Управління освіти і науки Чернігівської обласної державної адміністрації

Обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Задачі економічного змісту у шкільному курсі математики

Методичний посібник

Чернігів
2005

Автор:
Ткач Ю.М. –
завідувач лабораторії відділу суспільно-гуманітарних дисциплін Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Рецензенти:
Пономаренко С.І. –
к.е.н., доцент Чернігівського державного інституту економіки і управління
Роєва Т.Г. –
завідувач відділу природничо-математичних дисциплін Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Науковий редактор:
Гальонка О.А. –
к.п.н., доцент, проректор Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Відповідальний за випуск:
Скрипка В.І. –
к.ф.н., доцент, ректор Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Схвалено вченою радою Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
(протокол № 3 від 21 січня 2005 р.)

ВСТУП

У зв'язку із профілізацією старшої школи постала проблема взаємозв'язку профільного предмету з іншими суміжними шкільними предметами. Крім того, виникла необхідність у допрофільній підготовці учнів та прикладній спрямованості шкільних предметів.

Тому на сьогодні одним із основних завдань шкільної математики є підсилення прикладної спрямованості вивчення як теоретичного матеріалу, так і особливо системи задач. Відповідно до програми з математики для загальнооствініх навчальних закладів реалізація прикладної спрямованості навчання математики здійснюється за рахунок створення запасу математичних моделей реальних явищ та процесів, формування в учнів знань та вмінь їх для дослідження, а одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики є встановлення міжпредметних зв'язків математики з іншими предметами, зокрема з економікою.

На сучасному етапі розвитку економіки країни важливу роль відіграє підготовка спеціалістів (економістів, бухгалтерів, фінасистів тощо). Математика формує фундаментальну підготовку спеціалістів економічного профілю. Все частіше економісти почали використовувати математику як мову, на якій вони висловлюють свої думки, припущення та за допомогою якої вони роблять певні висновки. Про це свідчить той факт, що практично всі Нобелівські премії з економіки були присуджені вченим, які активно застосовували в своїх дослідженнях математичні моделі.

У сучасній економічній науці досить часто використовується математичний апарат, адже математика є могутнім засобом пізнання реального світу. Відомо, що математика вивчає світ за допомогою абстрактних моделей. В цих моделях реальні величини заміняються математичними поняттями. Досліджуючи рівняння, нерівності та їх системи, можна всебічно вивчити явище чи процес та на основі результатів дослідження прогнозувати його зміни.

Математична освіта школярів не повинна обмежуватись лише засвоєнням понять, формул, законів тощо. Необхідно формувати в учнів вміння застосовувати математичні знання у конкретних життєвих ситуаціях. Цього можна досягти шляхом розв'язування задач з економічним змістом.

В цьому методичному посібнику зібрані матеріали багатьох дослідників, які вивчали питанням взаємозв'язку математики та економіки. Тому він буде сприяти формуванню вміння учнів застосовувати математичні знання у конкретних економічних ситуаціях.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

1.1 Суть поняття “задача економічного змісту”

У педагогічній та психологічній літературі немає єдиного трактування поняття “задача”. Автори по-різному тлумачать це поняття – залежно від підходу до зв’язку між суб’єктом і задачею. У кібернетиці, дидактиці і методиці навчання математики задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб’єкта діяльності. У психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб’єкта і тлумачиться як суб’єктивне психологічне відображення зовнішньої ситуації, в якій розглядається діяльність суб’єкта.

У шкільному курсі математики до задач відносять не лише текстові, сюжетні задачі, а й різного характеру вправи, приклади. Задачі у навчанні математики є і об’єктом вивчення, і засобом навчання.

Виділяють чотири основні функції задач (зазначу, що жодна з цих функцій не може виступати ізольовано від інших):

- навчальна функція, яка спрямована на формування системи математичних знань учнів, їх умінь і навичок на різних етапах навчання;
- розвиваюча функція задач, яка спрямована на розвиток мислення школярів, на формування їх розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо;
- виховна функція задач, яка спрямована на формування наукового світогляду учнів, сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.);
- контролююча функція задач, яка спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класу в цілому.

Учень добре усвідомлює лише те, що виступає як прямий предмет і як мета його діяльності. Тому свідомість учіння передбачає, з одного боку, виконання школярами відповідних дій з навчальним матеріалом, а з іншого – перетворення матеріалу, що засвоюється, на пряму мету цих дій, тобто на розв’язування навчальних задач.

Єдність теорії та практики – це один із принципів педагогіки. Зв’язок математики з іншими дисциплінами, зокрема з економікою, є важливим засобом реалізації цього принципу. Тому курс математики повинен мати прикладну спрямованість, яка досягається двома шляхами:

1) теми програми з математики доповнюються невеликим за обсягом, логічно завершеними фрагментами теорії, які дають змогу проілюструвати застосування математичних методів в економіці, банківській справі тощо. Це вже зроблено в програмі з математики для класів економічного профілю [15].

2) застосування прикладних задач.

У методичній літературі означення прикладної задачі дається по-різному. Г.Г.Маслова, М.Л.Тихонов, С.С.Варданян, Г.М.Возняк та ін. прикладною називають задачу, яка потребує перекладу із звичайної мови на математичну. Г.П.Бевз, М.А.Гайбулаєв, П.Т.Апанасов та ін. вважають, що прикладна задача за постановкою і методом розв’язання повинна бути більш близькою до задач, що виникають на практиці. Ш.А.Музенітов під прикладною задачею розуміє сюжетну задачу, запитання якої поставлене так, як воно, як правило, ставиться на практиці, а шукані і дані величини є реальними, теж взятими із практики. М.О.Терешин, вважає, що прикладна задача – це задача, поставлена поза математикою, але розв’язується засобами математики. І.М.Шапіро під прикладною розуміє задачу, фабула якої розкриває застосування математики у суміжних навчальних дисциплінах, знайомить з її використанням в організації, технології та економіці сучасного виробництва, у сфері обслуговування та побуту, при виконанні трудових операцій. У цих задачах, як вважає Г.П.Бевз, задаються реальні умови, розглядаються реальні ситуації, що відбуваються чи можуть відбуватися на практиці. В той же час деякі дослідники ототожнюють прикладну задачу з текстовою. Однак текстову і прикладну задачі необхідно розрізняти. Наприклад, задача типу: “*Сума двох чисел дорівнює 13,6, а різниця 1,6. Знайти ці числа*” є текстовою, але не є прикладною.

Для більш повного розкриття поняття прикладної задачі з’ясуємо питання: що треба розуміти під прикладною спрямованістю курсу математики?

Узагальнюючи дослідження С.С.Варданяна, В.В.Пікан, Г.М.Возняка, Ю.М.Колягіна, А.Д.Мишкіса, В.В.Фірсова, З.І.Слєпкань, А.Н.Тихонова, Д.П.Костомарова, М.І.Шкіля та інших і притримуючись думки Дутки Г.Я. вважатимемо, що прикладна спрямованість курсу математики полягає в реалізації методологічного, змістовного й операційного зв’язку його з практикою.

Реалізація цього зв’язку передбачає орієнтацію змісту математики і методичних систем навчання на застосування математики: 1) у суміжних дисциплінах (фізика, хімія, інформатика та ін); 2) у практичній, професійній діяльності людини (техніка, економіка, господарство та ін).

Таким чином, зміст математики доцільно розглядати в двох аспектах. Перший – внутрішній, пов'язаний із спрямованістю змісту, організаційних форм, методів і засобів навчання на оволодіння учнями системою математичних знань, умінь і навичок, на засвоєння теоретичного матеріалу в процесі розв'язання задач, на вироблення умінь самостійно здобувати знання. Другий – зовнішній, пов'язаний з необхідністю розв'язувати задачі, поставлені поза математикою, засобами математики; з оволодінням математичними методами пізнання дійсності, одним з яких є побудова і дослідження математичних моделей, що відображають ті чи інші особливості виробничих, економічних процесів і явищ. Прикладну спрямованість математики ототожнюють із зовнішнім її аспектом.

Виділені аспекти (внутрішні і зовнішній) взаємопов'язані, хоча на практиці один з них є домінуючим. Особливості прояву цих взаємозв'язків обумовлюють рівень прикладної спрямованості того чи іншого курсу математики. Основне завдання при доборі змісту математики в школах та ліцеях економічного профілю – правильно пов'язати теоретичні і прикладні аспекти в єдиний курс, враховуючи майбутню професійну діяльність.

Отже, прикладна задача має задовольняти такі вимоги: бути сюжетною (тобто сформульована природною мовою, явища і події в якій описуються кількісно та якісно); бути словесною моделлю реальної ситуації, що виникає на практиці; має розв'язуватися засобами математики.

Прикладні задачі розрізняють орієнтуючись на групи спеціальностей. Відповідно існують три групи спеціальностей:

- техніко-технологічні (промисловості, зв'язку, транспорту, будівництва, сільськогосподарські та ін);
- гуманітарні (освіти, культури, права, медицини, мистецтва та ін);
- економічні (фінансів, побуту, торгівлі та ін).

Сюжетом прикладної задачі є реальна ситуація, яка відноситься до однієї з трьох груп спеціальностей. Таким чином, можна виділити три типи прикладних задач: 1) техніко-технологічні; 2) гуманітарні; 3) економічні.

Отже, *задачі економічного змісту – це задачі, які стосуються фінансів, побуту, торгівлі, грошових розрахунків, вибору оптимального рішення* тощо. Основними видами задач економічного змісту є задачі на процентні розрахунки, кредитування, касово-розрахункове обслуговування, оптимізацію, фінансову математику тощо.

Задача економічного змісту, як і будь-яка інша прикладна задача, складається з предметного сюжету, умови і вимоги. В предметному сюжеті вказуються (безпосередньо чи опосередковано) економічні поняття та їх причинно-наслідкові зв’язки в якісній або кількісній інтерпретації. До основних економічних понять, що найчастіше використовуються в сюжетних задачах відносяться: продуктивність праці, собівартість, кредит, курс акцій, рента, бюджетний дефіцит, позичковий процент, заробітна плата, амортизаційні відрахування, рентабельність, дохід, витрати, прибуток, окупність та інші. Поняття та зв’язки між ними інтерпретуються до конкретних економічних ситуацій – постановки економічної проблеми, пов’язаної з необхідністю підвищення прибутку, продуктивності праці, рентабельності, зниження собівартості; з розрахунком ціни ринкової рівноваги, курсу акцій, кількості грошей необхідних для обігу, величини ренти, прибутку банку, сукупних витрат підприємства, прибутку підприємства, фірми, податку з доходу, впливу інфляції на заощадження громадян, номінальним і реальним процентом за кредит, позичкового проценту, вибору оптимального рішення та ін.

Умова і вимога задачі розчленовуються на елементарні вимоги і умови. Останні включають: величини (основні й допоміжні); їх значення, що задаються назвою величини, вказівкою на особливості значення величини, розміром цього значення у вигляді іменованого числа; зв’язки між значеннями величин. Погоджуючись з дослідженням Дутки Г.Я. [11], виділимо типові економічні ситуації і співвідношення між значеннями величин, які лежать в основі найважливіших груп задач.

Перша економічна ситуація характеризується співвідношенням операцій: об’єднання кількох значень величин, перехід від однієї одиниці вимірювання до іншої, віднімання від одного значення величини інше значення тієї ж величини, розбиття значення величини на кілька однакових значень та інші.

Друга економічна ситуація характеризується співвідношенням порівняння: рівність (два значення однієї і тієї ж величини рівні), нерівність, різницеве і кратне порівняння, процентне відношення, тощо.

Третя економічна ситуація стосується кількісних залежностей. Вона виникає при кількісній характеристиці певного явища, процесу кількома взаємопов’язаними значеннями величин. Наприклад, купівля-продаж характеризується вартістю, кількістю, ціною; робота – обсягом, часом, продуктивністю; продуктивність праці – роботою, одиницею часу, та ін. Математичними моделями відповідних задач є рівняння, нерівності, або їх системи.

Четверта економічна ситуація відображає функціональні залежності двох або більше співвідношень. Математичними моделями цих задач є функції з однією або двома змінними, які потрібно дослідити. Розрізняють 3 види цієї ситуації, залежно від функціональних зв'язків, що характеризують економічні процеси [11].

1) *Функціональний зв'язок економічних понять без обмежень.* Так, якщо в задачі мова йде про собівартість і продуктивність праці, то між цими поняттями має місце функціональний зв'язок: собівартість нижча, якщо продуктивність праці більша, і навпаки. Ситуація притаманна групі задач, де вимагається з'ясувати найбільш вигідні економічні умови (максимальний прибуток, рентабельність, мінімальну економію коштів при певних умовах, найбільша /найменша/ міцність). Моделями таких задач є лінійні функції однієї змінної. Ставиться завдання: знайти екстремум функції, тобто визначити, за яких значень невідомого ця функція набуває найбільшого або найменшого значення. Храктерною особливістю таких задач є те, що одна або кілька вказаних умов дає змогу отримати або допоміжне рівняння, або виділити єдиний розв'язок із багатьох можливих.

2) *Функціональний зв'язок економічних понять з обмеженням типу системи нерівностей.* Економічна ситуація притаманна групі задач, математичними моделями яких є лінійна функція кількох невід'ємних змінних. Дослідження моделі зводиться до знаходження (максимального чи мінімального) значень лінійної функції за умови, що змінні задовольняють дану систему рівнянь чи нерівностей.

3) *Функціональний зв'язок економічних понять з обмеженнями деякого відрізку часу.* Економічна ситуація об'єднує групу задач, при побудові математичних моделей яких потрібно розглянути значення величини y як функцію часу x, що розраховується від a до b годин. У цьому випадку математичною моделлю задачі буде визначений інтеграл: $y = \int_a^b f(x)\,dx$.

Таким чином, при розв'язуванні задач економічного змісту повною мірою реалізується процес застосування математичного апарату до будь-яких прикладних ситуацій, зокрема економічних.

1.2. Загальнометодичні вимоги та принципи до відбору задач економічного змісту

Вивчення математики як фундаментальної дисципліни в навчальних закладах має, як зазначалось в попередньому параграфі, прикладну спрямованість, зорієнтовану на формування в учнів умінь і навичок складання та дослідження математичних моделей економічних ситуацій.

Одним із напрямків досягнення прикладної спрямованості навчання математики є розв'язування прикладних задач, зокрема задач економічного змісту. Зміст задач економічного змісту має відповідати науковому рівню економічних дисциплін навчального закладу (загальноосвітньої або профільної школи), сприяти виробленню правильних уявлень учнів про роль математичних методів в економіці, ілюструвати найважливіші закономірності процесу пізнання.

Теоретично обгрунтовано, що добір задач економічного змісту ефективний, якщо дотримано таких загальнометодичних ***принципів***: 1) принцип науковості; 2) модульний принцип; 3) принцип систематичності і послідовності; 4) принцип диференційованої реалізованості; 5) принцип реалізації провідних функцій задач у навчанні; 6) принцип методичної доцільності [11]. Розглянемо докладніше ці принципи.

<u>Принцип науковості.</u> Система задач економічного змісту має задовольняти таким умовам:

- відповідність змісту задач та інформації, яку отримують учні при їх розв'язуванні, науковому рівню економічних дисциплін навчального закладу;
- створення правильних уявлень учнів про роль математичних методів в економіці;
- врахування найважливіших закономірностей процесу пізнання.

Ці умови взаємопов'язані, оскільки реалізація кожної із наступних обумовлена виконанням попередніх, а кожна попередня умова є необхідною базою для реалізації наступних. Сучасний понятійний апарат економіки, її закони і закономірності повинні найповніше відображатися в задачному матеріалі, адже це надасть змогу з'ясувати роль і місце математики як інструменту пізнання явищ мікро- і макроекономіки, реалізувати один із ефективних методів наукового пізнання - математичне моделювання.

<u>Модульний принцип.</u> До тем програми з математики конструюються економічні модулі. З них викладач на власний розсуд може підібрати матеріал для розгляду, враховуючи рівень математичної підготовки учнів, їхні інтереси і специфіку майбутньої професії. Зміст модуля включає:

- економічні відомості;
- деякі математичні моделі економіки;
- добір задач з економічним змістом, тобто ті питання економіки, де використовується математичний матеріал даної теми.

<u>Принцип систематичності і послідовності.</u> Він передбачає систематичне і послідовне (від легшого до складнішого) розв'язування задач з економічним змістом. До кожної теми рекомендується добирати спеціальні

ланцюжки задач, розв’язання кожної з яких послідовно доповнює наявні в учнів знання і уміння застосовувати математичний апарат до дослідження економічних процесів деякою порцією нових знань і умінь, розширює наявні способи математизації економічних ситуацій.

При доборі задач має бути забезпечена наступність встановлення зв’язків між новими і раніше набутим методами чи способами розв'язування, опора при розв'язуванні даної задачі базується на методах розв’язаної раніше задачі. У зв’язку з цим рекомендується в ланцюжок включати такі опорні задачі, ідея розв’язання яких використовується при розв’язувані наступних задач. Якщо позначити T_0 - опорні, T_1, T_2, T_3 ... - задачі, при розв’язуванні яких використовується ідея розв’язання опорних задач, то ланцюжок розв’язування задач з певної теми можна подати так:

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to T_0 \to T_4 \to T_5 \to T_0 \to ...$$

Принцип диференційованої реалізованості. Система задач має бути розрахована на реалізацію рівневої диференціації в процесі навчання математики. Рівнева диференціація - це, зокрема, *диференціація за рівнем складності та глибиною засвоєння* (а не пояснення) навчального матеріалу, за рівнем складності навчальних задач і вправ. Складність задач обумовлюється даними в умові економічними поняттями і причинно-наслідковими зв’язками між ними, видами економічних ситуацій, що відображені в задачах. Відповідно до рівнів вимог щодо засвоєння курсу математики та рівнів навчальних досягнень учнів (початковий, середній, достатній, високий) рекомендується чотирирівнева система задач із економічним змістом.

Особливістю рівневої диференціації є те, що по-перше, кожний наступний рівень складності задач вимагає від учнів більш повного використання як математичних, так і економічних знань; по-друге, задачі кожного наступного рівня включають елементи попередніх рівнів складності. Розглянемо детальніше задачі на кожному з рівнів складності.

Початковий рівень. Учні розв’язують задачі, які містять поняття, що стосуються однієї економічної категорії. Вони сприяють, як правило, накопиченню елементарних економічних знань.

Кондитер за 10 днів роботи виготовив 1750 виробів. Знайти денну продуктивність праці кондитера. (*початковий*)

Середній рівень. Учням пропонуються задачі, в умовах яких дано одне економічне поняття, але його застосування передбачає врахування ряду умов або два економічні поняття – одне відоме учням, друге – невідоме (не входило в умови попередніх задач).

Наприклад:

Кондитер після трьох днів роботи використав новий пристрій, в результаті чого продуктивність його праці збільшилася на 5 одиниць. За 10 днів роботи він виготовив 1700 одиниць виробів. Знайти денну продуктивність праці кондитера. (*середній*)

В обох задачах використовується одне економічне поняття "продуктивність праці" (здатність робітника виготовити впродовж певного робочого часу певний об'єм кількість продукції). Однак у 1-й задачі це поняття використовується безпосередньо, а в 2-й – для його використання необхідно врахувати умови:

- перші 3 дні без нового пристрою; решта 7 днів з новим пристроєм;
- продуктивність праці збільшилась на 5 одиниць за рахунок нового пристрою.

Достатній рівень. Задачі цього рівня, як і деякі задачі попередніх, містять 2 (інколи 3) економічні поняття, проте в математичному і прикладному планах вони більш складні. Їх розв'язання вимагає елементарного економічного аналізу для розкриття причинно-наслідкових зв'язків даних економічних понять. Нескладний якісно-кількісний і економічний аналіз сприяє підвищенню економічної грамотності учнів, вироблення умінь самостійно конструювати аналогічні задачі економічного змісту. Наведемо приклад.

Дві бригади з 10 та 15 робітників за зміну виготовили 620 одиниць продукції. Після удосконалення технології продуктивність праці в обох бригадах підвищилась, і за зміну почали виготовляти 702 одиниці продукції. На скільки процентів збільшилася продуктивність праці обох бригад, якщо кожний робітник першої бригади в середньому підвищив продуктивність на 20%, а кожний робітник другої – на 10%? Знайти середньомісячну заробітну плату кожного робітника після вдосконалення технології виробництва деталей, якщо за кожну деталь платять 0,5 грн. (кількість робочих днів у місяці - 22).

Ця задача, як і попередня, поділяється на дві частини: "до" і "після" удосконалення технології виробництва. Однак зв'язок між економічними поняттями (продуктивність праці і заробітна плата) більш глибокий. Для розв'язання задачі спочатку потрібно знайти зв'язок між продуктивністю праці бригад за зміну "до" удосконалення технології, врахувавши три умови:

1) продуктивність робітників першої бригади збільшилась на 20%;

2) другої - на 10%;

3) продуктивність обох бригад збільшилась на 702 - 620 = 82 одиниці продукції.

Високий рівень. У задачах цього рівня дано два або три економічні поняття. Їх розв’язання потребує глибокого аналізу економічних понять і зв’язків між ними. Результатом аналізу, як правило, є з’ясування факторів, які сприяють економічному поліпшенню ситуації. Задачі нестандартні за змістом, нерідко в них поставлена проблема, пов’язана з пошуком шляхів підвищення економічного ефекту (прибутку на підприємстві, окупності капіталовкладень, зниження собівартості продукції, рентабельності тощо), або способів оптимального розподілу і використання обмежених ресурсів (найдоцільніше використання обмежених виробничих ресурсів для випуску певної продукції, найбільш ефективного використання транспортних засобів для перевезення заданого обсягу продукції тощо).

Наприклад: *У місті є два склади борошна і два хлібозаводи. Щоденно з першого складу вивозять 50 т борошна, а з другого - 70 т. Це борошно доставляють на хлібозаводи, причому перший отримує 40, другий - 80 т. Перевезення однієї тонни борошна з першого складу до першого заводу коштує 1,2 грн., з другого складу до другого заводу - 1,6 грн., з другого складу до першого заводу - 0,8 грн. і з першого складу до другого заводу - 1 грн. Як потрібно спланувати перевезення, щоб їх вартість була мінімальною?* (Транспортна задача).

Запропонована рівнева система задач з економічним змістом, складність яких зростає поступово, дає змогу організувати ефективну індивідуальну і самостійну роботу учнів, найповніше врахувати їхні інтереси, здібності і потреби.

<u>Принцип реалізації провідних функцій задач у навчанні.</u> Задачі у навчанні математики є і об’єктом вивчення, і засобом навчання. Звичайно виділяють чотири основні їхні функції – навчальна, розвиваюча, виховуюча і контролююча. Жодна з цих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділяти провідну і домагатися її реалізації в першу чергу.

<u>Принцип методичної доцільності.</u> Реалізація цього принципу передбачає дотримання ряду ***вимог*** при відборі задачного матеріалу.

1. Доступність учням змісту економічних понять, даних у задачі, і зв’язків між ними.
2. Реальність ситуації, що описується в задачі, числових даних, постановки запитання й отриманого результату.
3. Дотримання єдиних позначень економічних понять.
4. Задачі з економічним змістом мають сприяти логічному й аналітичному осмисленню математичних понять, методів і прийомів у контексті специфіки змісту різних спеціальних дисциплін.

5. Задача має бути зрозумілою для учнів, викликати в них інтерес до розв'язання. А він може бути зумовлений як змістом задачі (актуальність економічної проблеми, її практична значимість, незвична фабула тощо), так й інформацією викладача про практичну значимість цієї задачі.
6. Формулювання задачі повинно бути по можливості лаконічним і чітким.
7. Задачі, по можливості, необхідно добирати так, щоб вони мали різні способи розв'язання.

Добираючи задачі, рекомендується включати, за потребою, невеликі фрагменти теорії. Аналізуючи її, учні з'ясовують обсяг і зміст певного економічного поняття, досліджують особливості зміни значень величин, що його характеризують, потім пропонуються задачі, де використовується це поняття.

Практика реалізації сформульованих основних вимог при доборі задач з економічним змістом у процесі вивчення математики в навчальних закладах економічного профілю дає підстави зробити такі *висновки:*

1) в учнів підвищується зацікавленість і свідома відповідальність при вивченні основних математичних понять і методів;

2) при вивченні економічних дисциплін, в яких використовуються математичні методи, учні адаптовані до останніх, що сприяє більш глибокому їх засвоєнню;

3) належна обізнаність учнів із можливостями використання математичного апарату в економічних задачах вимагає від викладачів профілюючих предметів також широко використовувати його у процесі їх викладання.

1.3. Психолого-педагогічні особливості формування вмінь та навичок учнів розв'язувати задачі економічного змісту

Насьогодні одним із головних завдань сучасної освіти є вміння застосувати одрежані знання на практиці. Це стосується не тільки фізики, хімії, економіки, а і математики. Розв'язуванні задач економічного змісту в шкільному курсі математики буде сприяти розвитку вмінь учнів вирішувати практичні господарські проблеми.

У різних життєвих ситуаціях учні повинні зуміти успішно застосувати одержані на уроках математики знання. А саме, їм необхідно здійснити перехід від абстрактних теоретичних знань до практичних дій. Як показали дослідження багатьох психологів, учні, які володіють теоретичним матеріалом, вміють розв'зувати навчальні математичні задачі з абстрактними даними, не завжди вміють використати свої знання для розв'язання реальних життєвих ситуацій

Богоявленський Д.Н. і Менчинська Н.А. стверджували, що заключним етапом у розвитку розумових операцій учнів є не становлення розумової дії, а реалізація його в практичній діяльності . Тому перед учителями математики стоїть важливе завдання, а саме, навчити учнів переводити на мову математики ті чи інші життєві ситуації і таким чином робити математичні знання дієвими.

Гальперін П.Я. стверждував, що абстракції очищують і спрощують матеріал і тим суттєвіше полегшують дію. Якщо учні працюють лише із спрощеним матеріалом, то потім у них виникають труднощі. Виявляється, що для багатьох учнів перехід від конкретного до абстрактного мислення є так само важким, як і перехід від абстрактного до конкретного.

На іншу особливість проблеми взаємозв'язків теорії та практики звернула увагу Щукіна Г.І. Вона стверджувала, що пізнавальний інтерес – актуальна проблема сучасної дидактики, і у частини школярів дуже розвинутий інтерес до знань прикладного характеру. Особливо виражена ця направленість у підлітків 5-6 класів, які прагнуть побачити і зафіксувати те, що дає їм пізнання. Можна сказати, що їх пізнавальний інтерес міцно пов'язаний із прихильністю до практичної, економічної діяльності, цінність якої для формування інтересу до пізнання далеко не вивчена.

Психологи, дидакти і методисти одностайно вважають, що учнів потрібно спеціально навчати вмінню поєднувати теоретичні знання з практичними діями. При цьому включення в навчальний процес питань і задач практичного змісту є лише необхідною умовою такого навчання. Крім цього, необхідно навчити учнів спеціальним прийомам розумової діяльності, необхідної для застосування теоретичних знань і формуванню практичних умінь та навичок, які лежать в основі застосування математики на інших уроках, у виробничій та життєвій практиках. Проблема застосування знань на практиці потребує сформувати в учнів уміння аналізувати і синтезувати ситуації, конкретизувати загальні, абстрактні положення, пізнавати відомі фігури, відношення, залежності в конкретних ситуаціях, подумки конструювати фігури, перебудовувати знання у відповідності з вимогами задачі, переосмислювати один і той же об'єкт чи явища під кутом зору різних систем знань, варіювати способи дії, переключатись з одного виду розумової діяльності на інші [25].

Ефективного формування умінь розв'язувати задачі економічного змісту можна досягти при:

- чіткому визначенні цілей розв'язування,
- мотивації розв'язування,
- застосуванні в процесі розв'язування попереднього досвіду, набутих знань і вмінь,
- забезпеченні взаємопереходів від абстрактних операцій над значеннями величин до наочних конструкцій і навпаки,
- зіставлення висловлюваних гіпотез і реальних результатів,
- здійсненні самоконтролю,
- забезпечення орієнтовної основи дій (ООД – це сукупність вказівок і орієнтирів, за допомогою яких можна виконати дану дію).

Крім того, якщо розв'язувати задачу за допомогою складання рівнянь, то побудова математичної моделі може полегшитись при умові, що учні ознайомлені з такими вказівками:

1) визначити скільки і які саме об'єкти або процеси розглядаються в задачі;
2) визначити значення величин, які характеризують кожний об'єкт чи процес;
3) встановити залежності між визначеними значеннями величин;
4) вказати відомі і невідомі величини;
5) знайти залежності між невідомими величинами;
6) ввести одне невідоме (x), яке вибрати раціональним щдяхом;
7) виразити решту невідомих через x;
8) визначити умови для складання рівняння;
9) скласти рівняння.

При розв'язуванні задач економічного змісту доцільно використовувати такі ООД [11].:

1. Плани розв'язування окремих задач.
2. Алгоритмічні приписи розв'язання задач певних типів (на роботу, на обчислення ставок процента в банку, на обчислення статутного фонду підприємства, на розрахунок найпростіших платежів з банком та ін.).
3. Евристики для:
   - семантичного аналізу складу задачі;
   - формалізації заданої ситуації;
   - застосування способів розв'язання;
   - побудови планів розв'язання певних груп, задач.

При цьому вибір того чи іншого виду ООД для розв'язання тієї чи іншої задачі залежить від:

- характеру задачі;
- контексту знань, в яких розглядається дана задача;
- мотиву розв'язання задачі, цілей навчання.

Методика навчання розв'язувати задачі економічного змісту має враховувати дидактичні цілі, організаційні форми, загальні методи і психолого-методологічні закономірності формування відповідних умінь. Приймаючи до уваги дослідження Дутки Г.Я. [11] формування вмінь буде більш ефективним, якщо воно включатиме такі етапи:

1) Підготовчо-мотиваційний.
   - Мотивація введення даного способу діяльності. Актуалізація опорних знань.
   - Встановлення всіх програмних вимог до способу діяльності на основі аналізу програм і відповідних навчальних та методичних посібників. Ці програмні вимоги показують, на базі і в контексті яких знань повинен формуватися даний спосіб діяльності. Виділення методів, прийомів і засобів, необхідних для його формування.

2) Операційно-пізнавальний етап.
   - Виділення групи задач, при розв'язуванні яких необхідно застосовувати ті операції, які учні повинні засвоїти в подальшому. Встановлення оператора задач і тих знань, на базі яких їх можна розв'язати.
   - Осмислення способу розв'язування даної групи задач на двох-трьох задачах-моделях (характерні задачі з цієї групи, розв'язання яких включає всі операції, притаманні даному способу діяльності). Виділення операцій, необхідних для розв'язання цих задач. Роздільне закріплення операцій дібраними вправами та їх узагальнення.
   - Визначення найбільш раціональної послідовності виконання операцій. Складання на основі узагальнених операцій моделі способу діяльності (опорного плану, алгоритму, евристичної схеми тощо).
   - Застосування. Розв'язування спочатку діагностичних задач, у процесі якого контролюється повнота застосування способу діяльності, відповідність його встановленим нормам, потім – задачі, які вимагають умінь самостійно застосовувати даний спосіб у варіативних нестандартних умовах. Встановлення меж його застосування. Уточнення, якщо є потреба, способу діяльності. Таким чином, на операційно-пізнавальному етапі основна увага приділяється розкриттю відповідної системи об'єктивних умов виконання способу діяльності – орієнтовної основи діяльності.

3) Рефлексивно-оцінювальний етап.

Учні узагальнюють спосіб діяльності, аналізують власну діяльність, оцінюють її, співставляють результати цієї діяльності з поставленими навчальними завданнями, корегують виконану роботу, усувають виявлені прогалини.

Контроль, корекція і оцінювання навчальної діяльності учнів здійснюється як у процесі її виконання, так і у формі вказаного рефлексивно-оцінювального етапу. Рекомендуються такі види контролю: 1) за кінцевим результатом; 2) покроковий контроль; 3) контроль за параметрами діяльності.

Слід погодитись з поглядами психологів, дидактів і методистів стосовно того, що процес розв'язування задачі має складатись з таких етапів:

1) аналіз формулювання задачі, тобто виділення в ній того, що дано і що треба знайти або довести, дослідити;
2) пошук плану розв'язання;
3) здійснення плану, перевірка і дослідження знайденого розв'язку, тобто того, що знайдений розв'язок задовольняє вимоги задачі;
4) обговорення (аналіз) знайденого способу розв'язування з метою з'ясування його раціональності, можливості розв'язування задачі іншим методом чи способом.

Враховуючи специфіку задач економічного змісту потрібно деталізувати пошук та здійснення плану розв'язання. Таким чином можна виділити допоміжних 3 етапи: формалізація, розв'язування задачі всередині побудованої моделі, інтерпретація [11]. Розглянемо їх докладніше.

<u>Етап формалізації</u> – перехід від реальної економічної ситуації, до побудови формальної економічної моделі. Цей перехід вимагає розпізнавання даних економічних понять, розкриття структури задачі, виділення умови і вимоги та елементарних умов і вимог, з'ясування основних і допоміжних величин, що характеризують економічні поняття задачі. На цьому етапі встановлюються способи завдання значень основних і допоміжних величин (назва величини, особливості і розмір її значення), види співвідношень між значеннями величин. Усе це дає змогу замінити дані економічні поняття і зв'язки між ними математичними еквівалентами.

Етап завершується формалізацією вихідної задачі: переведенням умови задачі на адекватну математичну мову – на мову арифметичних або алгебраїчних виразів, рівнянь, нерівностей та їх систем, функцій, інтегралів та інших абстракцій, сформульованих із залученням математичних термінів. Цим самим побудована математична модель вихідної задачі, в якій відображено дану економічну ситуацію.

Математична модель повинна бути адекватною вихідній задачі і простою. Під адекватністю розуміють правильну якісну і кількісну характеристику економічної ситуації, при чому кількісна характеристика має бути подана з максимальною точністю. Щодо простоти моделі, то ряд учених вважають, що “модель є простою, якщо сучасні засоби дослідження (фізичні, математичні, зокрема обчислювальні) дають змогу провести з розумною точністю якісний або кількісний (залежно від постановки задачі) аналіз обраних характеристик - властивостей” [5]. Вимоги адекватності і простоти взаємопов’язані – чим модель більш адекватна даній економічній ситуації, тим вона менш проста, і – навпаки. “…З точки зору вимог адекватності складні моделі мають переваги над простими. Справді, застосовуючи складну модель, можна врахувати більше число факторів, які можуть так чи інакше впливати на характеристики, що вивчаються” [5]. Питання простоти математичної моделі тісно пов’язане з вибором змінних, що характеризують взаємозв’язки економічних понять. Деякі дослідники [2] вважають, що “…ступінь розуміння явища обернено пропорційний числу змінних, що фігурують в його описанні” [2]. Цю думку поділяють й інші [5].

Переведення задачі на адекватну математичну мову передбачає всебічний аналіз економічної ситуації, відтворення і співставлення даних в умові задачі співвідношень і зв’язків між ними. Під час сприйняття та аналізу сюжетних задач може виникнути розрив між конкретною ситуацією, описаною в умові задачі, й абстрактною логіко-математичною структурою її розв’язування. Щоб усунути цей розрив, рекомендується конкретизувати математичну структуру задачі за допомогою спеціальних моделей. Такі моделі називають допоміжними. Вони є: а) формою фіксації результатів аналізу; б) засобом переформулювання задачі; в) основним засобом (якщо задача складна) побудови математичної моделі. Існують такі види допоміжних моделей:

1. *Предметні моделі*. Вони в усій конкретності унаочнюють ті ситуації, які описані в умові задачі. Це різні предмети навколишнього середовища або їх моделі, малюнки, діаграми, креслення.
2. *Схематичні моделі*. За їх допомогою економічна ситуація, подана в задачі, відтворюється схематично і узагальнено. Це графічні схеми, які відображають сюжет задачі за допомогою геометричних фігур, графіки функцій, різні схематичні записи задачі. Цей вид, зберігаючи наочність предметних моделей, узагальнено відтворює реальну економічну ситуацію.
3. *Структурні моделі (графи)*. Призначені для наочного зображення залежностей і зв’язків між даними і шуканими величинами, тобто для наочного зображення математичної структури розв’язання задачі.

На етапі формалізації можуть використовуватись всі три види моделей. Моделюючи зв'язки між співвідношеннями значень величин у задачі економічного змісту і варіюючи їх, прийнявши одне (чи кілька) значення величини за невідоме, дістаємо різні математичні моделі вихідної задачі. Простота математичної моделі залежить від обраного зв'язку між співвідношеннями значень величин. Таким чином, доцільно використовувати і допоміжні моделі. При виборі зв'язків між співвідношеннями значень величин, а отже, й при виборі математичної моделі, доцільно враховувати:

1) сформованість в учнів відповідних економічних понять і знання причинно-наслідкових зв'язків між ними;
2) кількість операцій, необхідних для розв'язування задачі всередині побудованої математичної моделі;
3) "зручність" математичної моделі для її дослідження та інтерпретації знайдених результатів.

Етап розв'язання задачі всередині побудованої математичної моделі. Успішне виконання цього етапу залежить від правильно обраного методу розв'язання і залучення допоміжного математичного апарату. При виборі методу розв'язання увага звертається не лише на зміст вихідної задачі, а й на структуру одержаної математичної моделі.

Спочатку, орієнтуючись на зміст вихідної задачі, доцільно обрати загальний математичний метод. Однак, як уже зазначалось, розв'язання математичної моделі полегшується при використанні допоміжних моделей і деякі задачі передбачають застосування декількох методів. У цьому випадку варто орієнтуватись вже не на зміст вихідної задачі, а на зміст побудованої моделі. При виборі методу розв'язання можна користуватись схемою, складеною Абчуком В.О. [1], яка задачі економічного змісту ставить відповідно до математичного методу.

№ п/п	Економічний зміст задачі	Математичний метод
1.	Економічні розрахунки, пов'язані з визначенням долей, відсотків, пропорцій, матеріальних ресурсів, розрахунком грошей, розрахунком прибутку, податків, рентабельності тощо.	Арифметика (частини, відсотки, пропорції) Алгебра (рівняння, функції, графіки)
2.	Розрахунки задач, які містять послідовності взаємопов'язаних економічних показників і об'єктів (т. зв. "піраміди").	Арифметична та геометрична прогресії

3.	Розрахунки, пов'язані зі сполученням різних економічних об'єктів, їх перестановкою та розміщенням.	Комбінаторика
4.	Розрахунки в галузі просторових відношень і форм економічних об′єктів.	Геометрія
5.	Оцінка економічних ситуацій, пов'язаних з визначенням істинності чи хибності інформації, необхідністю знайти вихід з тяжкого становища.	Логіка
6.	Вибір оптимального варіанта розв'язання економічної задачі для випадку, коли умови описуються рівняннями 1-го степеня.	Лінійне програмування
7.	Вибір оптимального варіанта розв'язання економічної задачі для випадку, коли умови описуються рівняннями 2-го степеня.	Нелінійне програмування
8.	Вибір оптимального плану багатоетапної економічної операції, коли результати кожного наступного етапу залежать від попереднього.	Динамічне програмування
9.	Економічні розрахунки, пов'язані з явищами і величинами випадкового характеру.	Теорія ймовірностей
10	Збирання, обробка та аналіз статистичних економічних матеріалів.	Математична статистика
11	Розрахунки виробничо-економічних показників та вироблення необхідних рекомендацій в масових випадкових явищах, що повторюються.	Теорія масового обслуговування (теорія черг)
12	Економічні розрахунки, пов'язані з явищами і величинами випадкового характеру на основі штучно вироблених статистичних матеріалів.	Метод статистичних випробувань (Монте-Карло)
13	Вироблення економічних рішень в умовах невизначеності ситуації, яка спричинена свідомими злісними діями конфліктуючої сторони.	Теорія ігор
14	Вироблення економічних рішень в умовах невизначеності ситуації, яка спричинена об'єктивними обставинами.	Теорія статистичний рішень
15	Складання і реалізація раціональних планів проведення економічних операцій, що передбачають розв'язання задачі протягом найменшого часу та з найкращими	Мережове планування

	результатами.	

Етап інтерпретації – це переклад одержаного результату на мову вихідної задачі. На цьому етапі з’ясовується відповідність одержаних результатів розв’язання математичної задачі даній економічній ситуації, оцінюється значення знайдених економічних факторів для практичної діяльності, встановлюються причинно-наслідкові залежності.

Розглянемо ці етапи на конкретних прикладах окремих тем шкільного курсу математики.

РОЗДІЛ 2. ЗАДАЧІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ ПРИ ВИВЧЕННІ ОКРЕМИХ ТЕМ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

2.1. Задачі економічного змісту на відсотки, послідовності, прогресії

Розглянемо задачі, які виникають при проведенні фінансових операцій. Сукупність таких задач іноді називають *математикою фінансів (фінансова математика)*. В основі більшості фінансових операцій лежить стародавня, відома вже декілька тисяч років ідея: давати гроші "в рост" або "під проценти". Різні способи нарахування проценту і визначають всю багатогранність фінансової діяльності.

Задачі, які стосуються математики фінансів розглядаються ще в 6 класі при вивченні відсотків. У підручниках для загальноосвітніх шкіл зустрічаються такі задачі, як:

Задача 1. [17, № 9] Ощадний банк виплачує 80 % річних. Скільки виплатив банк вкладнику за рік, якщо вклад складав 100 тис. грн., 200 тис. грн., 5 млн. грн., 10 млн. грн.?

Задача 2. [17 № 69] Після першого вдосконалення продуктивність станка збільшилась на 10 %, а після другого – ще на 10 %. На скільки відсотків збільшилась продуктивність станка в результаті двох вдосконалень?

Задача 3. [17, № 96] В яку суму перетворяться 4000 грн., які дають 90 % річних через рік; через 9 місяців; через 3 роки?

Задача 4. [17, № 97] У банк, який виплачує 80 % річних поклали 6000 грн. В яку суму перетвориться цей внесок через 4 місяці; через 8 місяців; через 4 роки?

Щодо методики викладання і навчання учнів розв'язувати задачі економічного змісту на відсотки, то варто спочатку спрямувати мислення учнів в економічному напрямку. Цьому сприяють такі задачі.

(початковий рівень)

Задача 5. [16, № 12] Скільки відсотків від 1 грн. становлять: 1 коп.; 5 коп.; 44 коп.; 1 грн.; 5 грн.; 3,2 грн.?

Задача 6. [1, № 28] Ваш капітал збільшився в 5 разів. На скільки % ви стали заможніше?

Задача 7. [1, № 29] Ваш капітал зменшився в 5 раз. На скільки % ви стали бідніше?

Задача 8. [1, № 30] Ваш капітал збільшився на 50 %. У скільки разів ви стали заможніше?

Задача 9. [1, № 31] Ваш капітал зменшився на 50 %. У скільки разів ви стали бідніше?

Далі пропонуються задачі, які мають питання "чи вірно, що?", які орієнтують учнів на правильну відповідь.

(достатній рівень)

Задача 10. [20, № 4] При запровадженні нової техніки собівартість продукції знижувалась 2 рази: перший раз на 20 %, другий – на 5 %. Чи вірно, що початкова собівартість знизилась на 24%.

Розв'язання. Часто зустрічаються помилкові міркування: перший раз собівартість знизилась на 20%, другий – на 5%. Всього: 20+5=25, тобто на 25 %. На основі цього учні дають невірну відповідь. Викладачу слід звернути увагу учнів на те, що другий раз на 5% знизилась не початкова собівартість продукції, а нова, та, яку отримали після зниження собівартості на 20%. Тобто

$100\% - 20\% = 80\%,\qquad 0{,}05 \cdot 80\% = 4\%,$

$80\% - 4\% = 76\%,\qquad 100\% - 76\% = 24\%.$

Отже, початкова собівартість дійсно знизилась на 24%.

Задача 11. [20, № 5] Протягом останніх років 2 рази були знижені ціни на деякі типи телевізорів. У перший раз на 25 %, а другий – на 20 %. Чи вірно, що початкова вартість цих телевізорів понизилась на 40 %?

(високий рівень)

Задача 12. [1, Приклад 2.8.] У результаті першої переоцінки товару його ціну знизили на 20 %. При наступній переоцінці нову ціну зменшили ще на 20 %. І, насамкінець, при сезонному розпродажі останню ціну зменшили ще на 30 %. Якою стала продажна ціна товару, якщо спочатку вона становила 1000 грн.?

Розв'язання:

В результаті першої переоцінки ціна товару стала рівна: 1000 – (20 % від 1000) = 800 грн.

В результаті другої переоцінки: 800 – (20 % від 800) = 640 грн.

В результаті останньої переоцінки: 640 – (30 % від 640) = 448 грн.

Отже, ціна продажу становила 448 грн.

Задача 13. [17, № 1026] Ціну товару знизили на 20 %, потім нову ціну знизили ще на 25 %, після чого ціна товару складала 120 тис. крб. Якою була ціна товару до її зниження? На скільки відсотків знизилась ціна товару?

При вивченні прогресій в 9 класі автор пропонує розглядати також задачі економічного змісту.

Задача 14. [20, № 28] Виробництво тканин за останні 5 років на підприємстві збільшилось з 10,7 до 12,1 млрд. м^2, і в наступні 5 років планується зростання виробництва до 14-15 млрд. м^2. Порівняти середньорічний приріст виробництва тканин протягом минулих і майбутніх 5 років.

Розв'язання. Будемо вважати, що виробництво тканин щорічно рівномірно збільшувалось на однакове число, тобто виробництво тканини за рік зростає в арифметичній прогресії. Тоді різниця цієї прогресії (d) є середньорічним приростом виробництва тканин. Запишемо члени цієї прогресії:

10,7 a_2 a_3 a_4 a_5 12,1

1995 1996 1997 1998 1999 2000

Відомі a_1 = 10,7 і a_6 = 12,1 , n = 6. Для знаходження різниці використаємо формулу n-го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + d(n-1)$, звідки $d = (a_6 - a_1)/5$.

Середньорічний приріст виробництва тканин за останні 5 років склав (12,1 – 10,7) : 5 = 0,28. А в наступні 5 років очікується від (14 – 12,1) : 5 = 0,38 до (15 – 12,1) : 5 = 0,58 (млрд.м^2).

Отже, $0{,}28 < 0{,}38 < 0{,}58$.

Іноді середньорічний приріст задається у відсотках. Тоді в минулому він складав 28 %, а в майбутньому планується 38-58 %.

Задача 14*. [20, №53] Виплати й пільги з суспільних фондів споживання за останні 5 років збільшились з 117 до 146,5 млн. грн., а в наступні 5 років вони досягнуть (за прогнозом) 176-180 млн. грн. Розрахувати середньорічні темпи приросту виплат і пільг із суспільних фондів споживання за минулі та майбутні роки.

Будемо вважати, що виплати й пільги щорічно збільшувались в q разів, тобто

1995 1996 1997 1998 1999

$117q$ $117q^2$ $117q^3$ $117q^4$ $117q^5$

Звідси, $117q^5$ =146,5 , $q = \sqrt[5]{146{,}5/117} \approx 1{,}046$. Цей показник, що характеризує середньорічний ріст виплат і пільг, називають ***середньорічним темпом приросту***.

Тоді в наступні 5 років середньорічний темп приросту становитиме за прогнозом: від $\sqrt[5]{176/146{,}5} \approx 1{,}037$ до $\sqrt[5]{180/146{,}5} \approx 1{,}042$. Часто темп приросту виражають у відсотках. Тоді в розглянутій задачі він дорівнює 104 %.

Задачі, які стосуються математики фінансів доцільно розглядати при вивченні розділу "Числові послідовності" в 9 класі загальноосвітньої школи та при вивченні розділу “Відсотки” в 11 класі шкіл, ліцеїв і гімназій економічного профілю.

Після активізації знань умінь і навичок учнів за допомогою таких задач, як: (с.р.– 4) Ощадний банк виплачує 80% річних. Який прибуток буде мати вкладник на кінець року, якщо внесок складає 16000 крб.? – варто перейти до теорії і пояснити, що взагалі в фінансовій математиці існує дві основні схеми нарахування відсотків.

Почнемо з розгляду нарахування *простих відсотків*. При використанні простих процентів базою нарахування відповідної процентної ставки за кожний встановлений період буде одна і та сама основна сума строкового вкладу.

Позначимо через A грош.од. первісну суму. Процентна ставка дорівнює q відсотків річних. При нагромадженні грошових коштів з урахуванням простих відсотків *у кожний часовий період відсоток нараховується лише на первісний вклад*. Тоді грошові нагромадження складуть:

після першого року $A_1 = A + \frac{Aq}{100} = A + Ar$, де $r = \frac{q}{100}$;

після другого року $A_2 = A_1 + Ar = (A + Ar) + Ar = A(1+2r)$;

. . . .

після n-го року $A_n = A\,(1 + nr)$.

Таким чином, знайшли суму грошових нагромаджень на кінець n-го року:

$$\boldsymbol{A_n = A\,(1 + nr).}$$

Задача 15. [27] Нехай 3 млн грош. од. видано в кредит на 6 місяців під прості відсотки за ставкою 10% за місяць. Знайти нарощуване значення боргу наприкінці кожного місяця.

Розв’язання. Позначимо A_k – нарощуване значення боргу наприкінці місяця k. Оскільки A=3 млн. грош. од., $r = \frac{10}{100} = 0.1$, то, виходячи з формули грошових нагромаджень за простими відсотками, маємо $A_k = 3(1+0.1\,k)$, $k = \overline{1,6}$.

Отриманий результат представимо у вигляді таблиці.

K	0	1	2	3	4	5	6
A_k	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8

Можна побачити, що послідовність $A_0=A, A_1, A_2, \ldots, A_6$– це арифметична прогресія з початковим членом A_0=3 млн. грош. од. і різницею 300 тис. грош.од.

При використанні схеми *складного проценту* доход за кожний період обчислюється не з певної суми вкладу, а з її загальної суми, яка включає основну (первісну) суму та проценти, що були нараховані за всі попередні періоди. Отже, *у кожний наступний часовий період відсоток нараховується на попередню суму вкладу* (не на первісну суму вкладу).

При введених попередньо позначеннях, враховуючи, що відсоток прибутку нараховується на всі грошові нагромадження отримаємо:

після першого року $A_1 = A + Ar = A(1+r)$;

після другого року $A_2 = A_1 + A_1 r = A(1+r)^2$;

. . . .

після n-го року $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} r = A(1+r)^n$.

Отже, при нарахуванні складних відсотків протягом n років кінцева сума грошових нагромаджень складе $\mathbf{A_n = A\,(1+r)^n}$.

Величина $S = 1+r$ називається коефіцієнтом складного відсотку.

Задача 16. [27] Нехай первісний вклад A=250 тис.грош.од. вкладено на 4 роки під складні відсотки за ставкою 100% річних. Знайти нарощуване значення вкладу за роками.

Розв'язання. Позначимо A_k – нарощуване значення вкладу наприкінці k-го року. Оскільки $A=250\cdot10^3$ грош.од., $r = \frac{100}{100} = 1$, то за формулою грошових нагромаджень за складними відсотками маємо $A_k = 250\cdot10^3\,(1+1)^k = 250\cdot10^3\cdot2^k$, $k = \overline{1,4}$.

Складемо таблицю.

k, років	0	1	2	3	4
A_k	$250\cdot10^3$	$5\cdot10^5$	10^6	$2\cdot10^6$	$4\cdot10^6$

Як видно, при q =100 % зростання вкладу відбувається дуже швидко.

Задача 17. [1, Приклад 2.6.] Ви взяли в банку в кредит 1 млн. у.о. на 10 місяців при щомісячній кредитній ставці 30 %. Скільки вам прийдеться виплатити за кредит?

Розв'язання:

Плата за кредит – це щомісячні виплати, тобто 30 % від 1 млн. протягом 10 місяців, тобто $П_{\text{за кредит}} = 0{,}3\cdot10^6\cdot10 = 3$ млн. у.о.

Задача 18. [1, Приклад 2.7.] Ви отримали в банку позику в розмірі 5 млн у.о. на 1 рік. Позика принесе вам річний дохід 100 тис. у.о. Якій нормі процента (річних) це відповідає?

Розв'язання:

Норма процента дорівнює: $ПЦ = \frac{Дохід}{Позика} \cdot 100$. Отже, $\frac{100000}{5000000} \cdot 100 = 2\%$.

Задача 19. [1, № 32] Ви прагнете отримати річний дохід 1 млн. грн. при нормі відсотка 5% річних. Яку позику вам необхідно взяти на рік?
Задача 20. [1, № 33] Ви отримали в банку позику 300 тис. грн. при нормі процента 10% річних. Яким буде ваш дохід?
Задача 21. [1, № 34] Банк виплачує своїм вкладникам банківський процент 4% річних і дає позики позичальникам під 10% річних. Чому дорівнює банківський прибуток від засобів вкладників в 10 млн. грн. при видачі позик позичальникам в 5 млн. грн на 1 рік?
Задача 22. [1, № 35] Підприємство має власний капітал 100 млн. грн. і бере в банку позику під 10% річних ще 50 млн. грн. Норма прибутку (рентабельність) складає 30%. Чому дорівнює дохід підприємця?
Задача 23. [1, № 37] Ви поклали 10 тис. грн. на строковий рахунок при строковій процентній ставці 10 % річних (з урахуванням виплати процентів на проценти). Скільки грошей ви отримаєте через 2 роки?
Задача 24. [1, № 119] Вам запропонували угоду: ви кладете гроші в банк, де вони кожного місяця подвоюються (на кінець першого місяця їх стає вдвічі більше, на кінець другого – в чотири рази і т.д.); за це ви сплачуєте банку щомісяця 2 400 грн., які банк вилучає з ваших грошей після кожного їх подвоєння. Чи вигідна для вас ця угода?

У розглянутих прикладах використовувалось поняття відсотка і послідовності, тому їх можна розглядати вже в 9 класі загальноосвітніх шкіл. Для розв'язування наступних задач учні повинні володіти вміннями і навичками розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння, мати поняття про границю функції. Тому їх доцільно розглядати вже в 10-11 класах.

У попередніх випадках передбачалось, що відсотки нараховуються щорічно. Однак вони можуть нараховуватись щоквартально, щомісячно тощо (особливо в умовах інфляції та гіперінфляції). Отже, що означає фраза "процентна ставка складає 12% річних щоквартально"? Це зовсім не значить, що до первісного вкладу кожного кварталу додається 12%. За загальноприйнятою термінологією це означає, що щоквартально нараховується лише четверта частина річної ставки 12%, тобто 12% / 4 = 3%, і передбачається при цьому, що відсоток складний. Виведемо формулу для такого типу нарахування відсотку.

Нехай відсотки нараховуються рівномірно m разів протягом року, кожний раз за нормою $\frac{r}{m}$ на новий залишок вкладу (сума вважається стабільною протягом усього розглядуваного періоду), тоді загальний член цієї послідовності буде мати вигляд

$$A_n = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

Якщо відсотки нараховуються неперервно, тобто $m \to \infty$, то отримаємо

$$\lim_{m\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} = Ae^{rn}.$$

Отже, $\boldsymbol{A_n = A\cdot e^{m}}$.

Цю формулу можна використати для будь-яких розрахунків, пов'язаних зі складними відсотками.

Задача 25. [27] 10 млн. грош.од. інвестовані на 2 роки за ставкою 120 % річних. Треба знайти нарощувану за цей час суму і її приріст при нарахуванні: а) щорічно; б) по півріччям; в) щокварталу; г) щомісяця.

Розв'язання. Скористаємось формулою для розрахунку суми грошових нагромаджень, якщо відсотки нараховуються рівномірно m разів протягом року, де $n = 2$, $A = 10$ млн. грош.од., $q = 120$ %, $r = \frac{q}{100} = \frac{120}{100} = 1.2$, $m = 1, 2, 4, 12$ відповідно для випадків а), б), в), г). позначимо $\Delta = A_2 - A$ – приріст суми. Результати зведемо до таблиці.

Випадок	m	$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m2}$	$A_2 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m2}$ млн грош.од	$\Delta = A_2 - A$ млн грош.од
а)	1	$\left(1+\frac{1.2}{1}\right)^{2}$	48.400	38.400
б)	2	$\left(1+\frac{1.2}{2}\right)^{4}$	65.536	55.536
в)	4	$\left(1+\frac{1.2}{4}\right)^{8}$	81.573	71.573
г)	12	$\left(1+\frac{1.2}{12}\right)^{24}$	98.497	88.497

Задача 26. [27] Сума 2000 грош.од. покладена в банк за схемою неперервного нарахування відсотків за ставкою 10 % за рік. Знайти нарощену наприкінці року суму A_n при $n = 1, 2, 3, 5$ і 10.

Розв'язання. Скористаємось формулою для визначення суми грошових нагромаджень, якщо відсотки нараховуються неперервно. Тоді $r=\frac{q}{100}=\frac{10}{100}=0.1$, $A_n = 2000 \cdot e^{0.1 \cdot n}$.

Результати зведемо до таблиці.

n, років	0	1	2	3	5	10
A_n, грош.од.	2000	2210,34	2442,81	2699,72	3297,44	5436,56

З наведених вище формул, які пов'язують чотири змінні величини: A, A_n, r, n, де $r=\frac{q}{100}$, q – процентна ставка, можна легко знайти невідому величину, знаючи три з них. Наприклад, з основної формули для нарахування складних відсотків $A_n = A\,(1+ r)^n$, після нескладних перетворень, отримаємо наступні формули:

$$n=\frac{\ln A_n - \ln A}{\ln\left(1+\frac{q}{100}\right)}\;; \qquad q=100\left[\left(\frac{A_n}{A}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]\;; \qquad A=A_n\left(1+\frac{q}{100}\right)^{-n}.$$

Відмітимо, що операція знаходження первісного вкладу A називається *дисконтуванням*. Значення A називають також *сучасним значенням* для A_n.

Задача 27. [27] Потрібно знайти сучасне значення боргу (первісний борг), повна сума якого через 3 роки складе 7 млн грош.од. Відсотки нараховуються за наступними ставками: а) 140 % наприкінці кожного року; б) 20 % наприкінці кожного кварталу; в) 120 % річних наприкінці кожного місяця.

Розв'язання. а) Знайдемо первісний борг за останньою формулою. Якщо A – первісний борг або первісне значення боргу; $n = 3$, $A_3 = 7\cdot 10^6$ грош.од., $r=\frac{q}{100}=\frac{140}{100}=1.4$, то

$$A=\frac{7\cdot 10^6}{(1+1.4)^3}=\frac{7\cdot 10^6}{13.824}=506366 \text{ (грош.од.)}$$

б) Використаємо формулу $A=\frac{A_n}{(1+r)^{mn}}$, де $n = 3$, $A_3 = 7\cdot 10^6$ грош. од., $m = 4$,

$$r=\frac{q}{100}=\frac{20}{100}=0.2\;; \qquad A=\frac{7\cdot 10^6}{(1+0.2)^{12}}=\frac{7\cdot 10^6}{8.916}=785105.$$

в) Скористаємось тією ж формулою, тільки при $m = 12$, $r=\frac{q}{100}=\frac{120}{100}=1.2$. Тоді

$$A=\frac{7\cdot 10^6}{\left(1+\frac{1.2}{12}\right)^{36}}=\frac{7\cdot 10^6}{30.913}=226442\,.$$

Задача 28. [27] При одній і тій же відсотковій ставці за схемою неперервного нарахування відсотків вкладник *C* через 2 роки одержує 1000 грош. од., вкладник *D* через 4 роки одержує 600 грош. од. Знайти відсоткову ставку *q*, якщо первісний вклад вкладника *C* вдвічі більше, ніж вкладника *D*.

Розв'язання. Скористаємось формулою для знаходження нагромаджень при неперервному нарахуванні відсотків для кожного з вкладників окремо. Маємо

$$A_2 = A^{(1)}\cdot e^{r\cdot 2}\,, \qquad A_4 = A^{(2)}\cdot e^{r\cdot 4}\,,$$

де – $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ – початкові вклади вкладників *C* та *D* відповідно. Тоді

$$A^{(1)} = A_2\cdot e^{-2\cdot r}\,, \qquad A^{(2)} = A_4\cdot e^{-4\cdot r}\,.$$

Враховуючи, що $A^{(1)}=2\,A^{(2)}$, маємо $1000\cdot e^{-2\cdot r} = 1200\cdot e^{-4\cdot r}$. Звідси

$e^{2r}=1.2$; $2\cdot r = \ln 1.2$; $r = 0.5\cdot\ln 1.2 = 0.09116$, $q = r\cdot 100\,\% \approx 9.1\,\%$.

Задача 29. [27] Знайти первісний борг позичальника кредитору, якщо позичальник повинен сплатити кредитору 1000 грош. од. через 2 роки, 2500 грош. од. через 3 роки, 3000 грош. од. через 3,5 роки. Відсоткова ставка 6 % річних, нарахування відсотків неперервне.

Розв'язання. Скористаємось тією ж формулою, що й у попередньому прикладі, звідки $A=A_n\cdot e^{-rn}$. За умовою $r = 0{,}06$. Тоді з урахуванням того, що борг повертається частинами, маємо

$$A=A_2\cdot e^{-0.12}+A_3\cdot e^{-0.18}+A_{3,5}\cdot e^{-0.21}\,;$$

$$A=1000\cdot e^{-0.12}+2500\cdot e^{-0.18}+3000\cdot e^{-0.21}=5406.85 \text{ грош. од.}$$

Задача 30. [27] Знайти, яка сума повинна бути інвестована сьогодні для накопичення 500 тис. грош. од. до кінця року при нарахуванні відсотків за ставкою 160 % річних наприкінці кожного кварталу.

Розв'язання. З формули для знаходження первісного вкладу маємо

$A=\dfrac{A_n}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}$, де $A_n = 500$, $m = 4$, $n = 1$, $r = q/100 = 160/100 = 1.6$.

Отже, $A=\dfrac{500}{\left(1+\frac{1.6}{4}\right)^{4}}=130.154$ (тис. грош. од.)

Задача 31. [27] Щорічний приріст деревини в сосновому лісі складає 4 %, промисловість використовує 5,5 % наявних насаджень. Через скільки років залишиться 1 % наявної деревини?

Розв'язання. Позначимо початкову кількість деревини через *A* (або одиницю), щорічний приріст $\Delta q = q_2 - q_1$, де q_1 – щорічний приріст деревини,

q_2 – щорічне використання. Тоді A_n дорівнюватиме 0.01, тобто 1 % від початкового обсягу A. Для визначення часу n скористаємось відомою формулою:

$$n = \frac{\ln A_n - \ln A}{\ln\left(1 + \frac{q}{100}\right)} = \frac{\ln 1 - \ln 0.01}{\ln\left(1 + \frac{5.5 - 4}{100}\right)} = \frac{\ln 100}{\ln 1.015} \approx \frac{4.6052}{0.0148} \approx 309 \text{ (років).}$$

Отже, через 309 років залишиться лише 1 % від початкового обсягу деревини в сосновому лісі.

Задача 32. [1, Приклад 2.10.] При продажу приміщення під офіс фірми продавець запропонував підприємцю два варіанти виплат:

10 млн. грн. відразу і по 2 млн. грн. протягом 5 років, або

15 млн. грн. відразу і по 1 млн. грн. протягом 6 років.

Процентна ставка (коефіцієнт дисконтування) дорівнює 10 % річних.

Який варіант найбільш вигідний?

розв'язання:

При першому варіанті сумарна виплата дорівнює:

$$10 + 2\frac{1 - \frac{1}{(1+0,1)^5}}{0,1} = 10 + 2\frac{1 - \frac{1}{1,6105}}{0,1} = 17,582 \text{ млн.. грн.}$$

При другому варіанті:

$$15 + 1\frac{1 - \frac{1}{(1+0,1)^6}}{0,1} = 15 + 1\frac{1 - \frac{1}{1,7716}}{0,1} = 14,356 \text{ млн. грн.}$$

Отже, другий варіант значно вигідніший.

Задача 33. [1, Приклад 2.11.] Орендодавець запропонував орендареві два варіанти виплати за оренду майна строком на 6 років:

- заплатити відразу 10 млн. грн. і по 1 млн. грн. щорічно протягом строку оренди, або
- заплатити відразу 3 млн. грн. і по 2 млн. грн. щорічно протягом строку оренди.

Процентна ставка (коефіцієнт дисконтування) дорівнює 10 % річних.

В якому випадку орендодавець отримає більший сумарний дохід?

розв'язання:

- при першому варіанті сумарний дохід дорівнює:

$$10 + 1\frac{(1 + 0,1)^6 - 1}{0,1} = 10 + 1\frac{1,7716 - 1}{0,1} = 17,716 \text{ млн. грн.;}$$

- при другому варіанті:

$$3 + 2\frac{(1 + 0,1)^6 - 1}{0,1} = 3 + 2\frac{1,7716 - 1}{0,1} = 18,432 \text{ млн. грн.}$$

Отже, для орендодавця більш вигідним є другий варіант.

Задача 34. [1, № 52] Підприємець користувався банківським кредитом, виходячи з 50 % річних. Величина позичкового процента при цьому складала 10 % річних. При якому очікуваному рівні інфляції в наступному році цей процент за кредит збережеться?

Задача 35. [1, № 53] Банк пропонує за 50 млн. у.о. ощадний сертифікат номіналом 100 млн. у.о. на строк 6 місяців. По закінченню цього строку банк виплачує вартість сертифіката по номіналу. Який процент річного доходу дає сертифікат? (Перевірте спочатку свою інтуїцію)

Задача 36. [1, № 54] В умовах попередньої задачі через 4 місяці після придбання у банка ощадного сертифікату підприємство вирішило його продати. Якою повинна бути продажна ціна сертифіката, якщо на момент його продажу процентна ставка складала 150% річних?

Задача 37. [1, № 55] Акціонерне товариство виплачує по акціях дивіденд, рівний 30 % річних. Позичковий процент складає 10 % річних. Який курс акцій?

Задача 38. [1, № 58] Що вигідніше: заплатити за навчання у ВНЗ на початку навчання 10 тис. у.о. або по закінченню (через 5 років) 15 тис. у.о.? Процентна ставка (коефіцієнт дисконтування) дорівнює 10% річних.

Задача 39. [1, № 59] Підприємець вирішив інвестувати в деякий проект 10 млн. у.о. з таким розрахунком, щоб через 5 років отримати 15 млн. у.о. Якою при цьому повинна бути процентна ставка (коефіцієнт дисконтування)?

Задача 40. [1, № 62] Підприємець планує щорічно збільшувати випуск продукції на 5%. Чому буде дорівнювати випуск продукції через 4 роки, якщо зараз він складає 30 тис.од.?

Для закріплення доцільно розглянути задачу, яка допоможе при вирішенні проблеми: куди краще вкласти гроші.

Різноманітність форм кредитування та інвестування зумовлює необхідність знаходження критерію найбільш вигідного розміщення капіталу. Наприклад, ви стоїте перед вибором: в якому банку краще розмістити свій капітал, якщо перший пропонує вам 12,5% річних щоквартально, а другий – 12,3% річних щомісячно. Для того, щоб відповісти на це запитання, вводиться допоміжне поняття – *ефективна процентна ставка*.

Якщо на основний вклад A протягом року m разів нараховуються складні відсотки, то при річній процентній ставці q (або r, де $r = \frac{q}{100}$) очікуваний вклад A_n через рік становитиме: $A_n = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$.

Ефективна процентна ставка q_e (або r_e, де $r_e = \frac{q_e}{100}$), визначається з умови

$$A_n = A\left(1+\frac{q_e}{m}\right) = A(1+r_e)^n,$$

тобто це процент, який нараховується лише один раз на рік і дає той же результат, що й складні проценти з нарахуванням m разів протягом року. Прирівнюючи обидві частини рівнянь $A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} = A(1+r_e)^n$,

знаходимо $r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1$.

На відміну від ефективної ставки q_e початкова ставка q з m-кратним нарахуванням називається *номінальною*.

Отже, для вирішення поставленої проблеми (*в який банк краще вкласти гроші?*) потрібно, розрахувати ефективні ставки для кожного з банків і прирівняти їх. Очевидно, що банк, ефективна ставка якого вища, має вигіднішу пропозицію.

Задача 41. [15] Один банк пропонує своїм вкладникам 15.5% річних щоквартально, а інший – 15.2% річних щомісячно. В який банк вигідніше вкласти гроші?

Розв'язання. Розрахуємо ефективні ставки для кожного з банків за 1 рік (n = 1).

Для першого банку r_1 =0.155, m_1 = 4 і $r_{e1} = \left(1+\frac{0.155}{4}\right)^4 - 1 \approx 0.1642$, тобто q_{e1}=16.42%.

Для другого банку r_2 = 0.152, m_2 = 12 і $r_{e2} = \left(1+\frac{0.152}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0.1630$, тобто q_{e2}=16.30%.

Таким чином $q_{e1} > q_{e2}$, а це означає, що 15.5% щоквартально дає більший річний доход, ніж 15.2% щомісячно, тобто в перший банк вигідніше вкладати гроші.

Наступні задачі пропонуємо виключно для класів (шкіл, ліцеїв) економічного профілю або для розгляду на факультативних заняттях з математики та економіки.

(високий рівень)

Задача 42. [1, № 63] Підприємець вирішив побудувати цех. Вартість будівництва – 300 млн у.о., тривалість будівництва – 3 роки, вартість кредиту – 10 % на рік. Банк пропонує два варіанти фінансування: 1) рівномірно – по 100 млн у.о. на рік; 2) понарастаючій – в перший рік 60, в другий 100 і в третій 140 млн у.о. Який варіант фінансування для підприємця є найбільш вигідним?

Задача 43. [1, № 65] Підприємство отримало в цьому році 150 млн у.о., а в минулому 50 млн у.о. При цьому приріст цін склав 50% (індекс цін дорівнює 1,5). Необхідно розрахувати:

1) Ріст виручки за рік без врахування зміни цін (індекс вартості).
2) Ріст фізичного обсягу реалізованої продукції.
3) Ріст виручки підприємства в порівняння з минулим роком у співставних цінах.

Задача 44. [1, № 67] Для розширення виробництва підприємство потребує кредит в розмірі 200 млн грн. на 1 рік. Банк дає кредит під 60% річних. Необхідно також врахувати, що банк вимагає забезпечення кредиту майном підприємства, вартість якого 300 млн. грн. Ця вартість повинна бути документально підтверджена. Таким підтвердженням може бути страховий поліс страхування підприємства від непогашення кредиту, який потребує страхового внеску в розмірі 12% річних. У скільки грн. обійдеться кредит підприємству?

Задача 45. [1, № 68] Страхова компанія страхує угоду купівлі-продажу товару вартістю 200 млн. грн. При цьому продавець і покупець страхуються на 50 млн. грн. кожний. Страховий тариф складає 5% від суми страховки на кожного учасника. Який страховий внесок отримає страхова компанія?

Задача 46. [1, № 73] Попит на товар складає декілька тисяч штук за місяць і щомісячно зростає на 6 %. Скільки потрібно часу, щоб попит збільшився приблизно вдвічі. Вважаючи що існуюча тенденція буде продовжуватись?

Задача 47. [1, № 74] Акціонерне товариство вирішило виділити для виплати дивідендів по акціях долю чистого прибутку, рівну 10% загальної вартості акціонерного капіталу, що дорівнює сумарній вартості звичайних та привілейованих акцій. При цьому по звичайних акціях вирішили виплатити 5 % від акціонерного капіталу, а по привілейованим – 13 %. Загальна вартість привілейованих акцій дорівнює 2500 тис. у.о., а їх кількість дорівнює 250 і складає чверть від усіх акцій. Який дивіденд передбачається виплатити на кожну звичайну і кожну привілейовану акцію?

Задача 48. [1, № 75] Попит на товар становить декілька тисяч штук на місяць і неперервно зростає. Яким має бути це зростання (у відсотках), щоб попит на товар збільшився за квартал (3 місяці) приблизно втричі?

Задача 49. [1, № 77] Оптова база придбала у виробничого підприємства партію товару по собівартості й продала його магазину роздрібної торгівлі по оптовим цінам на 20% вище ціни собівартості. В свою чергу магазин встановив роздрібну ціну товару на 30% вище оптової. У кінці сезону роздрібна ціна була знижена на 10% і становила 100 грн. за одиницю товару. Якою є собівартість товару?

Задача 50. [1, №78] Роздрібний торговець продав партію товарів у 50 одиниць, заробивши при цьому 40% в порівнянні з вартістю покупки цього товару. Якби товар обійшовся йому при покупці на 30% дешевше, а при продажу вдалось заробити 60%, то можна було б знизити ціну одиниці товару на 800 у.о.

1) За скільки у.о. було продано партію товару і скільки коштує одиниця товару?
2) Чому дорівнює ціна покупки товару?

2.2. Задачі економічного змісту при вивченні функцій

Поняття функції є центральним для всієї математики. Учні ознайомлюються з поняттям, способами задання, областю визначення та значень функцій вже в 8 класі. В класах (школах) економічного профілю та в загальноосвітніх навчальних закладах (школах) доцільно роз’язувати задачі економічного змісту. Зокрема, варто розглядати приклади економічного характеру, що розв’язуються за допомгою функцій.

Припустимо, що деяка фірма випускає продукцію, яку продає за ціною 100 грош.од. за одну штуку. Далі припустимо, що маємо таблицю, в яку занесено дані щоденних продаж і доходів:

Об’єм продаж (штук за 1день)	30	40	28	14	36
Дохід (грош.од. за 1 день)	3 000	4 000	2 800	1 400	3 600

Якщо, наприклад, за 1 день продано 30 од. продукції, то доход за цей день дорівнює 3000 гр.од., якщо 40 – 4000 і т.д. Позначивши денний обсяг продажу через x, а відповідний доход через y, можна виразити зв’язок між ними простою формулою *y* = 100 *x*, яка відображає функціональну залежність змінної *y* від *x*.

При цьому величина *x* називається *незалежною змінною*. Величина *y* визначається вибором величини *x* і називається *залежною змінною*.

При вивченні лінійної функції на етапі первинного застосування цікавими будуть наступні задачі:

Задача 1. [20, № 7 Подайте у вигляді функції ріст врожайності *y* деякої культури через *x* років, якщо її початкова врожайність складає 16 ц і щорічно буде збільшуватись на 1,5 ц.

Відповідь: $y = 16 + 1{,}5x$.

Задача 2. [20, №9] При подорожі на таксі ми сплачуємо 40 коп. при увімкненні лічильника і 35 коп. за кожний кілометр шляху. Запишіть формулу залежності *y* від *x*, якщо *y* – плата за таксі в гривнях; *x* – відстань у кілометрах. Чи є функція, задана цією формулою, лінійною? Вкажіть область визначення цієї функції.

Відповідь: $y = 0{,}4 + 0{,}35x$, $D(f) = [0;+\infty)$.

Задача 3. [20, № 10] Відправляючи телеграму ми сплачуємо 1 гривню за поштові послуги і 25 коп. за кожне слово тексту. Записати формулу залежності *y* від *x*, якщо *y* – плата за телеграму в гривнях, *x* – кількість слів. Вкажіть область визначення цієї функції.

Відповідь: $y = 1 + 0{,}25x$, $D(f) = [0;+\infty)$.

Економічні процеси можна ілюструвати за допомогою деяких найбільш відомих функцій. Зокрема, у класах економічного профілю учителю необхідно звернути увагу учнів на основні поняття економічної теорії з математичної точки зору (попит, пропозиція, рівноважна ціна, еластичність, дохід, прибуток тощо). У загальноосвітніх навчальних закладах цей же навчальний матеріал можна розглянути на позакласних заняттях з метою здійснення між предметних зв’язків.

Наведемо приклади застосування математики в економіці.

Відомо, що мікроекономіка є однією із складових сучасної фундаментальної науки про господарство. Тобто вона займається аналізом діяльності окремих ланок господарчої системи. А саме, фірм, підприємств, ринків конкретних видів товарів та послуг тощо.

Найважливіше питання мікроекономіки полягає у вивченні взаємозв’язку попиту і пропозиції [15].

У підручнику з основ економіки [14] наводиться таке означення попиту.

Попит (D) – це зумовлене платоспроможністю бажання покупців придбати товари (послуги) за даних умов. Попит показує залежність між кількістю товару, що покупається протягом певного проміжку часу, і ціною даного товару. При умові, що всі фактори зафіксовані, крім ціни нашого товару, то матимемо залежність, що називається *функцією попиту від ціни:*

$Q_d = f(P)$, де Q_d - обсяг попиту на даний товар, Р – ціна даного товару.

Графічним зображенням функції попиту є крива попиту. Ця крива є спадною функцією (рис. 2.2). Тобто, якщо ціна на якийсь товар підвищується, то кількість проданого товару буде зменшуватись. А тому, ми можемо сформулювати закон попиту: зі зростанням ціни обсяг попиту скорочується і навпаки.

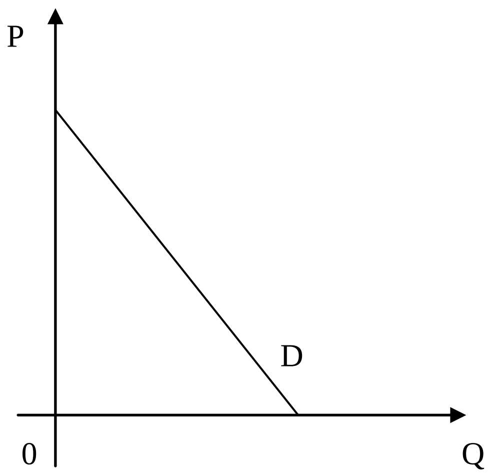

Рис.2.1.

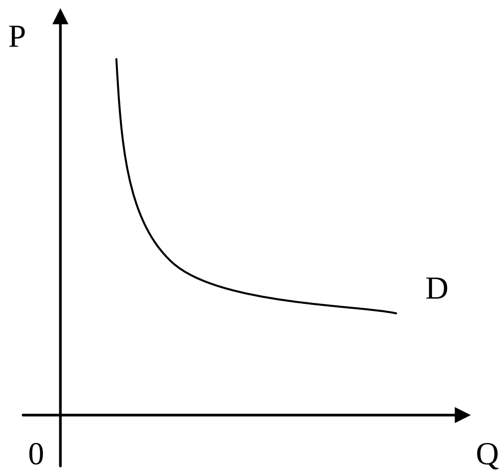

Рис.2.2.

В економічній теорії прийнято відкладати ціну (Р – незалежна змінна) по вертикальній осі координат, а обсяг попиту або інші параметри (що залежні від ціни) – по горизонтальній осі. З точки зору математики це необхідно було б зробити навпаки: незалежну змінну відкласти по горизонталі, а залежну – по вертикалі.

Як правило, використовують лінійну функцію попиту (рис.2.1), яка описується рівнянням:

$Q_d = a - bP$, де a і b постійні величини.

Слід також розрізняти попит та обсяг попиту. Обсяг попиту є складовою частиною попиту, його основною характеристикою.

Пропозиція [14] – це маса товарів, яку виробник (продавець) готовий продати за певною ціною у визначений проміжок часу. При умові, що всі чинники зафіксовані, крім ціни даного товару, то матимемо функцію пропозиції від ціни:

$Q_S = f(p)$, де Q_S – обсяг пропозиції даного товару, Р – ціна товару.

Графічним зображенням функції пропозиції є крива пропозиції (рис.2.4).

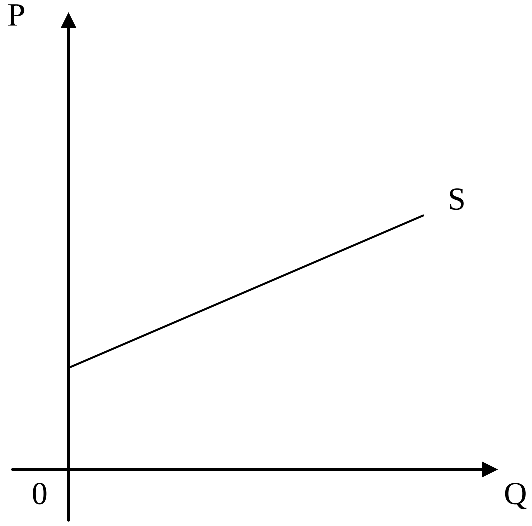

Рис.2.3.

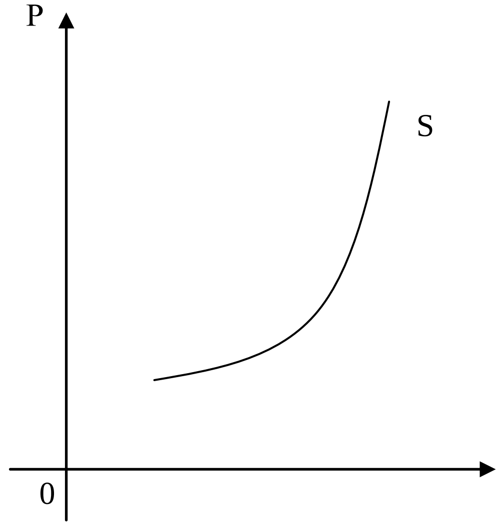

Рис.2.4.

Крива пропозиції у більшості випадків є зростаючою. Звідси випливає закон пропозиції: із підвищенням ціни обсяг пропозиції зростає і навпаки.

Як правило, використовують лінійну функцію пропозиції (рис.2.3), яка описується рівнянням:

$Q_S = -c + dP$, де c і d сталі величини.

Слід розрізняти пропозицію та обсяг пропозиції. Обсяг пропозиції – це конкретна кількість товару, яку продавці бажають та можуть продати на ринку за деякий період часу за певного значення ціни. Пропозиція – це множина співвідношень цін і відповідних кількостей товару.

Зрозуміло, що припущення про лінійну залежність ціни від пропозиції є сильним спрощенням дійсності. Однак, по-перше, лінійна функція є найпростішою, тому аналізувати її простіше; по-друге, це дає можливість наблизитись до розв’язання задачі. Такий прийом, при якому з реальної задачі виділяються деякі суттєві риси, а потім робиться спрощене припущення, отримав назву “моделювання”. При цьому реальність “замінюється” якоюсь моделлю, досліджуючи яку можна зробити певні передбачення. Чим ближче модель до дійсності, тим вона складніша і тим точніші передбачення, які можна за допомогою неї зробити. Економічна теорія і здоровий глузд підказує, що пропозиція товару зростає із підвищенням ціни. Дійсно, чим вища ціна на товар, тим більша кількість виробників намагається запропонувати цей товар на ринку [15].

У мікроекономіці інтерес становить точка перетину кривих попиту і пропозиції. Ця точка називається точкою рівноваги, а відповідна їй ціна –

рівноважною ціною. Рівновага на ринку встановлюється, коли збігаються обсяг попиту та обсяг пропозиції.

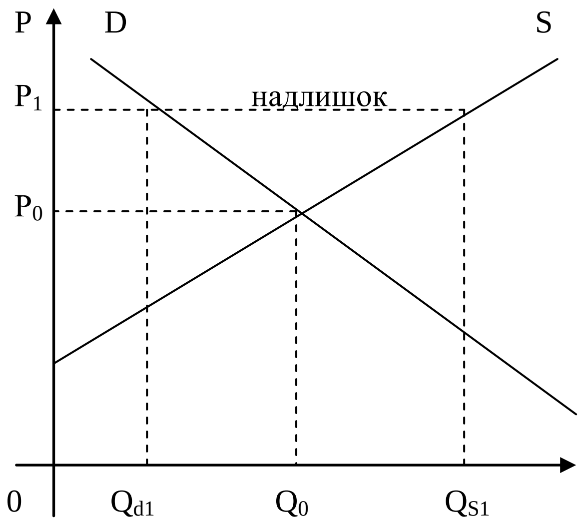

Рис.2.5.

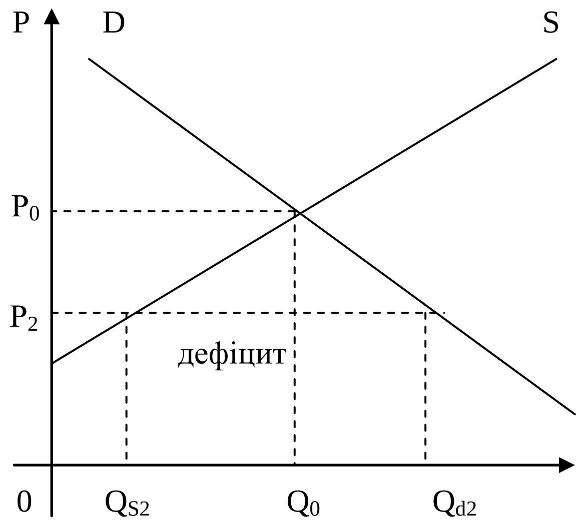

Рис.2.6.

Якщо $P_1>P_0$, то кількість товару Q_{S1}, яка відповідає пропозиції, більша за кількість товару Q_{d1}, яка відповідає попиту, тобто обсяг пропозиції перевищує обсяг попиту. Наслідком цього буде утворення на ринку надлишку товару (рис.2.5).

Якщо $P_1<P_0$, то кількість товару Q_{S2} менша за кількість товару Q_{d2}. Тобто обсяг попиту перевищує обсяг пропозиції. Наслідком цього є утворення на ринку дефіциту (рис.2.6).

Іншим прикладом тісного зв’язку функцій у математиці і економіці є *крива виробничих можливостей*. В умовах обмеженості ресурсів перед суспільством і окремими виробниками постає проблема вибору, пошуку альтернативних варіантів використання ресурсів. Вибір альтернативних варіантів полягає у пошуках найефективнішої комбінації ресурсів, а отже і найраціональнішого їх використання. Крива виробничих можливостей є логічним продовженням аналізу альтернативних варіантів використання ресурсів. Зміщення кривої вліво свідчить, що ресурси використовуються неповно, а тому є неповним і обсяг виробництва. Це відбувається в період економічних криз, спадів виробництва, стихійних лих тощо. Правобічне зміщення кривої свідчить про піднесення економіки, що досягається на основі збільшення кількості та якості ресурсів.

Задача 4. [1, № 125] Мале підприємство здатне виробити та реалізувати за 1 день:

або 70 кг вареної і 20 копченої ковбаси;

або 60 кг вареної і 45 копченої ковбаси;
або 50 кг вареної і 65 копченої ковбаси;
або 30 кг вареної і 85 копченої ковбаси;
або 10 кг вареної і 92 копченої ковбаси.

1) Побудувати графік виробничих можливостей.

Позначимо через *x* – можливості вироблення вареної ковбаси (кг), а через *y* – копченої ковбаси. Отримаємо функцію виробничих можливостей, задану табличним способом:

Варена ковбаса (*x*)	70	60	50	30	10
Копчена ковбаса (*y*)	20	45	65	85	92

Легко побудувати графік функції, заданої табличним способом (рис.*2.6*).

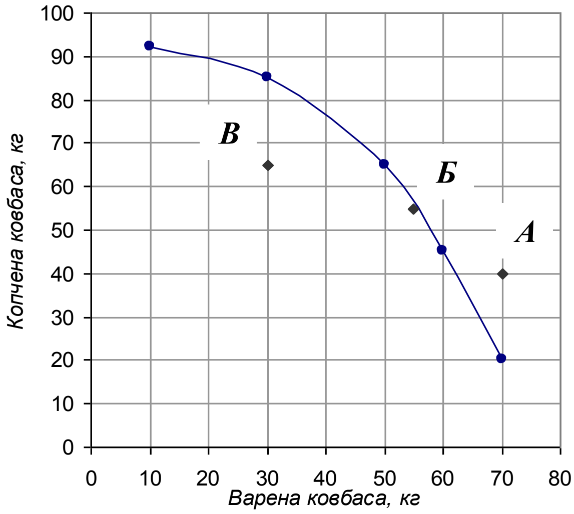

Рис 2.6.

2) За допомогою графіка визначити ступінь ефективності ведення бізнесу для наступних замовлень на продукцію підприємства:
а) 70 кг вареної та 40 кг копченої ковбаси;
б) 55 кг вареної та 55 кг копченої ковбаси;
в) 30 кг вареної та 65 кг копченої ковбаси.

Спочатку нанесемо точки, які відповідають вказаним значенням на графік (рис. *2.6*). Крива виробничих можливостей визначає певну межу виробництва при наявних ресурсах. Рухаючись по кривій можна спостерігати різні варіанти в комбінації ресурсів. Проаналізуємо кожну точку Точка *А* знаходиться за межами фігури, обмеженої кривою виробничих можливостей – це означає, що наявних виробничих ресурсів за даною технологією їх використання недостатньо для забезпечення цього рівня виробництва. Точка В лежить всередині – маємо неповне використання ресурсів, що є небажаним для суспільства. Точка Б лежить на кривій виробничих можливостей, тобто маємо повне використання ресурсів, а значить у цьому випадку буде найбільш ефективне ведення бізнесу.

Наступна задача вимагає вже більш глибоких знань з основ економічної теорії, тому її можна запропонувати лише для учнів класів (шкіл, ліцеїв) економічного профілю.

Задача 5. [1, № 126] В умовах попередньої задачі в ситуації ефективного бізнесу (40 кг вареної та 75 кг копченої ковбаси) попит на варену ковбасу падає на 10 кг (до 30 кг). На скільки кілограмів потрібно збільшити виробництво копченої ковбаси (попит на неї не обмежений), щоб зберегти ефективний бізнес?

Функції попиту і пропозиції можуть бути досить складними функціями, тому часто лінійного наближення недостатньо. Іноді кращим наближенням є квадратичне, тобто представлення функцій попиту і пропозиції за допомогою квадратичних функцій. Припустимо, що крива пропозиції має вигляд:

$$P = a_S Q^2 + b_S Q + c_S ,$$

де P – ціна; Q – кількість запропонованого на ринку товару; a_S , b_S , c_S – параметри квадратичної функції, які зазвичай знаходяться емпірично [15].

Реальний економічний зміст крива пропозиції має лише для значень $P>0$, $Q>0$ *(позитивні значення ціни та обсягу товару),* хоча квадратична функція визначена на всій числовій осі. Як зазначалось раніше, крива пропозиції є зростаючою функцією. Звідси випливає, що параметр $a_S > 0$ і вітки параболи направлені вгору. Схематично крива пропозиції зображена на рисунку 2.7, причому суцільною лінією зображена та частина графіку, яка має економічний зміст.

Аналогічно припустимо, що крива попиту також може бути представлена квадратичною функцією $P = a_D Q^2 + b_D Q + c_D$,
де P – ціна; Q – кількість товару; a_D , b_D , c_D – параметри. Аналогічно до попереднього графіка, суцільною лінією позначено ту частину графіка квадратичної функції, яка відповідає додатнім значенням ціни P і кількості товару Q. Крива попиту є спадною функцією (чим вище ціна, тим менше товару можна продати за цією ціною). З цього випливає, що вітки параболи направлені вниз, тобто параметр $a_D < 0$. (рис.*2.8*)

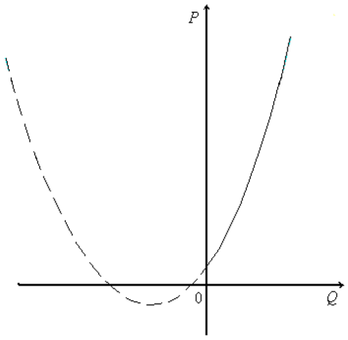

Рис. 2.7

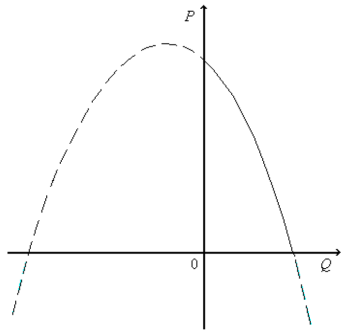

Рис. 2.8.

Знайдемо точку рівноваги графічно та аналітично.

Для того, щоб знайти точку рівноваги графічно достатньо криві попиту та пропозиції побудувати в одній системі координат (рис. *2.9*). Точка перетину двох кривих, нанесених на графіку суцільною лінією і є точкою рівноваги. Отже, рівновага на ринку встановлюється тоді, коли обсяг пропозиції співпадає з обсягом попиту. Точка перетину двох кривих, нанесених штриховими лініями реального економічного змісту не має, оскільки знаходиться в області від'ємних значень обсягу товару .

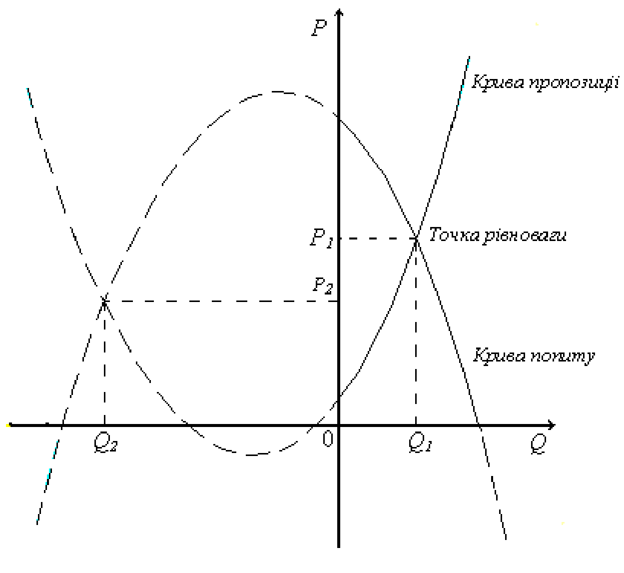

Рис. 2.9.

Розглянемо тепер алгебраїчний метод розв'язування поставленої задачі. Складемо систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} P = a_S Q^2 + b_S Q + c_S, \\ P = a_D Q^2 + b_D Q + c_D. \end{cases}$$

Прирівняємо праві частини рівнянь. Згрупуємо члени рівняння:

$$(a_S - a_D)Q^2 + (b_S - b_D)Q + c_S - c_D = 0\,.$$

Введемо позначення: $a = a_S - a_D$, $b = b_S - b_D$, $c = c_S - c_D$.
Одержимо рівняння: $a\,Q^2 + b\,Q + c = 0$.
Отримали квадратне рівняння, яке може мати два розв'язки (корені):

$$Q_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,;\quad Q_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Другий розв'язок відкидається, оскільки він від'ємний (див *рис. 2.9*).

Для того, щоб знайти рівноважну ціну необхідно підставити обсяг товару Q_2 у функцію попиту або пропозиції. Одержимо рівноважну ціну P_0.

Графічний та алгебраїчний методи повинні дати однаковий результат.

Для закріплення матеріалу пропонується розв'язати наступну задачу.

Задача 6. [27] Дослідним шляхом встановлено функції попиту $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $S = p + 0.5$, де q, S – кількість товару, що купується і пропонується на продаж відповідно, в одиницю часу; p – ціна товару. Знайти ціну рівноваги, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;

Розв'язання.

Ціна рівноваги визначається з умови рівності попиту і пропозиції $q = S$:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0.5\,,$$

звідки $p = 2$, тобто ціна рівноваги дорівнює 2 грош.од.

Метою наступної задачі є **знаходження максимального прибутку.**

Прибуток – плата за функції, що їх виконує підприємець, коли організовує виробництво, управляє ним, здійснює інновації та ризикує . Види підприємницької діяльності: виробнича, посередницька (комерційне, фінансове, страхове тощо) [14].

Прибуток будь-якого підприємства можна визначити як різницю між виручкою від реалізації (TR) та витратами (TC):

$$П = TR - TC$$

Задача знаходження максимального прибутку може бути розв'язана аналітично та графічно.

Розглянемо графічний спосіб розв'язання. Нехай дано криві TR та TC (рис. 2.10, верхня частина).

Прибуток для будь-якого значення Q (горизонтальні координати) графічно визначається як різниця

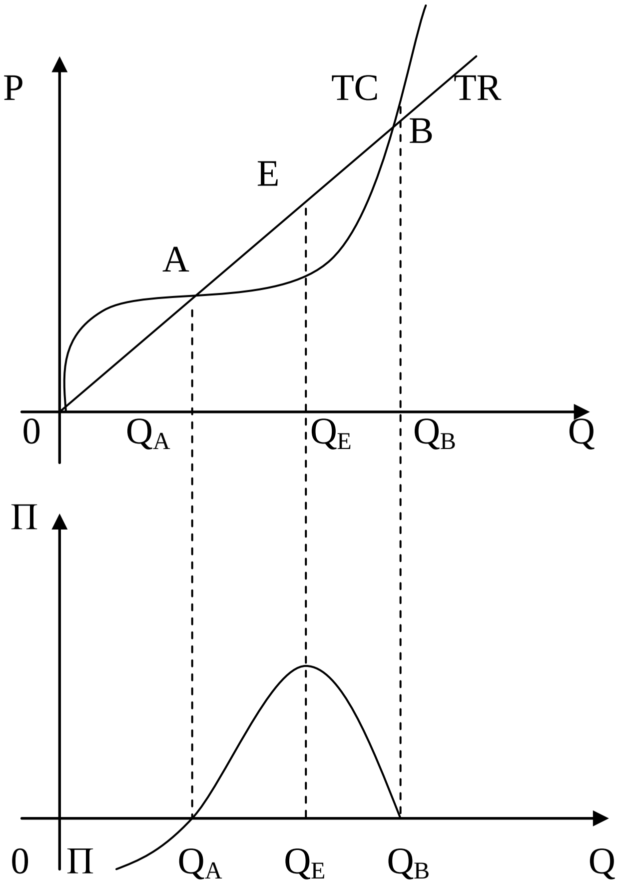

Рис.2.10.

вертикальних координат заданих кривих. (рис.2.10, нижня частина).

Якщо $Q_A<Q<Q_B$, то підприємство буде мати прибуток.

Якщо $Q>Q_B$ та $Q<Q_A$, то підприємство буде мати збитки.

Якщо $Q=Q_E$, то підприємство буде мати максимальний прибуток.

Точки А і В є точками беззбитковості. Тобто підприємство одержує нульовий прибуток (виручка від реалізації дорівнює сумарним витратам).

Іншій варіант знаходження максимального прибутку наведено у посібнику [15].

Якщо позначити прибуток через π (*profit*), загальний доход – *TR* (*revenue*), а загальні витрати – *TC* (*cost*), то можна записати:

$$\pi = TR - TC\ .$$

Загальний доход, який фірма отримує від продажу кількості товару *Q* за ціною *P* за одиницю товару, задається формулою:

$$TR = P \cdot Q.$$

Ціна визначається не тим, скільки хоче отримати виробник, а тим, скільки готовий заплатити покупець. Нехай крива попиту лінійна. Тоді,

$$P = a\,Q + b\,,$$

де $a < 0,\ b > 0$, так як крива попиту – спадна функція. Підставимо останній вираз у формулу для загального доходу, отримаємо

$$TR = (aQ + b)\,Q = aQ^2 + bQ\ .$$

Маємо квадратичну функцію, де параметр c=0, $a < 0, b > 0.$

Побудуємо графік, використовуючи властивості квадратичної функції (рис. 2.11). Необхідно побудувати лише ту частину графіку, яка має економічний зміст ($Q > 0$, $TR > 0$).

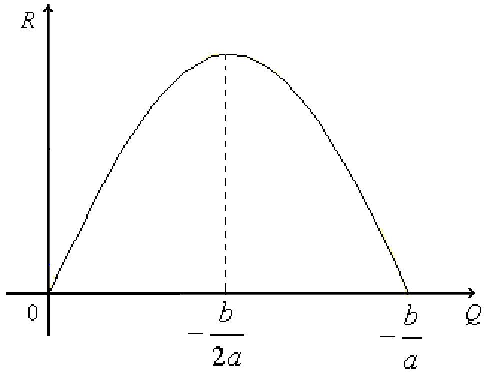

Рис. 2.11.

З рис.*2.11 випливає*, що загальний доход рівний нулю в початку координат. Тому, що якщо немає об’єму продаж, то немає і доходу. Загальний доход зростає із зростанням об’єму продаж і досягає максимуму при

$$Q = -\frac{b}{2a}\ .$$

Праворуч від цієї точки функція стає спадною, тобто величина доходу спадає із зростанням об’єму продаж. Цей факт пояснюється за допомогою такого економічного поняття як еластичністю попиту за ціною.

Загальний дохід дорівнює нулю в точці $Q = -\frac{b}{a}$. Дійсно, якщо $Q = -\frac{b}{a}$, то

$$P = aQ + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0\,.$$

Обертання загального доходу і ціни в нуль – результат екстраполяції нашої простої моделі, і в реальності таке не зустрічається. Це є окремим прикладом загального правила: будь-яка модель має межі використання, порушення яких призводить до невірних результатів.

Розглянемо тепер витрати.

Витрати – виражені в грошових одиницях поточні витрати на виробництво продукції та на її просування. Останнє включає, наприклад, торгові витрати, витрати транспортування тощо.

Крім того, розглядають витрати на одиницю продукції.

Витрати, які не залежать від обсягів виробництва називають *постійними* (орендні платежі, утримання приміщень та обладнання тощо).

Змінні витрати пропорційні випуску продукції і включають вартість матеріалів, електроенергії, зарплату підрядчиків та ін.

Тоді загальні витрати можна представити як суму постійних та змінних витрат:

$$TC = TF + TV\,,$$

де TF – постійні витрати; TV –одиничні змінні витрати; Q – обсяг виробництва. Якщо розглядати TF і TV як постійні параметри, то отримаємо лінійну функцію, графік якої приведено на рис.*2.12*.

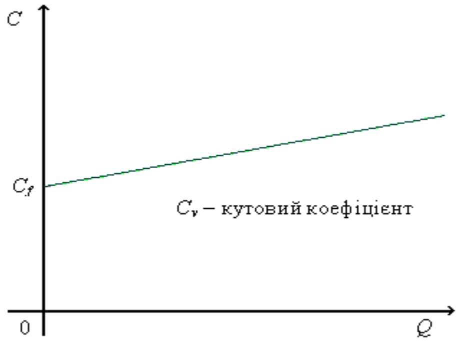

Рис. 2.12.

Для того, щоб визначити максимальний прибуток графічним способом необхідно графіки, зображені на рис. *2.11* та *2.12* помістити в одній системі координат (рис.*2.13*).

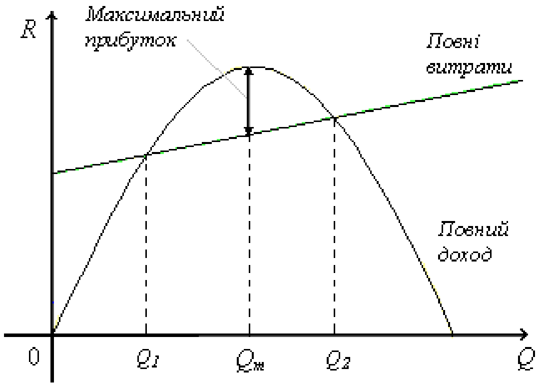

Рис. 2.13.

Зазначу, що на рис. *2.11* Q – кількість проданого товару, а на рис. *2.12* Q – кількість виробленого товару. Тому при перенесенні їх на рис.*2.13* ми припускаємо, що продано весь вироблений товар.

Отже, з рисунка 2.13 випливає, що виробництво є прибутковим, коли кількість виробленого товару задовольняє умові $Q_1 < Q < Q_2$.

Розглянемо алгебраїчний спосіб знаходження максимального прибутку. Для цього виразимо загальний дохід R і загальні витрати C через кількість товару Q з формули прибутку: $\pi = TR - TC$.

Одержимо,

$$\pi = aQ^2 + bQ - TV\,Q - TF = aQ^2 + (b - TV)Q - TF,$$

Отримали квадратичну функцію. Прирівняємо її до нуля та знайдемо розв'язки квадратного рівняння (Q_1 і Q_2). Це точки, між якими виробництво є прибутковим.

Оскільки параметр квадратичної функції $a < 0$, то гілки параболи направлені вниз, як це показано на рис.*2.14*, і функція має максимум, який досягається в точці $Q_{MAX} = -\frac{b - TV}{2a} = \frac{TV - b}{2a}$.

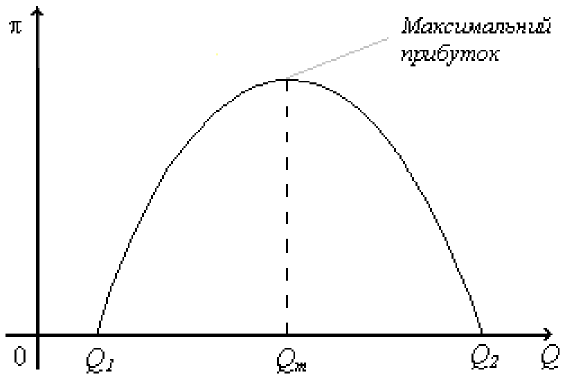

Рис. 2.14.

2.3. Задачі економічного змісту при вивченні похідної

З історії розвитку математичного аналізу відомо, що до відкриття похідної прийшли незалежно І.Ньютон і Г.Лейбніц, перший – розв'язуючи механічну задачу про миттєву швидкість, а другий – розв'язуючи задачу про знаходження дотичної до кривої у певній точці. Традиційно склалося, що саме ці дві задачі розглядаються в шкільному курсі математики як задачі, що приводять до поняття похідної. Тобто за програмою при вивченні похідної учнів загальноосвітніх шкіл знайомлять лише з механічною та геометричною інтерпретацією цього поняття. Оскільки останнім часом багато уваги приділяється економічній освіті учнів, варто в класах (школах) економічного профілю знайомити їх і з економічною інтерпретацією похідної. Економічний зміст похідної можна узагальнити за допомогою наступних прикладів.

<u>Приклад 1</u>. Нехай продуктивність праці y є функцією від часу t : $y = f(t)$. Якщо змінна t отримає приріст Δt , то зміна продуктивності праці за певний проміжок часу складе $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$. Середня зміна продуктивності праці за одиницю часу визначається відношенням $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$. Границя цього

відношення $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$, якщо вона існує, характеризує *ріст продуктивності праці*:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t).$$

<u>Приклад 2</u>. Ріст кількості населення *N* протягом певного періоду *t* є функція $N = f(t)$. Границя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t}$, якщо вона існує, визначає *швидкість росту населення*: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = N'(t)$.

<u>Приклад 3</u>. Витрати природних ресурсів *Q* протягом часу *t* є функція $Q = f(t)$. Границя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, якщо вона існує, визначає *швидкість витрат ресурсів*: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t)$.

<u>Приклад 4</u>. Виручка *u* від продажу товару залежить від його кількості *x*: $u = u(x)$. Границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, якщо вона існує, називається *граничною виручкою*: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$.

<u>Приклад 5</u>. Витрати виробництва *K* залежать від кількості продукції, що випускається, *x*: $K = K(x)$. Границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$, якщо вона існує, називається *граничними витратами*: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$. Величина $K'(x)$ характеризує наближено додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції.

<u>Приклад 6</u>. Процес зношування обладнання *T* протягом певного часу *t* є функція $T = T(t)$. Границя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t}$, якщо вона існує, визначає *швидкість зносу обладнання*: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = T'(t)$.

Таке використання диференціального числення часто називають ***граничним аналізом.***

В економіці широко використовуються середні величини: середня вартість продукції, середня продуктивність праці та ін. У певній мірі середні величини важливі і в комерційній діяльності: середній доход, середній об'єм продаж тощо. Однак, при плануванні розвитку виробництва, як і при будь-якій іншій підприємницької діяльності, виникає така задача, наприклад: на яку величину збільшиться результат, якщо збільшаться витрати, і, навпаки, на скільки зменшиться результат при зменшенні витрат. Оперуючи середніми величинами не можна знайти відповіді на це запитання. Тут мова йде про *прирости* змінних величин. У подібних задачах потрібно знайти границю відношення приростів розглядуваних величин або, як кажуть, *граничний ефект*. Тобто тут використовується поняття диференціального числення – похідної функції.

Розглянемо аналітичний спосіб знаходження максимального прибутку.

Для цього необхідно знайти максимум функції П(Q). Згідно з необхідною умовою максимуму функції, треба знайти такий обсяг товару (Q), для якого похідна функції П(Q) дорівнюватиме нулю. Тобто

П′(Q)= TR′(Q)-TC′(Q) → МП=MR-MC→ MR-MC=0,

де МП – граничний прибуток, який показує, на скільки зміниться прибуток виробника при зміні обсягу виробництва на одиницю.

Одержимо, що MR=MC – умова максимізації прибутку.

Це універсальне правило ринку, воно справджується різних видів ринків (досконалої конкуренції , монополія тощо).

Задача 1. [15] Визначити який максимальний доход може отримати фірма від реалізації кількості продукції Q (в лінійному наближенні). Нагадаємо, що валовий, або сумарний доход R визначається добутком ціни одиниці товару P та кількості товару Q :

$$R = PQ.$$

З іншого боку кількість товару (реалізованого) залежить від його ціни. Ця залежність визначається кривою попиту, яку задано лінійною функцією

$$P = a\,Q + b\,,$$

де кутовий коефіцієнт a від’ємний, параметр b додатній – і тому функція P спадна. Підставляючи вираз для ціни P в формулу сумарного (валового) доходу, отримаєм квадратичну функцію:

$$R = PQ = (aQ + b)\,Q = aQ^2 + bQ\,.$$

Оскільки граничний доход визначається похідною від сумарного (валового) доходу R по кількості товару Q, то з останнього виразу отримаємо:

$$R' = \frac{dR}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(aQ^2 + bQ\right) = 2aQ + b\,.$$

Звідки $Q_0 = -\frac{b}{2a}$. Отже, при реалізації кількості продукції Q_0 фірма отримає максимальний сукупний доход.

(початковий рівень)

Задача 2. [27] Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $y = 50x - 0.05x^3$ (грош.од.). Визначте середні і граничні витрати, якщо обсяг продукції 10 од.

Розв'язання. Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням

$$y_1 = \frac{y}{x} = 50 - 0.05x^2, \; y_1(10) = 50 - 0.05 \cdot 10^2 = 45 \text{ (грош.од.)}.$$

Граничні витрати: $y' = 50 - 0.05 \cdot 3x^2$; $y'(10) = 35$ (грош.од.).

Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош.од., то граничні витрати, тобто додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (обсязі продукції, що випускається у кількості 10 одиниць), складають 35 грош.од.

(достатній рівень)

Задача 3. [27] Фірма планує випускати сонячні батареї. На основі досліджень була встановлена залежність попиту q від ціни p за батарею $q = 100000 - 200p$, де q – кількість батарей для *продажу* в рік. Витрати фірми на випуск q сонячних батарей складають $c = 150000 + 100q + 0.003q^2$. Розрахувати прибуток, визначити його максимальне значення.

Розв'язання. Валовий прибуток $R = pq$. З умови запишемо функцію p як функцію змінної q: $p = 500 - 0.005q$. Тому $R = R(q) = (500 - 0.005q)q$.

Тоді прибуток $\pi = R - c$.

Отже, $\pi = (500 - 0.005q)q - (150000 + 100q + 0.003q^2) = -0.008q^2 + 400q - 150000$.

Визначимо максимальний прибуток

$$\pi'(q) = -0.016q + 400,$$
$$-0.016q + 400 = 0,$$
$$q = 25000,$$
$$\pi'(q) = -0.016 < 0.$$

Отже, при $q = 25000$ одиниць прибуток досягає максимуму, $\pi(25000) = 4850000$ грош.од.– максимальне значення прибутку.

(високий рівень)

Задача 4. [27] Виробник реалізує свою продукцію за ціною p за одиницю, а витрати при цьому задаються кубічною залежністю $S(x) = ax + \lambda x^3$ $(a < p, \lambda > 0)$. Знайти оптимальний для виробника обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток.

Розв'язання. Позначимо обсяг продукції, що випускається, через *x*. Складемо функцію прибутку $C(x)=px-(ax+\lambda x^3)$, де px – валовий прибуток від продукції, що реалізується. Дослідимо цю функцію на екстремум.

1. Знаходимо $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2$.
2. Знаходимо критичні точки: $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2=0$, звідки $x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ (другу критичну точку $x_2=-\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ не розглядаємо за змістом задачі).
3. Знаходимо $C''(x)=-6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$:

$C''\left(x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)<0$ (в даному випадку $C''(x)<0$ при будь-якому $x>0$), отже, при $x=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток $C(x)$ максимальний.

4. Знаходимо максимум функції (тобто максимальний розмір прибутку)

$$C_{\max}\left(x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)=\frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

(високий рівень)

Задача 5. [27] Підприємство виробляє *x* одиниць продукції за ціною $p(x)=50-\frac{1}{10}x$, а витрати виробництва задаються функцією $K(x)=\frac{1}{50}x^2+14x+800$. Знайти оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції і відповідний йому максимальний прибуток.

Розв'язання. Нехай $U(x)$– валовий прибуток, $z(x)$– прибуток від реалізації *x* одиниць продукції за ціною $p(x)$.

Тоді $U(x)=x\cdot p(x)$;

$z(x)=U(x)-K(x)$, де $p(x)$, $K(x)$ – задані функції.

Для розв'язання задачі слід досліджувати функцію $z(x)$ на екстремум. При цьому прибуток буде максимальним для такого обсягу *x* випуску продукції, для якого $z'(x)=0, z''(x)<0$.

Проведемо це дослідження.

1. Формуємо $z(x)$, знаходимо $z'(x)$ і, розв'язавши рівняння $z'(x)=0$, знаходимо критичну точку. Врахуємо, що

$U(x)=50x-\frac{1}{10}x^2$, $K(x)=\frac{1}{50}x^2+14x+800$, $z(x)=U(x)-K(x)$;

$z'(x)=U'(x)-K'(x)=0$, $U'(x)=K'(x)$;

$50-\frac{1}{10}x=\frac{1}{25}x+14$; $\frac{6}{25}x=36$; $x=150$ – критична точка.

2. Знаходимо $z''(x)$ і визначаємо її знак при $x=150$:

$z''(x) = U''(x) - K''(x) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = -\frac{6}{25} < 0, \forall x.$

Отже, x = 150 – точка максимуму функції $z(x)$, тобто оптимальний обсяг виробництва складає 150 одиниць продукції.

3. Знаходимо максимальний прибуток виробництва, тобто $z_{\max} = z(150)$. При x =150 ціна $p = 50 - \frac{1}{10} \cdot 150 = 35$; валовий прибуток $U = 35 \cdot 150 = 5250$. Витрати виробництва $K = \frac{1}{50} \cdot 150^2 + 14 \cdot 150 + 800 = 450 + 2100 + 800 = 3350$; максимальний прибуток від продажу $z_{\max} = 5250 - 3350 = 1900$.

2.4. Задачі економічного змісту при вивченні теми “Показникові рівняння”

У цьому розділі ми розглянемо деякі економічні задачі, які можна запропонувати для розв'язування під час вивчення теми “Показникові рівняння” в 10-му класі загальноосвітньої школи.

Актуальність розгляду такого типу задач не тільки в набутті навичок розв'язування показникових рівнянь, а й у можливості практичного ознайомлення з деякими економічними поняттями та термінами, опануванні формули складного відсотка, а саме:

A_0 - початковий (стартовий) капітал;

A_n - остаточний капітал;

$A_1 – A_0$ - абсолютний приріст;

$\frac{A - A_0}{A_0}$ - відносний приріст;

$\frac{A - A_0}{A_0}$ *100% - відсотковий приріст;

p% - простий відсотковий приріст;

t - термін дії простого відсоткового приросту.

Користуючись введеними поняттями, неважко отримати формулу для нарахування ***складного відсотка:***

$$\mathbf{A=A_0*(1+p/100)^t}$$

Якщо ж для певних термінів t_i змінюється і відповідний простий відсоток p_i, то і формула для нарахування відсотка відповідно зміниться та набере вигляду:

$$A_n=A_0*(1+p_1/100)^{t_1} * \ldots * (1+p_n/100)^{t_n}$$

Розглянемо економічні задачі, математичні моделі яких будуть показниковими рівняннями:

1. Поки продавець продавав свій товар серед знайомих, його щомісячний прибуток становив - 20/3%. Коли він почав це робити на ближньому ринку,

щомісячний прибуток зріс до 20%. Нарешті, вихід на центральний ринок став щомісячно приносити 25%. У результаті його прибуток порівняно з початковим становив 220%. Скільки місяців продавець збував свій товар, якщо кожен період продажу товарів з одним і тим самим відсотком прибутку становить ціле число місяців?

Розв'язання:

Якщо позначити через *x, y, z.* відповідну кількість місяців продажу товарів за перший, другий та третій періоди, а через A_0 - початковий капітал, то математичною моделлю задачі буде показникове рівняння:

$$A_0(1+220/100) = A_0(1+20/300)^x(1+20/100)^y(1+25/100)^z$$

яке після спрощення набирає вигляду:

$\frac{16}{5} = \left(\frac{16}{15}\right)^x \bullet \left(\frac{6}{5}\right)^y \bullet \left(\frac{5}{4}\right)^z$, а остаточні спрощення дадуть рівняння:

$$1 = 2^{4x+y-2z-4}\,3^{y-x}\,5^{z-x-y+1},$$

розв'язок якого збігається з розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + y - 2z - 4 = 0 \\ -x - y + z + 1 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

звідки $x = 2$, $y = 2$, z = 3, отже, відповідь - 7 місяців. Відповідь. 7.

2. Реконструкція фабрики відбувалася в три етапи, кожний з яких становить ціле число місяців. На першому щомісячний спад виробництва становив 4%, на другому - $16\frac{2}{3}$ % і на третьому 25%.

За період реконструкції початковий обсяг виробництва скоротився на 68%. Скільки місяців тривала реконструкція фабрики?

Розв'язання:

Позначимо через *x, y, z.* - терміни відповідних етапів реконструкції, A_0 - початковий обсяг виробництва, An- кінцевий обсяг виробництва.

За умовою задачі

$$A_n=A_0-A_0*68/100=A_0(1- 68/100)$$

Отже, математичною моделлю цієї задачі буде показникове рівняння:

$$A_0(1-68/100)=A_0(1-4/100)^x(1-50/300)^y(1-25/100)^z$$

після спрощення це рівняння набере вигляду:

$$16/50=(24/25)^x(5/6)^y(3/4)^z$$

а остаточні спрощення дадуть рівняння:

$$1 = 2^{3x-y-2z-3}\,3^{x-y+z}\,5^{-2x+y+2},$$

яке в свою чергу рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - y - 2z - 3 = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

x=3, y=4, z=1; $x + y + z = 8$. Відповідь. 8 місяців.

3. Підприємство працювало три роки. Виробництво продукції за другий рік роботи підприємства зросло на р %, а наступного року воно зросло на 10% більше, ніж попереднього. З'ясувати, на скільки відсотків збільшилося виробництво на другий рік, якщо за два роки воно збільшилося в загальному обсязі на 48,59%.

Розв'язання

Нехай: A_1 - кількість продукції, виробленої за 1-й рік;

A_2 - кількість продукції, виробленої за 2-й рік;

A_3 - кількість продукції, виробленої за 3-й рік;

$\frac{A_2 - A_1}{A_1} * 100\%$ - відсотковий приріст за другий рік *(p%* за умовою);

$\frac{A_3 - A_2}{A_2} * 100\%$ - відсотковий приріст за третій рік ((p + 10)% за умовою).

За умовою також відомо, що за два роки виробництво зросло на 48,59%, тобто за третій рік підприємство виробило на 48,59% продукції більше, ніж за перший рік. Цю умову можна записати у вигляді рівняння:

$(A_3 - A_1) / A_1 * 100\% = 48{,}59\%$

Запишемо ці рівняння та розв'яжемо відповідну систему:

$$A_2 = A_1 * (1 + p/100)$$

$$A_3 = A_2 * (1 + \frac{p+10}{100})$$

$$A_3 = A_1 * (1 + 48{,}59/100)$$

Помножимо перше рівняння на друге, дістанемо:

$$A_2 * A_3 = A_1 * A_2 * (1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p+10}{100});$$

Підставимо в останнє рівняння значення A_3 з третього рядка системи:

$$A_1 * (1 + 48{,}59/100) = A_1 * (1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p+10}{100});$$

Після спрощення дістанемо квадратне рівняння:

$P^2 + 210p - 3859 = 0$, один з коренів якого $p = 17$ і є шуканою відповіддю.

Відповідь. 17%.

Розглянемо деякі прогнозні задачі, розв”язування яких зводиться до розв’язування показникових рівнянь:

Задача 1

За який строк окупляться інвестиції в сумі 85 тис. $, взятих у кредит, якщо відсоток який треба виплачувати за кредит кожного року, складає 7 %, а прогнозований прибуток дорівнює лише 5 тис $ в рік?

Розв'язок:

Математичною моделлю для розв'язку даного рівняння буде таке трансендентне рівняння:

$$5\,t = 85*(1+0{,}07)^{t}$$
$$t = 17*1{,}07^{t}$$

Графічно розв''язавши дане рівняння отримаємо, що інвестиції, взяті в кредит, не окупляться ніколи.

Задача 2

Сума інвестицій дорівнює 100 тис $.Прогнозована сума віддачі складає 20 тис $ у рік. За який строк окупляться інвестиції, якщо на борг нараховуються 8% річних?

Розв'язок:

Математичною моделлю для розв'язку даного рівняння буде таке трансцендентне рівняння:

$$20\,t = 100*(1+0{,}08)^{t}$$
$$t = 5*1{,}08^{t}$$

Графічно розв'язавши дане рівняння отримаємо, що інвестиції, взяті у кредит, окупляться через 7 років.

2.5. Застосування інтегрального числення до задач економічного змісту

Знайдемо обсяг продукції Q, який був вироблений за певний проміжок часу [0;T].

Нехай $y = f(t)$ – функція, яка описує зміну продуктивності деякого виробництва із зміною часу t.

$\Delta Q = f(t) \bullet \Delta t$ – обсяг продукції вироблений за проміжок часу $[t;t+\Delta t]$ (при умові, що продуктивність не змінюється із зміною часу, тобто f(t)=const).

Розіб'ємо відрізок [0;T] на проміжки точками такі проміжки:

$0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$.

Для проміжку часу $[t_{i-1};t_i]$ одержимо обсяг продукції ΔQ:

$\Delta Q = f(c_i)\Delta t_i$, де $c_i \in [t_{i-1};t_i], \Delta t = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,\ldots,n.$

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i .$$

Значення Q буде більш точним при умові, що $\Delta t_i \to 0$. Тоді

$$Q = \lim_{\Delta X_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$$

З означення визначеного інтеграла випливає:

$$Q=\int_0^T f(t)dt...$$

де f(t) – продуктивність праці в момент часу t.

Одержали обсяг продукції Q , що випускається за проміжок часу [0;T], якщо f(t) – продуктивність праці в момент часу t.

Розглянемо приклади, які наведені у підручнику [30]. Відомо, що виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд y=$a_0 x_1^{a_1} \bullet x_2^{a_2}$, де y – обсяг виробництва, x_1 – працезатрати, x_2 – основні засоби виробництва. Якщо вважати, що затрати праці є лінійна залежність від часу, а затрати капіталу незмінні, то функція набуде вигляду

$$y(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}\text{ dt...}$$

Приклад 8, [30]. Знайти обсяг продукції, виробленої за 4 роки, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $y(t)=(1+t)e^{3t}$.

Розв’язання: За формулою (5) обсяг П виробленої продукції дорівнює

$$П= =\int_0^4 (1+t)e^{3t}dt=\left|\begin{aligned} u&=1+t\\ dv&=e^{3t}dt\\ du&=dt\\ v&=\frac{1}{3}e^{3t}\end{aligned}\right|=\frac{1}{3}(1+t)e^{3t}\Big|_0^4-\frac{1}{3}\int_0^4 e^{3t}dt=$$

$$=\frac{1}{3}(5e^{12}-1)-\frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4=\frac{1}{9}(14e^{12}-2)\approx 2{,}53\bullet 10^5\ \text{(у.о.)}$$

Повернемося до задач про визначення економічної ефективності капітальних вкладень.

Нехай K_t – кінцева сума, отримана за t років, K – дисконтна (початкова) сума. Якщо проценти прості, то K_t=K(1+it), де i=$\frac{P}{100}$, процентна ставка, тоді $K=\frac{K_t}{1+it}$. Якщо ж проценти складні, то $K_t=K(1+t)^t$ і тому $K=\frac{K_t}{(1+i)^t}$. Нехай прибуток, який щорічно надходить, змінюється з часом і описується функцією f(t) і при нормі процента, рівній і, процент нараховується безперервно. Можна показати в цьому випадку, що дохід К за час Т обчислюється по формулі

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt... \qquad (6)$$

Приклад 9, [30]. Визначити дисконтний дохід за три роки при процентній ставці 8%, якщо початкові капіталовкладення склали 10 млн. грн.., і намічається кожен рік збільшувати капіталовкладення на 1 млн. грн.

Розв'язання: Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією f(t)=10+1xt=10+t. Тоді за формулою (6) отримаємо

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}dt = 30,5 \text{ (млн.. грн..)}$$

Це означає, що для отримання однаково нарощеної суми через 3 роки щорічні капіталовкладення по 10-13 млн. грн.. рівносильні початковому вкладу 30,5 млн. грн.. при тій же процентній ставці.

Нехай відома функція t=t(x), яка описує зміни затрат часу t на виготовлення виробу в залежності від степеня засвоєння виробництва, де x – порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час $t_{ср.}$, витрачений на виготовлення одного виробу в період засвоєння від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє

$$t_{ср.} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx... \qquad (7)$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробу t=t(x), то часто вона має вигляд $t = ax^{-b}$, де a – затрати часу на перший виріб, b – показник виробничого процесу.

Приклад 10, [30]. Знайти середній час, затрачений на засвоєння одного виробу, в період засвоєння від x_1=100 до x_2=121 виробів, вважаючи, що a=600 (хв..), b=0,5.

Використовуючи формулу (7)

$$t_{ср} = \frac{1}{121-100}\int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 \text{ (хв.)}$$

2.6. Задачі економічного змісту при вивченні початків теорії ймовірностей та елементів статистики

Реалізація прикладного спрямування змісту математики загальноосвітніх шкіл, шкіл та ліцеїв економічного профілю може здійснюватись не лише при вивченні розділів прикладного характеру (елементів теорії ймовірностей, математичної статистики, лінійного програмування, математичної логіки та ін), а й при розв'язуванні задач економічного змісту. Зміст і структура цих задач відображає реальні економічні явища і процеси, а їх розв'язання сприяє виробленню вмінь застосовувати математичні методи на практиці, усвідомленому розумінню учнями важливості і практичної цінності математики для майбутньої професійної діяльності.

Зупинимось на застосуванні саме елементів теорії ймовірностей, оскільки теорія ймовірностей обгрунтовує економічні розрахунки, пов'язані з явищами випадкового характеру.

(початковий рівень)

Задача 1. [1, № 210] Ви маєте капітал в 100 млн у.о. і розглядаєте альтернативні можливості вкладу його або у виробництво кінофільму, або в торгівлю.

Ймовірність успіху вкладу капіталу	в кінофільм	0,2
	в торгівлю	0,7
Ймовірність неуспіху вкладу капіталу	в кінофільм	0,8
	в торгівлю	0,3
У разі успіху % прибутку	від кінофільма	90 %
	від торгівлі	30 %
У разі неуспіху % прибутку	від кінофільма	10 %
	від торгівлі	20 %

Куди вигідніше вкласти капітал?

Розв'язання:

У відповідності з теорією статистичних рішень середньоочікуваний прибуток дорівнює:

При вкладанні капіталу в кінофільм:	90·0,2+10·0,8=26 %
При вкладанні капіталу в торгівлю:	30·0,7+20·0,3=27 %

Отже, вигідніше вкладати капітал у торгівлю.

(достатній рівень)

Задача 2. [1, № 218] Необхідно вибрати один з двох типів об'єктів для вкладу капіталу. Аналіз статистичної інформації аналогічних проектів показує:

При вкладанні капіталу в об'єкти типу А:

прибуток 15 млн у.о. мав місце в 40 випадках,
прибуток 20 млн у.о. мав місце в 20 випадках,
прибуток 25 млн у.о. мав місце в 15 випадках.

При вкладанні капіталу в об'єти типу Б:

прибуток 12 млн у.о. мав місце в 60 випадках,
прибуток 16 млн у.о. мав місце в 48 випадках,
прибуток 24 млн у.о. мав місце в 36 випадках.

Необхідно обрати тип об'єктів для вкладання капіталу, який забезпечить найбільший прибуток.

Розв'язання:

Середньоочікуване значення (математичне сподівання) прибутку (X) розраховується як сума математичних сподівань прибутку. Очікуваний прибуток знаходиться як добуток величини прибутку, що передбачається, та його ймовірності. Розрахуємо його:

При вкладанні капіталу в об'єкти типу А:

загальна кількість випадків дорівнює 40+20+15=75;

$$X = 15 \cdot \frac{40}{75} + 20 \cdot \frac{20}{75} + 25 \cdot \frac{15}{75} = 18{,}35 \text{ млн у.о.}$$

При вкладанні капіталу в об'єкти типу Б:

загальна кількість випадків дорівнює 60+48+36=144;

$$X = 12 \cdot \frac{60}{144} + 16 \cdot \frac{48}{144} + 24 \cdot \frac{36}{144} = 16{,}32 \text{ млн у.о.}$$

Об'єкти типу А виявляються переважними, оскільки обіцяють більш високий середньоочікуваний прибуток.

(високий рівень)

Задача 3. [1, № 219] Можливе здійснення двох нових проектів, спряжених з ризиком. Перший проект передбачає отримання протягом року прибуток 15 млн у.о. з ймовірністю 0,4 , але не виключається і збиток 2 млн у.о. (ймовірність його дорівнює 1 – 0,4 = 0,6). Другий проект обіцяє прибуток 10 млн у.о. з ймовірністю 0,5 і можливим збитком у 8 млн у.о., ймовірність якого також 0,5.

1) Який проект кращий з точки зору очікуваного прибутку?
2) Який проект кращий з точки зору меншої різниці ймовірностей прибутку та збитків (більш обережний)?
3) Який проект кращий з точки зору співвідношення змін ймовірностей прибутку і його величини?
4) Який проект кращий з точки зору співвідношення змін ймовірностей збитків і їх величини?
5) Який проект кращий з точки зору співвідношення можливих сум прибутків та збитків?

Розв'язання*:*

1) Середньоочікуваний прибуток (математичне сподівання прибутку) дорівнює:
- по першому проекту: $0{,}4 \cdot 15 + 0{,}6 \cdot (-2) = 4{,}8$ млн у.о.;
- по другому проекту: $0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot (-8) = 1$ млн у.о.

Отже, з точки зору очікуваного прибутку значно вигіднішим (майже в 5 разів) є перший проект.

2) Для першого проекту різниця у ймовірностях прибутку та збитків складає: $\frac{0,6-0,4}{0,4}=0,5$ або 50 %.

   Для другого проекту ця різниця дорівнює: $\frac{0,5-0,5}{0,5}=0$.

   Отже, другийий проект є більш обережним.

3) У порівнянні з першим проектом в другому імовірність отримання прибутку зростає на $\frac{0,5-0,4}{0,4}=0,25$ або 25 %, в той час як величина прибутку падає на $\frac{15-10}{15}=0,33$ або 33 %.

Оскільки імовірність прибутку в другому проекті в порівнянні з першим зростає значно менше, ніж падає його величина, переважним є перший проект.

4) У порівнянні з першим у другого проекту імовірність отримання збитків зменшується на $\frac{0,5-0,4}{0,4}=0,25$ або 25 %, в той час як величина збитків зросте на $\frac{8-2}{2}=3$ або 300 %.

Оскільки імовірність збитків у другому проекті в порівнянні з першим зменшується набагато повільніше, ніж зростає їх величина, значно вигіднішим є перший проект.

5) Для першого проекту співвідношення можливих прибутків та збитків складає 15/2, тобто на 1 млн у.о.можливих збитків прпадає 7,5 млн у.о. можливого прибуту.
   Для другого проекту це співвідношення складає 10/8, тобто на 1 млн можливих збитків припадає 1,25 млн у.о. можливого прибутку.
   Отже, виходячи з співвідношення можливих сум прибутків та збитків, більш вигідним є перший проект.

У сучасній програмі з математики в 9 класі вивчається розділ “Елементи прикладної математики”, в якому Х годин призначається на вивчення теми “Початки статистики”. Метою вивчення елементів статистики в 9 класі є формування поняття про статистичні дані, способі їх подання та знаходження найпростіших статистичних показників. В 11 класі статистиці присвячений цілий розділ “Вступ до статистики”, на вивчення якого програмою передбачається 10 годин.

Після вивчення способів збирання, подання та зображення статистичних даних вивчаються найпростіші статистичні показники. Це середнє значення, мода та медіана розподілу. Серед середніх розглядається проста середня арифметична, середня арифметична зважена, середня гармонічна та середня геометрична. В класах з поглибленим вивченням економіки варто розглядати ці показники більш докладно, акцентуючи увагу на їх економічному змісті.

Оскільки для більшості соціально-економічних явищ характерна адитивність обсягів (виробництво цукру, витрати палива тощо), то найпоширенішою є ***арифметична середня***, яка обчислюється діленням загального обсягу значення на обсяг сукупності:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{або} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Наприклад, за місяць страхова компанія виплатила страхове відшкодування за п’ять ушкоджених об’єктів на суму, тис. гр.од.: 18, 27, 22, 30, 23. Середня сума виплати страхового відшкодування: $\bar{x} = \frac{18+27+22+30+23}{5} = 24$ тис. гр.од.

(початковий рівень)

Задача 4. [8] Якщо в січні агрофірма продала молокозаводу 315, у лютому – 305, а в березні – 340 т молока, то середньомісячний продаж молока: $\frac{315+305+340}{3} = 320$ т.

Такий тип задач називають найпростішими задачами на обчислення середнього арифметичного. Для його визначення потрібно суму окремих значень даної ознаки поділити на число одниць, що мають цю ознаку.

У класах економічного профілю доцільно також розглянути задачі на *середню в хронологічному ряді.* В таких задачах значення ознак подаються за інтервали часу. Принципово, щоб в задачах, які розглядаються, інтервали часу були рівні.

(достатній рівень)

Задача 5. [8] Квартальний оборот коштів біржи протягом року становив у млн. гр.од.: Ікв. – 372; ІІ кв. – 423; ІІІ кв. – 340; IV кв. – 455. Визначте середньоквартальний оборот біржі.

Розв’язання:

Середньоквартальний оборот біржі визначається так:

$$\bar{x} = \frac{Сумарний.річний.оборот}{Кількістьінтервалів} = \frac{372+423+340+455}{4} = 397{,}5 \text{ млн. гр. од.}$$

Другим типом задач на хронологічний ряд є задачі, де наведені *моментні показники*. Моментні показники замінюються середніми як півсума значень на початок і кінець періоду. Якщо моментів більше ніж два, а інтервали часу між ними рівні, то у чисельнику до півсуми крайніх значень додають усі проміжні, а знаменником є число інтервалів, яке на одиницю менше від числа значень ознаки. Таку формулу називають *середньою хронологічною*:

$$\bar{x} = \frac{\frac{x_1 + x_n}{2} + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Наприклад.

Кредиторська заборгованість банку на початок кожного місяця становила, млн.гр.од.: 1.01 –20; 1.02 – 26, 1.03 – 32, 1.04 – 29. Підрахувати середньомісячну суму кредиторської заборгованості банку.

Для того щоб обчислити середньомісячну заборгованість беремо значення на кінцях періоду, тобто на 1.01 та 1.04 та ділимо його на два (20+29)/2, додаємо значення в середині періоду, (20+29)/2+26+29, та ділимо на кількість моментів без одного:

$$\bar{x} = \frac{\frac{20+29}{2} + 26 + 29}{4-1} = 23{,}17 \text{ млн гр.од.}$$

Отже, для того, щоб підрахувати середньомісячну суму кредиторської заборгованості необхідно до півсуми значень на початок і кінець періоду, що досліджується додати показники в середині періоду і поділити на кількість періодів без одного.

Задача 6. [8] На фірмі залишки обігових коштів на початок кожного місяця I кварталу становили (млн гр.од.): січень – 70, лютий – 82, березень – 77, квітень – 80. Середньоквартальний залишок обігових коштів:

$$\bar{x} = \frac{\frac{70+80}{2} + 82 + 77}{4-1} = \frac{234}{3} = 78 \text{ млн гр.од.}$$

Серед середніх вивчається ***середня гармонічна***, яка використовується при розрахунку середньої з обернених показників. Варто спочатку подати приклад задачі і на цьому прикладі зясувати методику його обчислення.

Припустимо, що придбано товару в двох продавців на однакову суму, але за різною ціною: по 3 грн. за 1 кг у першого продавця і по 2 грн. – у другого. Як визначити середню ціну покупки?

Середня арифметична $(3+2):2 = 2{,}5$ грн. не реальна, оскільки за такою ціною на 2 грн. можна придбати 2 : 2,5 = 0,8 кг товару. Насправді придбано товару в першого продавця 1: 3 = 0,33 кг, у другого – 1:2 = 0,5 кг, тобто разом 0,33 + 0,5 = 0,83 кг, а середня ціна становить 2 : 0,83 = 2,4 грн.

Описаний порядок розрахунку називають *середньою гармонічною простою*.

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{x}} = \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 2{,}4 \text{ грн.}$$

Проведені обчислення можна узагальнити наступною формулою:

$$\overline{x_{с.г.}} = \frac{m+m+...+m}{\frac{m}{x_1}+\frac{m}{x_2}+...+\frac{m}{x_n}} \quad \text{або} \quad \overline{x_{с.г.}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}},$$

де x_i - варіанти, $x_{с.г.}$ - середня гармонічна.

(достатній рівень)

Задача 7. [8] У таблиці подана інформація про реалізацію товару в трьох крамницях протягом робочого дня. Визначити середню ціну реалізованого товару.

Крамниця	A	**B**	**C**
Ціна 1 кг товару, ***грн***	3	4	3,6
Вартість реалізованого товару, ***грн***	864	864	864

Розв'язання:

Розрахунок середньої ціни товару доцільно робити за правилом.

Середня ціна = $\frac{вартість.реалізованого.товару}{кількість.товару}$

Для того, щоб визначити кількість реалізованого товару, потрібно кожну загальну вартість реалізованої продукції поділити на відповідну ціну товару:

$$\left(\frac{864}{3}+\frac{864}{4}+\frac{864}{3.6}\right)\text{(кг)}.$$

Отже, середня ціна реалізованого товару дорівнює приблизно

$$\overline{x_{с.г.}} = \frac{864+864+864}{\frac{864}{3}+\frac{864}{4}+\frac{864}{3{,}6}} \approx 3{,}48 \text{ (грн.)}$$

Як бачимо, середня гармонічна є відношення кількості варіант до суми обернених значень цих варіант. Але, так як вартість реалізованої продукції однакова, то середнє значення ціни товару є середнім гармонічним простим. Якщо вартість реалізованого товару різна, то середнє значення ціни товару є середня гармонічна зважена. Наприклад, за умови, що в першого продавця придбано товару на 150 грн., а в другого – на 300 грн, середня ціна 1 кг буде:

$$\bar{x} = \frac{150+300}{\frac{150}{3}+\frac{300}{2}} = 2{,}25 \text{ грн.}$$

Таким чином, обчислення *середньої гармонійної зваженої* можна провести за формулою:

$$\overline{x_{с.г.}} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots + \frac{m_n}{x_n}}$$

(високий рівень)

Задача 8. [8] В таблиці подано відомості про вартість (вона є різною) товару та його ціну. Визначте середню ціну реалізованого товару.

Крамниця	**A**	**B**	**C**
Ціна 1 кг товару, ***грн***	3	4	3,6
Вартість реалізованого товару, ***грн***	1050	960	1296

Середня ціна товару обчислюється за тим самим правилом, що і у попередній задачі.

$$\overline{x_{с.р.}} = \frac{1050 + 960 + 1296}{\frac{1050}{3} + \frac{960}{4} + \frac{1296}{3{,}6}} = 3{,}48 \text{(грн)}.$$

Загалом використання середньої гармонічної доцільне й обґрунтоване в тих випадках, коли осереднювана ознака є відношенням між логічно пов'язаними величинами (наприклад, відносна величина інтенсивності, структури тощо).

Вибір середньої має грунтуватись на логічній формулі показника. Так, рентабельність підприємства обчислюється відношенням:

$$\frac{прибуток.від.реалізації}{обсяг.реалізації}$$

Наприклад, мале підприємство виробляє два види продукції з різним рівнем рентабельності: виріб А має рентабельність 12%, виріб В – 7%. Прибуток від реалізації виробів становив відповідно 240 і 210 тис. гр.од. Спроба визначити середню рентабельність як арифметичну не відповідає логічній формулі, така середня позбавлена реального економічного змісту. Для того, щоб зберегти зміст, треба передусім визначити обсяг реалізації відношенням: $\frac{прибуток}{рентабельність}$.

У цьому випадку розрахунок відповідає формулі середньої гармонічної:

$$\bar{x} = \frac{240 + 210}{\frac{240}{12} + \frac{210}{7}} = \frac{450}{50} = 9\%.$$

Формула середньої – це лише математична модель логічної формули показника. Важливий методологічний принцип вибору виду середньої полягає в тому, аби розрахунок забезпечив логіко-змістовну суть показника (логічну формулу). Цей принцип є основним критерієм оцінки правильності рішень.

Отже, якщо крім значень ознаки відомі значення знаменника логічної формули, то середню розраховують за формулою арифметичної. А якщо знаменник невідомий, використовується формула середньої гармонічної.

Якщо визначальна властивість сукупності формується як добуток індивідуальних значень ознаки, то використовується ***середня геометрична***:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\prod_1^n x_j} \ ,$$

де **П** – символ добутку, x_j – відності величини динаміки, виражені кратним відношенням *j*-го значення показника до попереднього (*j* –1)-го.

Наприклад, внаслідок інфляції споживчі ціни за три роки зросли в 2,7 раза, в тому числі за перший рік у 1,8 раза, за другий – в 1,2 раза, за третій – в 1,25 раза. Як визначити середньорічний темп зростання цін?

Середня арифметична (1,8 + 1,2 + 1,25):3 = 1,416 не забезпечує визначальної властивості: за три роки за цією середньою ціни зросли б у 1,416·1,416·1,416 = 2,84, а не в 2,7 раза. Визначальна властивість $\prod_1^n x_j = 2{,}7$ забезпечується лише геометричною середньою: $\bar{x} = \sqrt[3]{1{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}25} = \sqrt[3]{2{,}7} = 1{,}394$.

Коли часові інтервали не однакові, розрахунок виконують за формулою *середньої геометричної зваженої*: $\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_1^n x_j^{n_j}}$, де $\sum n_j$ – часовий інтервал.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999.
2. Акоф П., Сасиени Н. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971.
3. Апанасов П.Т. Методика решения задач с экономическим содержанием. Методические рекомендации. – М.: Высш. шк., 1981.
4. Бевз Г. П. Алгебра: Проб. підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1996.
5. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – К.: Наукова думка, 1976.
6. Бородін О.І., Голбдвассер Й.І., Пуляєв О.В. Збірник задач з математики (на основі виробництва). Посібник для вчителів. – К.: Радянська школа, 1963.
7. Васюренко О.В. Банківські операції: Навч. посіб. – К.: Т-во "Знання", КОО, 2000.
8. Герасименко С.С. та ін. Статистика: Підручник – К.: КНЕУ, 1998.
9. Державний стандарт базової і повної середньої освіти: Затв. Постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2004 р. №24 // Освіта України, 2004. – №5 (500).
10. Джола Л.П. Викладання математики в період становлення ринкових відносин // Математика №33, вересень, 1999.
11. Дутка Г.Я. Формування вмінь студентів розв’язувати прикладні задачі при навчання математики в коледжах економічного профілю: Дис.на здобуття наукового ступеня кандидата пед.наук. – К., 1998.
12. Дутка Г.Я. Вимоги до відбору задач з економічним змістом при вивченні математики // Математика в школі, № 1, 1999.
13. Дутка Г.Я. Застосування диференціального числення в задачах економічного змісту // Математика в школі, № 2, 1999.
14. Ковальчук Г.О., Мельничук В.Г., Огнев’юк В.О. Економіка: Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Навчальна книга, 2003.
15. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 1999.
16. Кравчук В., Янченко Г. Математика. Пробний підручник для 6 класу. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2000.
17. Литвиненко Г.Н., Возняк Г.М. Математика: Проб.підруч. для 6 кл. серед.шк. – Доп. М-вом освіти України. – К.: Освіта, 1995.
18. Медвєдєв Г.А. Початковий курс фінансової математики: Навчальний посібник. – М.: ТОО ”Острожье”, 2000.
19. Міцкевич А.А. Збірник завдань з економіки: – М.: “Вита-Пресс”, 1998.
20. Монахов В.М. и др. Преподавание математики и экономическая подготовка учащихся профтехучилищ: Методическое пособие для преподавателей ПТУ. – М.: Высш. шк., 1989.

21. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. – К: Навчальна книга, 2003. – 302 с.
22. Радіонова І.Ф. та ін. Загальна економіка: Підручник. – К.: А.П.Н., 2000.
23. Симонов А.С. Економічні задачі на уроках математики // Математика. Додаток до газети "Перше вересня", 1997 №4, 5, 6.
24. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000.
25. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні основи вивчення математики: Методичний посібник. – К.: Радянська школа, 1983.
26. Стрельченко О., Стрельченко І. Фінансова математика – нове життя старих задач. // Математика в школі. –1998, № 1, 2, 3.
27. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика. Загальний курс: збірник задач та вправ. 2-ге вид. доп. і доопр. – Х.: Рубікон,1999.
28. Фомкіна О.Г. Методична система проведення практичних занять з математики зі студентами економічних спеціальностей (на базі кооперативного інституту): Дис.на здобуття вченого ступеня кандидата пед.наук. – Полтава, 2000.
29. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн.. для учителя. – М.: Просвещение, 1990.–96 с.
30. Швець В.О., Білянін Г.І. Математика: Навчальний посібник. – Чернівці: Зелена Буковина, 2003. – 382 с.

З м і с т