

УДК 539.3:534.1

**О.В. Савченко**, канд. техн. наук

Чернігівський державний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

## ЗАДАЧІ ТОПОЛОГІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ КОМПОЗИТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

*Розглядається методика оптимального проектування композитних елементів конструкцій, працюючих при динамічних навантаженнях. Критеріями якості вибрано декременти коливань і швидкість затухання вільних коливань. Показано застосування методики до побудови оптимальних проектів тришарових стержнів зі змінною топологією. Оптимальна топологія і конструктивні параметри проектів визначаються за допомогою генетичних методів.*

**Ключові слова:** оптимізація, генетичні методи, композитні конструкції, демпфірування.

*Рассматривается методика оптимального проектирования композитных элементов конструкций, работающих при динамических нагрузках. Критериями качества выбраны декременты колебаний и скорость затухания свободных колебаний. Показано использование методики для построения оптимальных проектов трехслойных стержней с изменяемой топологией. Оптимальная топология и конструктивные параметры проектов определяются с помощью генетических методов.*

**Ключевые слова:** оптимизация, генетические методы, композитные конструкции, демпфирование.

*A technique of optimal design for composite structure elements, working under dynamic loads, is considered. Vibration decrement and rate of free vibration fading were chosen as optimization criteria. Application of the technique is demonstrated on the problem of designing optimal sandwich beams with variable topology. Optimal topology and constructive parameters are identified using genetic algorithms.*

**Key words:** optimization, genetic algorithms, composite structures, damping.

**Вступ.** При проектуванні машинобудівних конструкцій для роботи в умовах динамічних навантажень виникає проблема оптимального вибору матеріалів і їх розміщення у конструкції, наприклад, при плануванні розміщення демпфіруючих і несучих елементів з метою підвищення ефективності їх функціонування. Метою оптимізації може бути зміна частотного спектра, збільшення декрементів коливань, підвищення характеристик міцності тощо. Розв'язання таких задач потребує створення і використання відповідних методів і методик оптимального проектування. Як показано в [1-3], ефективний процес оптимального проектування можна побудувати на основі еволюційних методів оптимізації, зокрема генетичних алгоритмів. Генетичні методи є пошуковими методами, але, на відміну від класичних, використовують еволюційні методи відбору кращих зразків, запозичені у природи [4; 5]. Задача проектування оптимальної конструкції полягає у визначенні вектора проектних параметрів, який забезпечує задані умови оптимальності.

У цій роботі використовуються варіанти класичного генетичного алгоритму [4; 5] та генетичного алгоритму з реальним кодуванням [1] для визначення векторів проектних параметрів, які забезпечують екстремум цільової функції. Проектними змінними є геометричні параметри структури, товщини шарів, властивості матеріалів.

**Постановка завдання.** При проектуванні конструкцій з в'язкопружних матеріалів можна використати два шляхи одержання оптимального проекту: модифікація матеріалу і модифікація конструкції. Приклади першого підходу наведено в [1-3]. Другий підхід називають топологічною оптимізацією.

Процес топологічної оптимізації розглядається у представленій роботі на прикладі проектування стержня з двошаровим покриттям, у якому в'язкопружний матеріал працює переважно на зсув, а верхній жорсткий шар забезпечує наявність деформацій зсуву.

У представленій роботі розглядаються дві задачі оптимізації тришарового стержня для роботи в умовах вібраційних навантажень:

1. Задача оптимального розміщення елементів верхнього жорсткого шару за критеріями максимального декременту коливань та максимальної швидкості затухання коливань при обмеженнях на масу стержня;

2. Задача вибору оптимальних проектів стержня з нерозрізним і розрізним покриттям за критеріями максимального демпфірування.

**Метод побудови математичної моделі коливань тришарового стержня.** Скінченно-елементні моделі тришарового стержня (рис. 1) побудовані з використанням шестивузлових елементів (рис. 2).

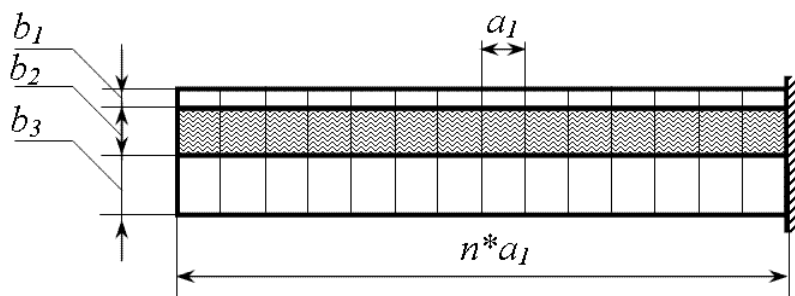


Рис. 1. Стержень з двошаровим покриттям

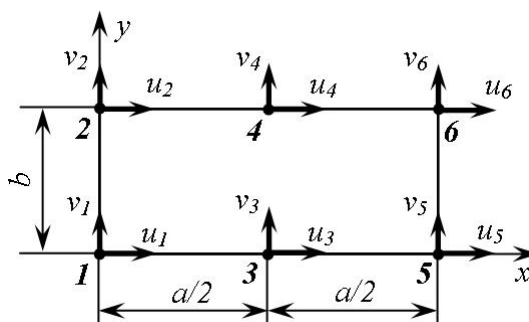


Рис. 2. Шестивузловий скінченний елемент

Фізичні залежності для плоского напруженого стану записані у просторі перетворень Фур'є [6; 7]:

$$\sigma = C(i\omega) \varepsilon. \quad (1)$$

де  $\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$  – зображення вектора напружень у просторі перетворень Фур'є;

$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$  – зображення вектора деформацій;

$C(i\omega)$  – матриця комплексних модулів:

$$C(i\omega) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Компоненти  $C_{ij}$  матриці  $C(i\omega)$  для ізотропного в'язкопружного матеріалу можна визначити, маючи експериментальні дані щодо комплексних модулів при розтягу-стиску  $E$  і зсуві  $G$

$$C_{11} = \frac{4G^2}{4G - E}, \quad C_{22} = C_{11}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{2EG^2 - 4G^2}{4G - E}, \quad (3)$$

$$C_{33} = G, \quad C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = 0.$$

Оскільки модулі  $G$  і  $E$  залежать від частоти, коефіцієнти  $C_{ij}$  також є функціями частоти.

Матриці мас, жорсткості та демпфірування визначаються за формулами:

$$M = h \int_0^a \int_0^b N^T \rho N dy dx, \quad K' = h \int_0^a \int_0^b (AN)^T C'(\omega) AN dy dx, \quad K'' = h \int_0^a \int_0^b (AN)^T C''(\omega) AN dy dx, \quad (4)$$

де  $h$  – товщина елемента;

$C'(\omega), C''(\omega)$  – дійсна й уявна частини матриці  $C(i\omega)$ ;

$N$  – функції інтерполяції, які для шестивузлового елемента мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left(1 - 3\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right), & N_2 &= \frac{y}{h} \left(1 - 3\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right), \\ N_3 &= \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left(4\frac{x}{l} - 4\frac{x^2}{l^2}\right), & N_4 &= \frac{y}{h} \left(4\frac{x}{l} - 4\frac{x^2}{l^2}\right), \\ N_5 &= \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left(-\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right), & N_6 &= \frac{y}{h} \left(-\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Матриця динамічної жорсткості елемента:

$$Z(i\omega) = (i\omega)^2 M + K'(\omega) + iK''(\omega). \quad (6)$$

Для синтезу динамічної матриці жорсткості балки використовувалася стандартна методика [8; 9] з урахуванням комплексних значень компонент матриць.

Скінченно-елементна модель стержня у просторі перетворень Фур'є описується рівнянням [7]

$$Z(i\omega)q = F(i\omega), \quad (7)$$

де  $F(i\omega)$  – інтегральне перетворення Фур'є зовнішнього навантаження;  $q$  – переміщення узагальнених координат конструкції;  $Z(i\omega) = K(i\omega) + (i\omega)^2 M$  – загальна динамічна матриця жорсткості конструкції;  $K(i\omega)$  – комплексна матриця жорсткості, яка залежить від ефективних комплексних модулів матеріалу;  $M$  – матриця мас;  $\omega$  – частота коливань;  $i = \sqrt{-1}$ .

Після розв'язання задачі на власні значення

$$|Z(i\omega)| = 0 \quad (8)$$

декремент визначається за формулою

$$\Delta = 2\pi \frac{\omega_k''}{\omega_k'}, \quad (9)$$

де  $\omega_k'$ ,  $\omega_k''$  – відповідно дійсна й уявна частота на  $k$ -й формі коливань.

Побудована скінченно-елементна модель дозволяє розглянути різні варіанти розміщення демпфіруючого матеріалу. Зокрема, це може бути балка із середнім демпфіруючим шаром, балка з окремими демпфіруючими елементами тощо.

### Приклади оптимізації.

1. Розглянемо задачу топологічної оптимізації стержня з двошаровим покриттям з розділенням на 15 скінченних елементів по довжині стержня (рис. 1). Скінченно-елементну модель стержня показано на рисунку 3.

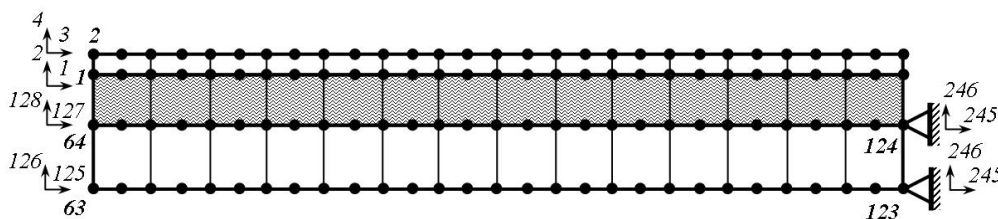


Рис. 3. Скінченно-елементна модель жорстко закріпленого стержня з двошаровим покриттям

Вважаємо, що товщину несучого шару і товщини шарів покриття задано, необхідно знайти оптимальне розміщення елементів жорсткого верхнього шару. Відомо, що максимальні деформації зсуву виникають поблизу торців елементів верхнього шару, тобто максимального демпфірування можна досягнути, моделюючи суцільне покриття кусково-неперервним.

Значення комплексних модулів матеріалів приймали такими:

– для матеріалу несучого шару  $E_1 = 6,71 \cdot 10^{10} \cdot \left(1 + i \frac{0,01}{\pi}\right) \text{Па}$ ;

– для матеріалу прошарку  $E_2 = 6,71 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + i \frac{0,4}{\pi}\right) \text{Па}$ .

Густини матеріалів  $\rho_1 = 2,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  для матеріалу несучого шару і  $\rho_2 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  для матеріалу прошарку.

Коефіцієнти Пуассона  $\nu_1 = 0,3$ ;  $\nu_2 = 0,4$ .

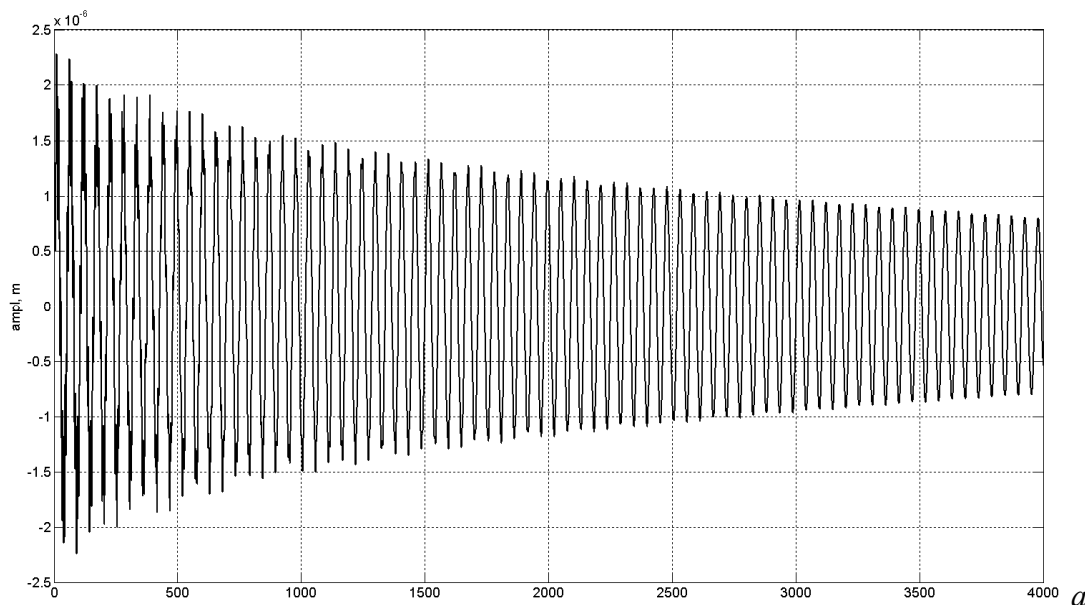
Довжина скінченного елемента  $a_1 = 0,1 \text{ м}$ .

Товщини шарів:  $b_1 = 0,001 \text{ м}$ ,  $b_2 = 0,005 \text{ м}$ ,  $b_3 = 0,02 \text{ м}$ .

Наявність або відсутність елемента покриття з прошарком позначали 1 або 0.

При аналізі граничних значень структури стержня – при відсутності покриття  $x = [0000000000000000]$  та наявності усіх елементів  $x = [1111111111111111]$  – одержали такі результати: у першому випадку декремент коливань  $\delta_1 = 0,0114$  і швидкість затухання коливань (добуток декремента на частоту)  $\delta\omega = 0,5460$ , у другому  $\delta_1 = 0,0584$  та  $\delta\omega = 2,7700$ .

На рисунку 4, а, б показано осцилограми коливань стержня при граничних варіантах структури.



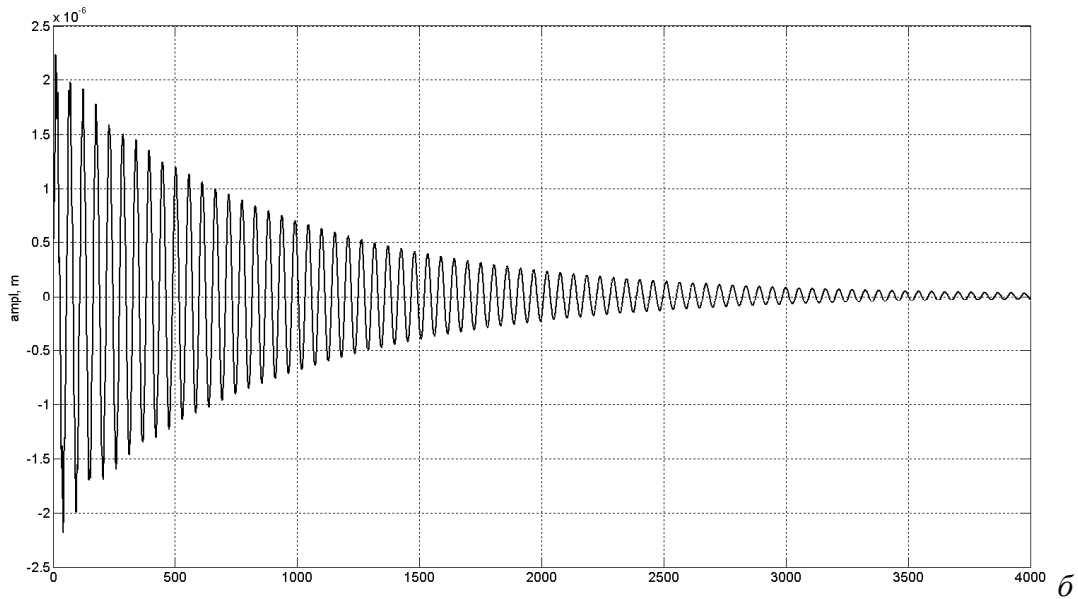


Рис. 4. Осцилограми коливань тришарового стержня при варіантах структури:

$a - x = [0000000000000000]$ ;  $b - x = [1111111111111111]$

Задача оптимізації полягає у виборі розміщення елементів покриття з демпфіруючим прошарком за критеріями максимального демпфірування та максимальної швидкості затухання коливань з урахуванням обмежень на масу. У такому випадку використано класичний алгоритм генетичного методу з двійковим кодуванням [4].

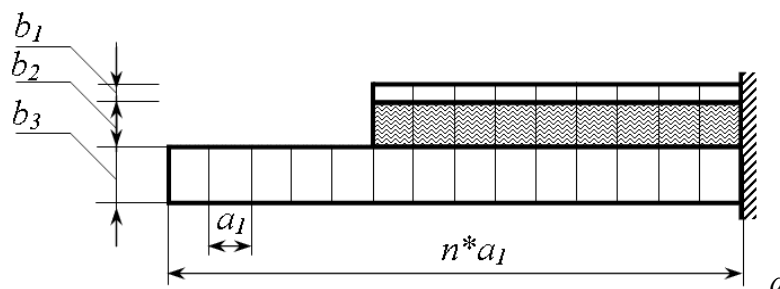
Результати оптимізації наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Результати оптимізації стержня з двошаровим покриттям за критерієм максимальної швидкості затухання коливань з урахуванням обмежень на масу

Обмеження на масу покриття, $mas\_pokr \leq mas\_beam / k$	Швидкість затухання коливань, $dekr \cdot om$	Декремент коливань, $dekr$	Перша частота, $om$	Вектор проектних параметрів, $x$
$k = 1 \div 9$	3,1166	0,0625	49,8270	[0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
$k = 10$	3,0679	0,0616	49,8413	[0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
$k = 12$	2,9174	0,0587	49,7144	[0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
$k = 13$	2,6480	0,0535	49,4741	[0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
$k = 15$	2,2641	0,0461	49,1596	[0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1]
$k = 18$	1,7995	0,0367	48,8184	[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1]

Для перевірки розв'язано задачу оптимального розміщення шарів без урахування обмежень на масу. Результат розв'язання задачі оптимізації  $dekr \cdot om = 3,1166$  співпадає з одержаним результатом при обмеженнях на масу покриття до  $k = 9$ . Структуру оптимального стержня та осцилограму коливань показано на рисунку 5, а, б.



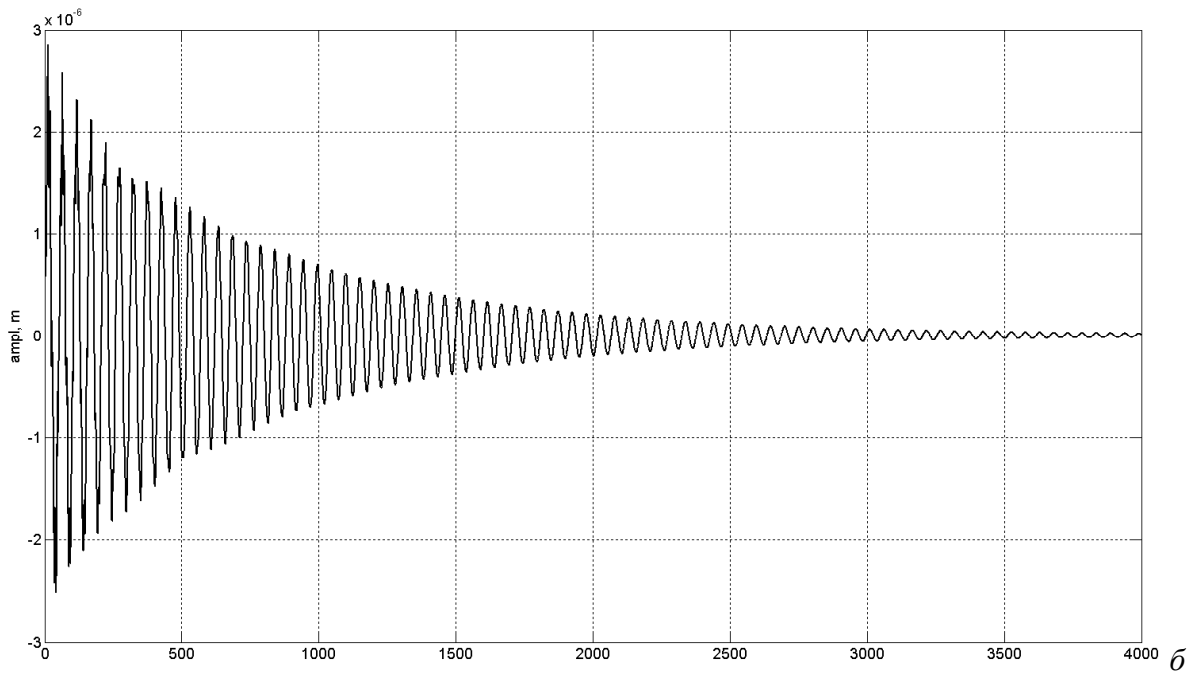


Рис. 5. Структура оптимального жорстко закріпленого стержня з двошаровим покриттям за критерієм максимальної швидкості затухання (а); осцилограма коливань для оптимального стержня (б)

Аналогічну задачу оптимізації за критерієм максимальної швидкості затухання коливань розв'язано для шарнірно закріпленого стержня. Скінченно-елементну модель показано на рисунку б.

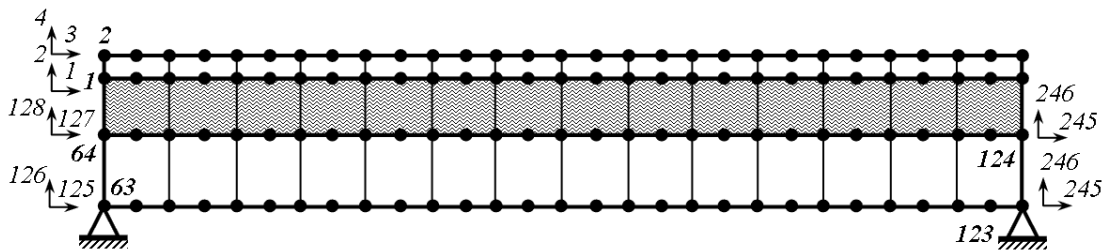
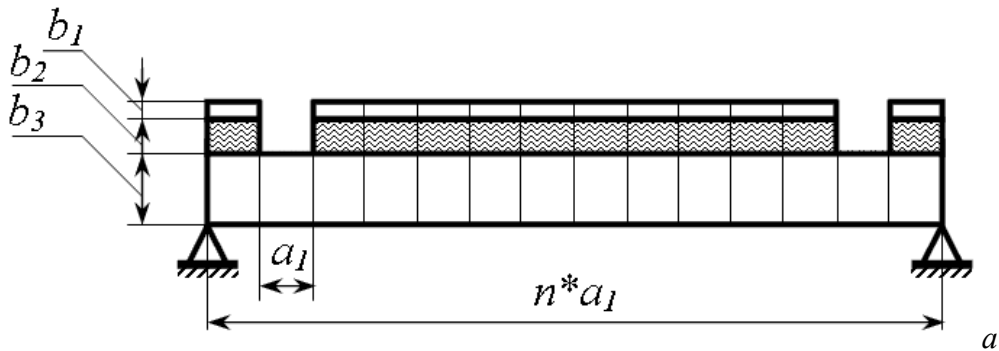


Рис. 6. Скінченно-елементна модель шарнірно закріпленого стержня з двошаровим покриттям

Оптимальну структуру стержня і осцилограму коливань показано на рисунку 7, а, б. Швидкість затухання коливань для оптимального проекту складає  $dekr \cdot \omega t = 12,8852$ , декремент коливань  $dekr = 0,0651$ , перша частота  $\omega t = 198,0732$ .



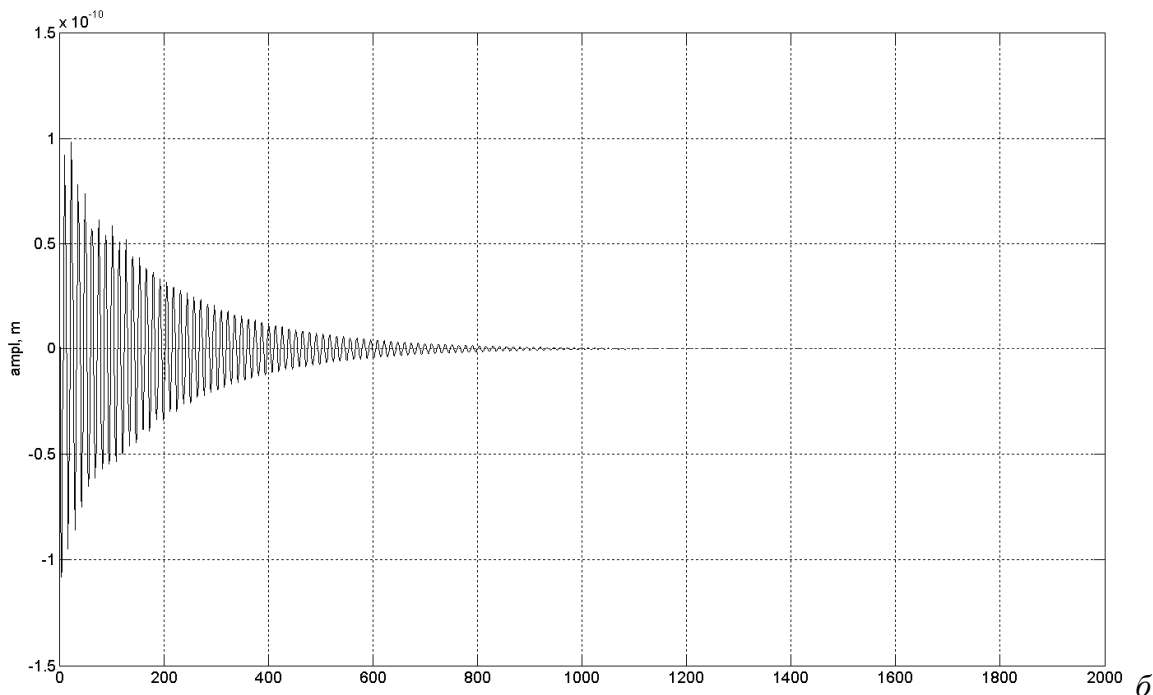


Рис. 7. Структура оптимального шарнірно закріпленого стержня з двошаровим покриттям за критерієм максимальної швидкості затухання (а); осцилограма коливань для оптимального стержня (б)

Як видно з розв'язання задачі, програма оптимізації з використанням генетичного алгоритму дає можливість одержати оптимальний проект структури стержня і таким чином забезпечити екстремальне значення критерію оптимізації.

2. Розглянемо порівняння оптимальних проектів стержня з нерозрізним (рис. 3) і розрізним (рис. 8) покриттями за критерієм максимального декремента коливань. Проектними параметрами вибиралися товщини двох шарів покриття і дійсні та уявні частини комплексних модулів матеріалів жорсткого і демпфіруючого матеріалів.

Скінченно-елементну модель стержня з розрізним покриттям показано на рисунку 9.

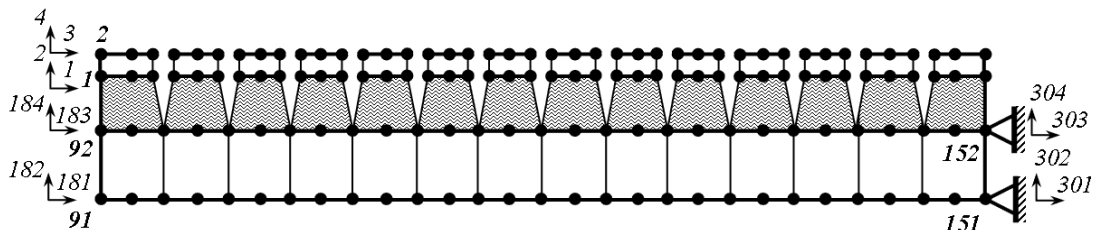


Рис. 8. Скінченно-елементна схема стержня з розрізним покриттям

Початкові характеристики стержня приймалися такими:

Значення комплексних модулів матеріалів:

$$- \text{для матеріалу несучого шару } E_1 = 6,71 \cdot 10^{10} \cdot \left(1 + i \frac{d_1}{\pi}\right) \cdot e_1 \text{ Па};$$

$$- \text{для матеріалу прошарку } E_2 = 6,71 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + i \frac{d_2}{\pi}\right) \cdot e_2 \text{ Па},$$

де  $d_1, e_1, d_2, e_2$  – компоненти вектора проектних параметрів, які визначають демпфіруючі властивості матеріалів.

Густини матеріалів  $g_1 = 2,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  для матеріалу несучого шару і  $g_2 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  для матеріалу прошарку.

Коефіцієнти Пуассона  $\nu_1 = 0,3$ ;  $\nu_2 = 0,4$ .

Довжина скінченого елемента  $a_1 = 0,1$  м.

Вектор проектних параметрів прийнято у вигляді  $x = [b_1 \ b_2 \ e_1 \ d_1 \ e_2 \ d_2]$ , де  $b_1, b_2$  – товщини відповідно верхнього підкріплюючого і середнього демпфіруючого шару,  $d_1, e_1, d_2, e_2$  – характеристики матеріалів шарів.

Обмеження на проектні параметри приймалися такими:

$$lb = [0,0001 \ 0,005 \ 0,001 \ 0,01 \ 0,001 \ 0,1];$$

$$ub = [0,005 \ 0,01 \ 1 \ 0,1 \ 1 \ 0,4].$$

Для розв’язання задачі оптимізації використано алгоритм Real-coded GA [1].

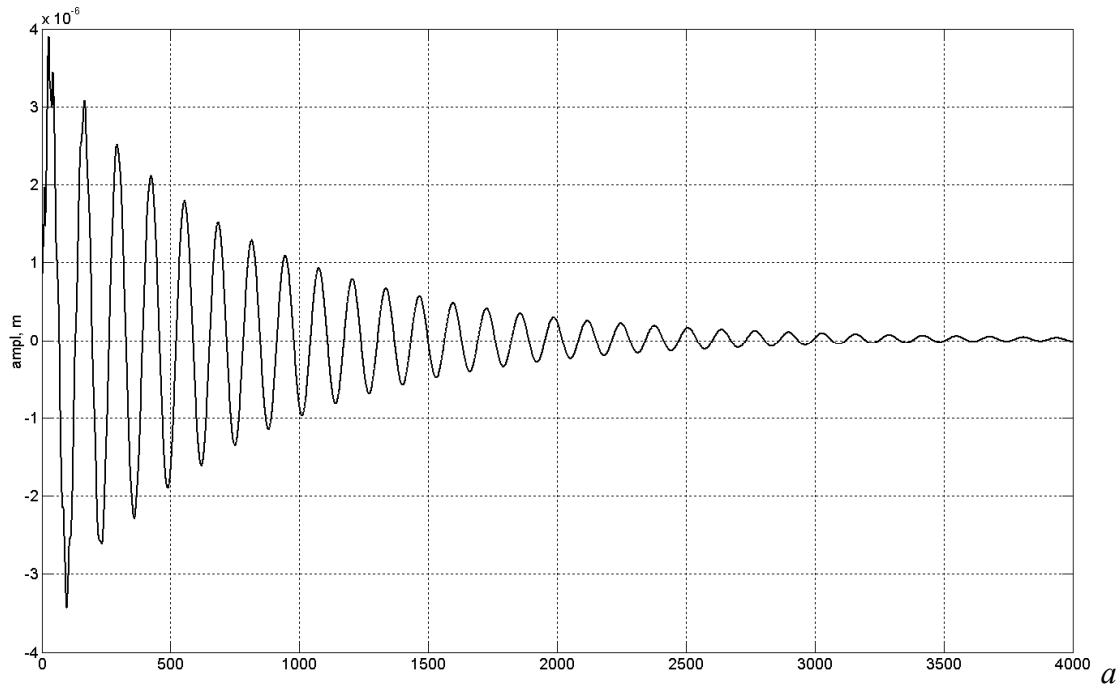
Результати оптимізації показано в таблиці 2.

Таблиця 2

*Результати розв’язання задачі оптимізації для стержня з нерозрізним і розрізним покриттями*

Вид покриття	Вектор проектних параметрів, $x = [b_1 \ b_2 \ e_1 \ d_1 \ e_2 \ d_2]$						Декремент коливаль, $\delta$	Швидкість затухання коливаль, $\delta \cdot \omega$
Нерозрізне	0,0050	0,0100	0,1316	0,1000	1,0000	0,4000	0,1670	3,3016
Розрізне	0,0050	0,0100	0,3219	0,1000	1,0000	0,4000	0,2615	10,4798

Осцилограми коливаль для двох видів покриття показано на рисунку 9.





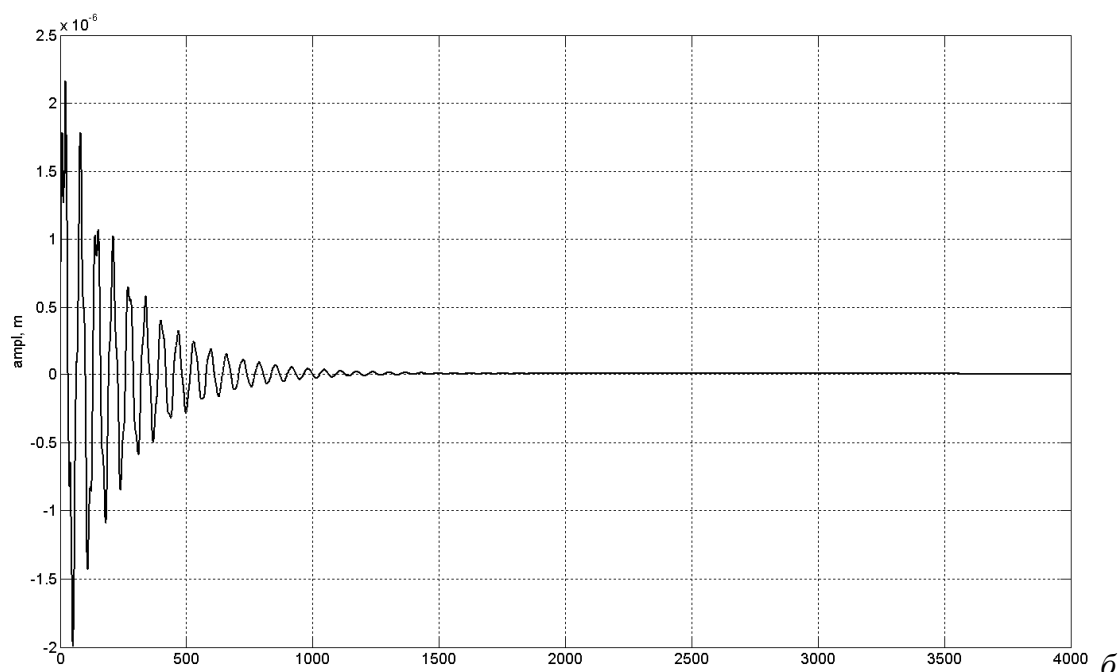


Рис. 9. Осцилограми коливань для стержнів: а – з нерозрізним покриттям; б – з розрізним покриттям

**Висновки.** Представлені приклади показують, що програми оптимізації на основі генетичних алгоритмів можна використовувати для розв'язання задач топологічної оптимізації стержнів та більш складних багат шарових конструкцій з в'язкопружних матеріалів. Розроблену методику можна використати для визначення оптимального розміщення пасивних демпфіруючих елементів одночасно з параметричною оптимізацією.

#### Список використаних джерел

1. Савченко О. В. Метод пошуку глобального екстремуму в задачах оптимізації конструкцій з композиційних матеріалів / О. В. Савченко, І. О. Савченко // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. – Чернігів: ЧДТУ, 2009. – № 36. – С. 72-81.
2. Дубенець В. Г. Задачі глобальної оптимізації багат шарових оболонок із максимальним демпфіруванням матеріалів / В. Г. Дубенець, О. В. Савченко // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: зб. наук. праць. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2011. – № 45. – С. 48-55.
3. Савченко О. В. Еволюційні алгоритми глобальної оптимізації композитних оболонок за критерієм максимального демпфірування / О. В. Савченко // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. – Чернігів: ЧДТУ, 2011. – №. 54. – С. 6-12.
4. Гладков Л. А. Генетические алгоритмы / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик; под ред. В. М. Курейчика. – 2-е изд., испр. и дополн. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 320 с.
5. Randy L. Haupt, Sue Ellen Haupt. Practical Genetic Algorithms: second edition / Wiley-Interscience, 2004. – J. Wiley & Sons. – 253 p.
6. Дубенець В. Г. Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенець, В. В. Хильчевский. – К.: Вища школа, 1995. – 226 с.
7. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций: монография / Е. В. Савченко. – Нежин: Аспект-Поліграф, 2006. – 232 с.
8. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
9. Метод конечных элементов в механике твердых тел / под общ. ред. А. С. Сахарова, И. Альтенбаха. – К.: Вища школа, 1982. – 479 с.