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2005. – 400 с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: «Академія», 2003. – 520 с.
3. Валєєв К.Г. Вища математика: навчальний посібник у 2-х ч. / К.Г.Валєєв, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.
4. Валєєв К.Г. Вища математика: навчальний посібник у 2-х ч. / К.Г.Валєєв, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.2. – 451 с.
5. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2007. – 454 с.
6. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Тришин И.М., Путко Б.А., Шевелев А.Ю. и др.]; под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.
7. Высшая математика: учеб.-метод. комплекс в 2-х ч. Ч. 1 / Т.А. Жур [и др.] – Минск.: БГАТУ, 2009. – 139 с.
8. Высшая математика: учеб.-метод. комплекс в 2-х ч. Ч. 2 / И.М.Морозова [и др.] – Минск: БГАТУ, 2009. – 248 с.
9. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
10. Дюженкова Л.І. Вища математика: Приклади і задачі / Л.І. Дюженкова О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с. (Альма-матер)
11. Жалдак М.І. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. – К.: РННЦ “ДНІТ”. – 2004. – 255 с.
12. Жильцов О.Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій: навч. посібник / О.Б. Жильцов, Г.М. Торбін. – К.: МАУП, 2002. – 408 с.
13. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / [В.В. Корольський, Т.Г.Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк]; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 316 с.
14. Колосов А.І. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина І (для студентів спеціальностей 7.050106 «Облік і аудит», 7.050107 «Економіка і підприємництво») / А.І. Колосов, А.В. Якунін, Л.В.Наземцева. – Харків: ХИАМГ, 2006. – 144 с.
15. Лозовий Б.Л. Практикум з вищої математики: навчальний посібник / Б.Л. Лозовий, Я.С. Пушак, О.Є. Шабат. – Львів: Магнолія-2006, 2007. – 285 с.
16. Практикум з дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання всіх спеціальностей / [укладачі: Тур Г.І., ВінніченкоН.В.]. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2007. – 120 с.

Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання / Укладач: Вінніченко Н.В. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2011 р. – 220 с.

Укладач: ст. викладач *Вінніченко Наталія Володимирівна*
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. *Юрченко Марина Євгенівна*
Редактор: к.пед.н., доц. *Трунова Олена Василівна*
Коректор: *Вінніченко Н.В.*

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Технічний редактор: Гладченко О.О.
Комп'ютерний набір: Вінніченко Н.В.
Комп'ютерна верстка: Вінніченко Н.В., Гладченко О.О.
Мовне редагування: Вінніченко Н.В.
Коректура: Вінніченко Н.В.

Набір **комп'ютерний**. Підписано до друку **30.08.2011 р.** Здано до друку **12.09.2011 р.** Формат **$60x84_{/16.}$** Папір **офсетний №1.** Друк **різографічний.**
Умовн. друк. арк. **10,30.** Обл.-вид. арк. **13,75.**
Наклад **100** прим. Зам. **№070.011.012.000.000.**

Державний інститут економіки і управління.
14003, м. Чернігів, вул. Стрілецька, 1.

Свідоцтво про внесення до
Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серія ДК №3113 від 19.02.2008 р.

Видано технічними засобами в редакційно-видавничому відділі
Чернігівського державного інституту економіки і управління.