

УДК 539.3:534.1

А.С. Ігнатенко, асистент

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЇ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ НА ДІЮ ТЕПЛОВИХ ІМПУЛЬСІВ**А.С. Игнатенко**, ассистент

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ НА ДЕЙСТВИЕ ТЕПЛОВЫХ ИМПУЛЬСОВ**Andrii Ihnatenko**, assistant

Chernihiv National Technological University, Chernihiv, Ukraine

METHOD FOR DETERMINING OF VISCOELASTIC STRUCTURE REACTION TO THERMAL IMPULSES

Показано можливість використання методу скінченно-елементного моделювання у просторі інтегральних перетворень Фур'є для визначення реакції тонкостінних конструкцій із в'язкопружних матеріалів на дію теплових імпульсів.

Ключові слова: в'язкопружні матеріали, нестационарні коливання, імпульс температури.

Показана возможность использования метода конечно-элементного моделирования в пространстве преобразований Фурье для определения реакции тонкостенных конструкций из вязкоупругих материалов при действии тепловых импульсов.

Ключевые слова: вязкоупругие материалы, нестационарные колебания, импульс температуры.

A method of finite-element modeling in Fourier transform space for determining of thin viscoelastic structures reaction to thermal impulses is considered.

Key words: viscoelastic materials, non-stationary vibrations, thermal impulses.

Вступ. Динамічні ефекти під час дії нестационарних теплових навантажень привертають увагу вчених уже декілька десятиріч. З часу першої публікації В.І. Кублановської (1950 р.) за цією тематикою було опубліковано деякі фундаментальні монографії і величезна кількість статей. Вичерпний аналіз публікацій з цієї проблеми наведено в огляді [1]. У зв'язку з широким використанням конструкцій із в'язкопружних матеріалів, виникають нові завдання, які потребують дослідження. До них, зокрема, відносяться завдання визначення реакції в'язкопружних конструкцій на дію нестационарних теплових навантажень.

У цій роботі пропонується метод визначення реакції елементів конструкцій із в'язкопружного матеріалу на дію короткочасного теплового імпульсу. Для вирішення завдання використовується метод скінченно-елементного моделювання у просторі інтегральних перетворень Фур'є [2]. Метод дає можливість використати експериментальні дані про властивості в'язкопружних матеріалів, зокрема частотно-залежні комплексні модулі, і врахувати демпфірування коливань. Розглядається незв'язана задача, тобто не враховується залежність механічних властивостей матеріалу від температури.

Метод розрахунку. Короткочасні температурні збурення приводять до нерівномірного розподілення температури за об'ємом і появою напружень, обумовлених нерівномірною тепловою деформацією. Задачі розподілення температур і напружень у конструкціях із в'язкопружних матеріалів розглядаються у теорії термов'язкопружності. Фізичні рівняння зв'язаної лінійної теорії в'язкопружності мають вигляд [3]

$$\sigma = \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_0^t \varphi(t-\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

$$k^T \theta'' = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t m(t-\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

де $G(t-\tau)$, $\varphi(t-\tau)$, $m(t-\tau)$ – матриці функцій релаксації, σ, ε – вектори напружень і деформацій, θ – приріст температури, k, θ'' – вектори коефіцієнтів теплопровідності і других похідних від температури відносно координат x, y .

Рівняння рівноваги (динаміки) і геометричні рівняння не відрізняються від таких для пружних матеріалів, тільки вектор деформацій доповнюється компонентами, які пов'язані зі зміною температури:

$$\varepsilon_0 = (\alpha\theta \ \alpha\theta \ \alpha\theta \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (3)$$

де α – коефіцієнт температурного розширення.

Якщо нехтувати другими доданками у правих частинах наведених вище двох рівнянь, рівняння стають незалежними. Тоді, визначивши температурне поле як функцію координат і часу, можна знайти розподілення напружень за об'ємом тіла.

Рівняння в'язкопружності (1) і нестационарної теплопровідності (2) можна записати у просторі інтегральних перетворень Фур'є:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C}(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_0), \quad \tilde{k}^T \tilde{\theta}'' = \tilde{\lambda} \tilde{\theta}, \quad (\tilde{\lambda} = i\omega \tilde{m}), \quad (4)$$

де \tilde{C}, \tilde{m} – матриці комплексних модулів, які є результатом інтегрального перетворення Фур'є інтегральних залежностей (1), (2) при нехтуванні зв'язуючими доданками, ω – частота.

Знайшовши розв'язок відносно зображення температури з другого рівняння (4), можна визначити зображення напружень з урахуванням першого рівняння (4).

Під час використання методу скінченних елементів усі розрахунки відносно зображень температури, деформацій, напружень доцільно виконувати у просторі перетворень Фур'є і тільки на останньому етапі переходити до часового простору.

Скінченно-елементний варіант рівняння нестационарної теплопровідності можна одержати в результаті мінімізації відповідного функціонала [4, с. 202] і переходу до простору інтегральних перетворень Фур'є:

$$i\omega \tilde{C}_\theta \tilde{\theta} + K_\theta \tilde{\theta} + \tilde{F}_\theta = 0, \quad (5)$$

де матриці $\tilde{C}, \tilde{K}, \tilde{F}$ визначаються інтегралами

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\theta &= \int_V \tilde{\lambda} N^T N dV, \quad K_\theta = \int_V B^T D B dV + \int_{S2} h N^T N dS, \\ \tilde{F}_\theta &= - \int_V Q N^T dV + \int_{S1} q N^T dS - \int_{S2} h \theta_\infty N^T dS. \end{aligned} \quad (6)$$

(\tilde{h} – зображення Фур'є коефіцієнта теплообміну, θ_∞ – температура навколишнього середовища, \tilde{Q} – внутрішні джерела тепла, \tilde{q} – потік тепла, $\tilde{\lambda} = \tilde{c}\rho$).

Знайдені у результаті розв'язання рівняння (5) значення зображень вузлових температур можна використати для визначення поля вузлових температур у часовому просторі, а за необхідності визначення полів переміщень, деформацій і напружень використати як вузлові навантаження механічної скінченно-елементної моделі безпосередньо у просторі перетворень Фур'є, одержавши після застосування швидкого перетворення Фур'є переміщення, напруження і деформації у часовому просторі.

Запишемо рівняння варіаційного принципу Лагранжа у частотному просторі з урахуванням доданка з температурними деформаціями:

$$\int_V \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{C} \tilde{\varepsilon} dV = (i\omega)^2 \int_V \delta \tilde{u}^T \rho \tilde{u} dV + \int_S \delta \tilde{u}^T \tilde{q} dS + \int_V \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{C} \tilde{\varepsilon}_0 dV. \quad (7)$$

За наявності тільки неоднорідного температурного поля та інерційних сил рівняння матиме вигляд

$$\int_V \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{C} \tilde{\epsilon} dV + (i\omega)^2 \int_V \delta \tilde{u} \tilde{\rho} \tilde{u} dV = \int_V \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{C} \tilde{\epsilon}_0 dV. \quad (8)$$

Використовуючи далі скінченно-елементні співвідношення для апроксимації деформацій і переміщень вузловими переміщеннями $\tilde{\epsilon} = AN\tilde{q}$, одержимо

$$Z(i\omega)\tilde{q} = \tilde{F}_\theta, \quad (9)$$

де $Z(i\omega)$ – комплексна матриця жорсткості, \tilde{q} – зображення узагальнених переміщень вузлів скінченно-елементної моделі, \tilde{F}_θ – вузлові навантаження, пов'язані з наявністю температурного поля:

$$\tilde{F}_\theta = \int_V (AN)^T \tilde{C} \tilde{\epsilon}_0 dV. \quad (10)$$

Значення інтеграла \tilde{F}_θ одержується у результаті визначення температурного поля.

Приклад розрахунку. Розглянемо приклад розрахунку напружень і переміщень у перерізах стержня при дії імпульсу температури у крайньому лівому перерізі (рис. 1).

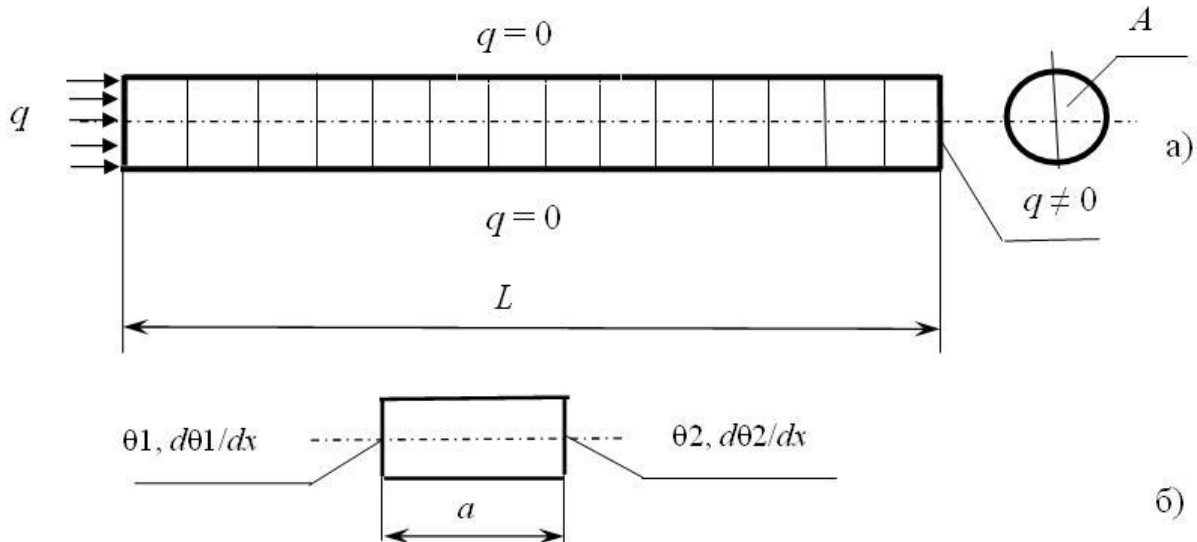


Рис.1. Схема теплового навантаження (а) і скінченний елемент стержня (б)

Вхідні параметри для стержня: модуль пружності матеріалу $\tilde{E} = 10^4 (1 + i \cdot 0,1) \text{ кН} / \text{см}^2$, коефіцієнт теплообміну $h = 10 \text{ Вт} / (\text{см}^2 \cdot \text{К})$, питома теплоємність $\tilde{\lambda} = 15 (1 + i \cdot 0,1) \text{ Дж} / (\text{см} \cdot \text{К})$, коефіцієнт теплопровідності $kx = 72 \text{ Вт} / (\text{см} \cdot \text{К})$, коефіцієнт теплового розширення $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$, густина матеріалу $\rho = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{см}^3$, площа поперечного перерізу стержня $A = 2 \text{ см}^2$, довжина скінченного елемента: $a = 1,5 \text{ см}$, кількість скінченних елементів $j = 50$, максимум імпульсу температури $T_{\text{max}} = 1000 \text{ град}$, час вимірювання процесу $TT = 1,2 \text{ с}$, кількість поділок часового інтервалу $N = 4096$.

Синтез матриць для скінченно-елементної моделі конструкції проводиться традиційним способом [4].

Для побудови матриці жорсткості скінченного елемента використаємо функції інтеполяції Ерміта:

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, N_2 = x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}, N_3 = 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, N_4 = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}. \quad (11)$$

Матриця жорсткості елемента має вигляд

$$K_{el} = \frac{\tilde{E}A}{30a} \begin{bmatrix} 36 & 3a & -36 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & -a^2 \\ -36 & -3a & 36 & -3a \\ 3a & -a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Матриця мас:

$$M_{el} = \rho A \begin{bmatrix} \frac{13a}{35} & \frac{11a^2}{210} & \frac{9a}{70} & \frac{13a^2}{420} \\ \frac{11a^2}{210} & \frac{a^3}{105} & \frac{13a^2}{420} & \frac{-a^3}{140} \\ \frac{9a}{70} & \frac{13a^2}{420} & \frac{13a}{35} & \frac{-11a^2}{210} \\ \frac{13a^2}{420} & \frac{-a^3}{140} & \frac{-11a^2}{210} & \frac{a^3}{105} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Матриця теплоємності:

$$\tilde{C}_{el} = \tilde{\lambda} A \begin{bmatrix} \frac{13a}{35} & \frac{11a^2}{210} & \frac{9a}{70} & \frac{13a^2}{420} \\ \frac{11a^2}{210} & \frac{a^3}{105} & \frac{13a^2}{420} & \frac{-a^3}{140} \\ \frac{9a}{70} & \frac{13a^2}{420} & \frac{13a}{35} & \frac{-11a^2}{210} \\ \frac{13a^2}{420} & \frac{-a^3}{140} & \frac{-11a^2}{210} & \frac{a^3}{105} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Матриця теплопровідності:

$$K_{x_{el}} = k_x A \begin{bmatrix} \frac{6}{5a} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2a}{15} & \frac{-1}{10} & \frac{-a}{30} \\ \frac{-6}{5a} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{5a} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-a}{30} & \frac{-a}{30} & \frac{-1}{10} & \frac{2a}{15} \end{bmatrix} + Ah \begin{bmatrix} \frac{13a}{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Матриця теплового навантаження:

$$F_h = hA\theta_{\max} \begin{bmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Форма теплового навантаження на торець стрижня (рис. 2):

$$F1(s) = \sin\left(\pi \cdot \frac{s}{T1 \cdot 2}\right) \cdot h \cdot T_{\max} \cdot A \cdot \frac{a_{20}}{2},$$

$$T1 = 0,01 \text{ c}, \quad T_{\max} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}.$$

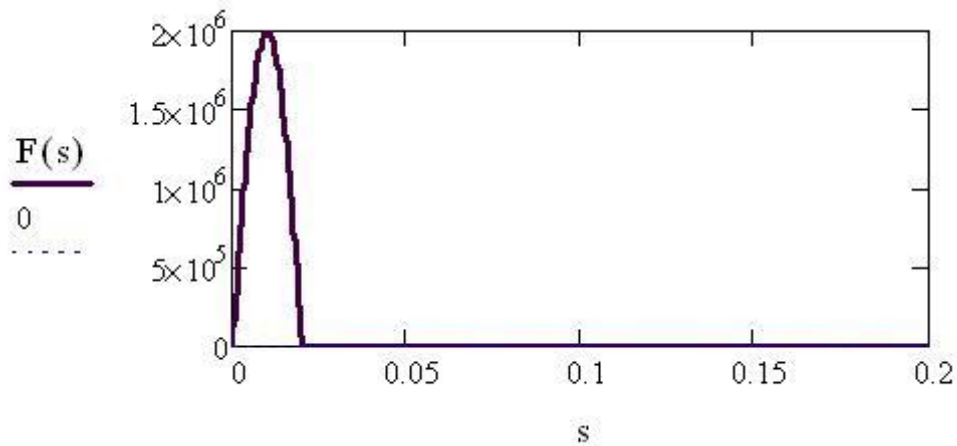


Рис. 2. Форма теплового імпульсу

Після прямого перетворення Фур'є теплового навантаження і підстановки у рівняння нестационарного нагріву (5) одержимо рівняння для визначення зображень температурного поля у вузлових точках стержня.

$$\tilde{\theta} = (i\omega \tilde{C}_\theta + K_\theta)^{-1} \tilde{F}_\theta. \quad (17)$$

Застосовуючи до одержаного розв'язку операцію оберненого перетворення Фур'є, одержимо розподілення температури у перерізах стержня залежно від часу (рис. 3).

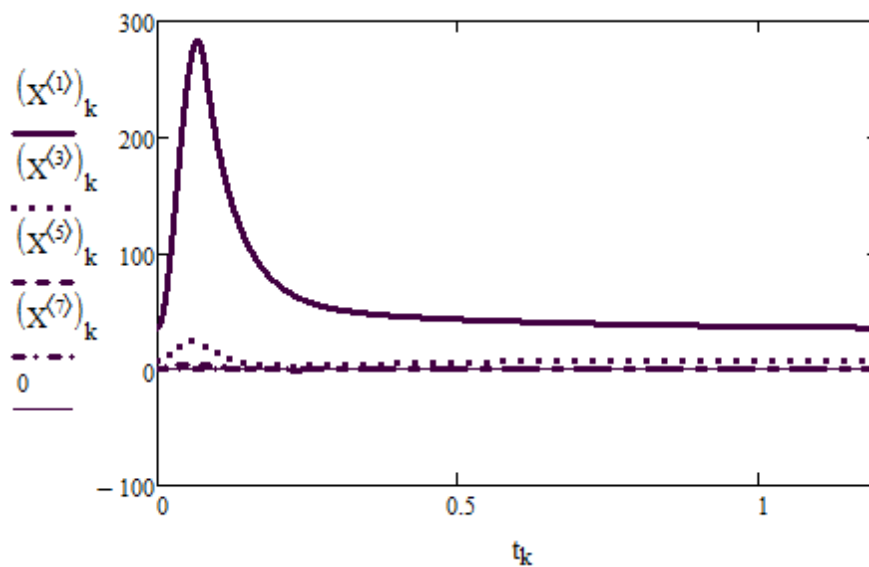


Рис. 3. Розподілення температури у 1, 3, 5, 7 перерізах у початкові моменти часу

Силкові навантаження, які виникають при цьому, пов'язані з появою температурних деформацій, знаходимо за формулою

$$\tilde{F}_\theta = \int_V (AN)^T \tilde{C}(i\omega) \varepsilon_0 dV \quad (18)$$

після підстановки деформації ε_0 як функції температури у кожному елементі та інтегрування за об'ємом кожного елемента.

Якщо кінцевою метою є визначення переміщень і сил у поперечних перерізах стрижня, далі використовується скінченно-елементна модель стержня, побудована під час аналізу теплового поля у просторі інтегральних перетворень Фур'є за звичною методикою МСЕ, тобто складаються глобальні матриці жорсткості та мас, і шукається розв'язок рівняння

$$(\tilde{K}(i\omega) - (i\omega)^2 M)\tilde{q} = \tilde{F}_0, \quad (19)$$

після чого за допомогою швидкого перетворення Фур'є визначаються вузлові сили і переміщення.

Нижче на рис. 4 наведено результати розрахунку поздовжніх переміщень декількох перших перерізів стрижня залежно від часу.

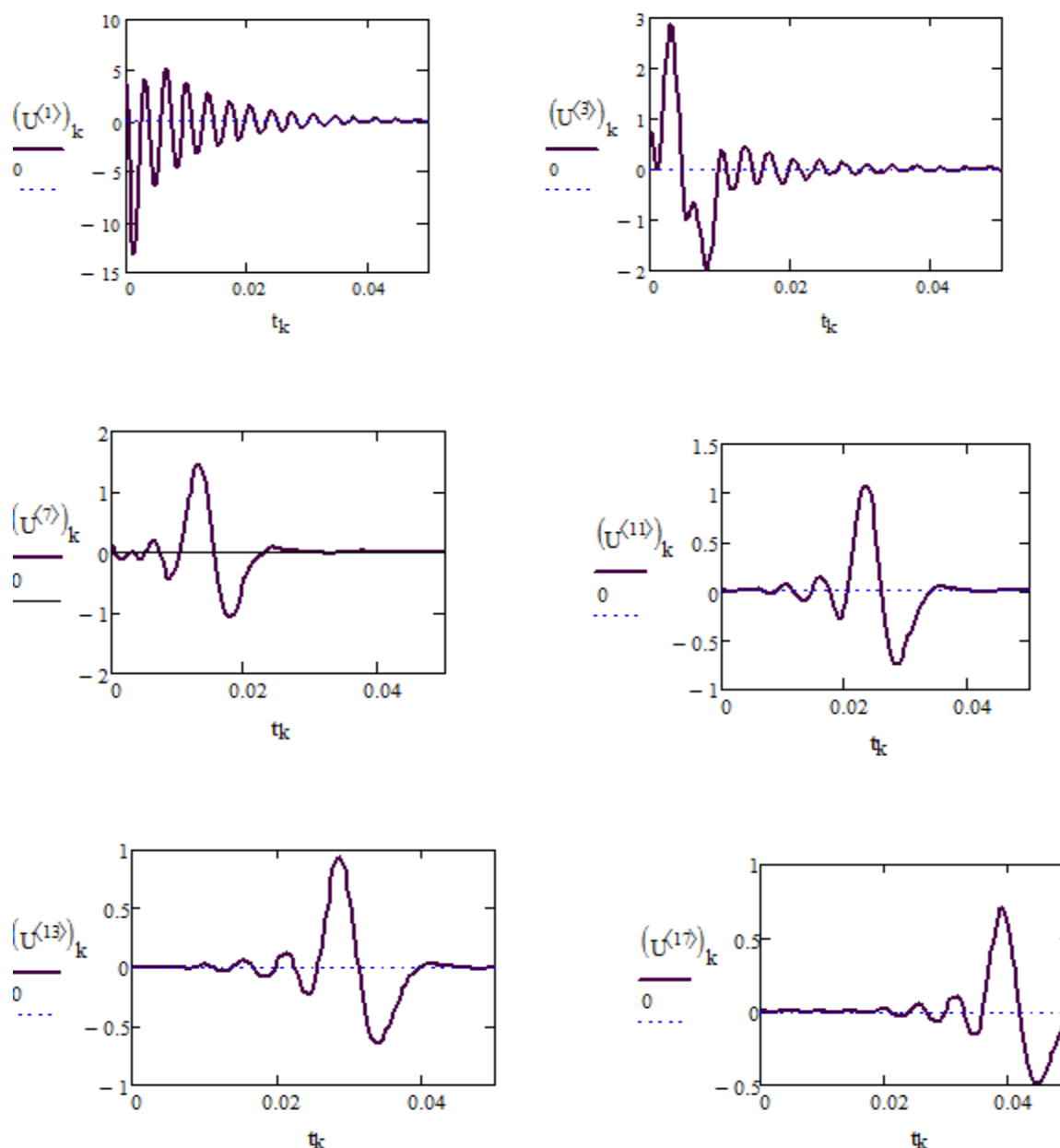


Рис. 4. Осцилограми поздовжніх переміщень 1, 3, 7, 11, 13, 17 перерізів

Як видно з осцилограм, під час прикладення теплового імпульсу відбувається хвильове переміщення перерізів з одночасним затуханням величини імпульсу при проходженні по стержню.

Висновки. Наведений приклад показує можливість аналізу за допомогою запропонованого методу переміщень і зусиль, пов'язаних із дією короткочасних температурних імпульсів. Можливо, що наведену методiku можна застосувати і у випадках складного напруженого стану, зокрема для тонкостінних елементів конструкцій.

Алгоритм розрахунку в'язкопружних конструкцій на короткочасне теплове навантаження (тепловий удар) складається з таких кроків:

- побудова скінченно-елементної моделі конструкції для визначення нестационарного поля температур у просторі інтегральних перетворень Фур'є;
- визначення зображень температур у вузлових точках скінченно-елементної моделі;
- визначення зображень навантажень, пов'язаних з температурами у вузлових точках скінченно-елементної моделі;
- розв'язання задачі визначення зображень переміщень у вузлових точках скінченно-елементної моделі;
- визначення переміщень і зусиль у вузлових точках завдяки застосуванню оберненого чисельного перетворення Фур'є;
- за необхідності після другого етапу за допомогою оберненого перетворення Фур'є можна визначити розподілення температур.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В. Г. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов (обзор) / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок // Прикл. механика. – 2000. – № 2. – С. 39–63.
2. Дубенец В. Г. Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенец, В. В. Хильчевский. – К. : Вища школа, 1995. – Т. 1. – 210 с.
3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М. : Мир, 1974. – 338 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

УДК 685.34.05

Д.А. Макатьора, асистент

І.В. Панасюк, д-р техн. наук

Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ ПОГОННОГО ЗУСИЛЛЯ РІЗАННЯ МОНОЛІТНОЇ ГУМИ НОЖЕМ З ОДНОСТОРОННЬОЮ ЗАТОЧКОЮ

Д.А. Макатёра, асистент

И.В. Панасюк, д-р техн. наук

Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГОННОГО УСИЛИЯ РЕЗАНИЯ МОНОЛИТНОЙ РЕЗИНЫ НОЖОМ С ОДНОСТОРОННЕЙ ЗАТОЧКОЙ

Dmytro Makatora, assistant

Ihor Panasyuk, Doctor of Technical Sciences

Kyiv National University of Technological and Design, Kyiv, Ukraine

DETERMINATION OF LINEAR FORCE OF MONOLITHIC RUBBER CUTTING BY THE KNIFE WITH ONE-SIDED GRINDING

Метою цього дослідження є розроблення більш простого та ефективного методу аналізу впливу величини зазору між валиками і величиною відстані від вертикальної осі обертання валиків до кромки леза ножа на погонне зусилля різання монолітної гуми за допомогою використання рівнянь регресії. Дослідження проведені на прикладі експериментальної установки машини для позадвожнього різання при використанні ножа з односторонньою заточкою. Одержані рівняння регресії описують сумарну величину втрат при позадвожньому різанні матеріалу та величину втрат на тертя матеріалу об грані нерухомого ножа з односторонньою заточкою.

Ключові слова: погонне зусилля, сумарна величина втрат, втрати на тертя матеріалу, валики, кромка леза ножа.