УДК 621.314 Ревко А.С., асистент

## ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ЕЛЕКТРОПРИВОДА З КВАЗІРЕЗОНАНСНИМ ІМПУЛЬСНИМ ПЕРЕТВОРЮВАЧЕМ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЗИЦІЮВАННЯ

Актуальною проблемою є покращення якісних показників систем електропривода апаратури точного магнітного запису (АТМЗ), а саме збільшення швидкодії та точності, зменшення пульсацій швидкості, покращення масо-габаритних показників, зменшення рівня високочастотних електромагнітних завад, що генеруються в мережу живлення та випромінюються в навколишнє середовище. В електроприводах ATM3 в переважній більшості використовують різноманітні двигуни постійного струму (ДПС) (лінійні, крокові, колекторні та безколекторні і т. ін.), які живлять від імпульсних перетворювачів з широтно-імпульсною модуляцією (ШІМ). Це системи позиціювання магнітних голівок, стабілізації частоти обертання магнітного диску, стабілізації швидкості транспортування магнітного носія та ін. Застосування квазірезонансних імпульсних перетворювачів (КРІП), що працюють з високою частотою перемикання силового ключа (одиниці мегагерц), дозволить отримувати більш якісні показники системи в порівнянні з ШІМ системами. В зв'язку з цим, актуальним завданням є подальше дослідження та розрахунок електропривода систем АТМЗ з КРІП

У статті [1] доведено, що КРІП має кращу електромагнітну сумісність з мережею, в порівнянні з ШІМ перетворювачами, а у роботі [2] проведений аналіз електромагнітних процесів у системі КРІП, що перемикається під час нульового струму, – ДПС. Ці дослідження підтверджують ефективність застосування КРІП замість імпульсних перетворювачів з ШІМ. На базі отриманих результатів, проведемо подальший розвиток теорії електроприводу з КРІП для системи позиціювання АТМЗ.

Розрахуємо оптимальне керування для системи позиціювання ATM3 з КРІП з метою отримання максимальної швидкодії, знайдемо інтервали перемикання керуючого впливу та загальну тривалість керування і перевіримо отримані результати на макеті системи позиціювання.

Оптимізацію можна провести за різними критеріями оптимальності, але в нашому випадку найбільш доцільно використовувати принцип максимума Понтрягіна Л.С.[3] Цей метод дає добрі результати для систем з обмеженими керуючими впливами, якою є і наша система. Для оптимізації системи за принципом максимума необхідно знайти закон зміни сигналу керування КРІП, котрий забезпечить відпрацювання кутового переміщення  $\theta$  з початкового положення в кінцеве за мінімальний час без перерегулювання, і знайти мінімальний час переходу із початкового в кінцеве положення, а також тривалості всіх інтервалів керування. Аналіз виконаємо по постійній складовій, оскільки діапазон робочих частот КРІП (сотні кілогерц – одиниці мегагерц) значно більше власної частоти ДПС. За такого припущення помилка не перебільшує одиниць процентів.

На рисунку 1 показана структурна схема ДПС.



Рисунок 1 – Структурна схема ДПС

Для рисунка 1 маємо систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} u_{n} - i_{n}R_{n} - L_{n}\frac{di_{n}}{dt} - C\Omega = 0, \\ J\frac{d\Omega}{dt} = Ci_{n} - M_{c}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \Omega, \end{cases}$$
(1)

де: *и<sub>я</sub>* – напруга на якорі;

*i*<sub>я</sub> – струм якоря;

Ω – частота обертання;

$$heta$$
 – кут повороту якоря

С – стала ДПС;

*R*<sub>я</sub> – опір ланки якоря;

*L<sub>я</sub>* – індуктивність ланки якоря;

*J* – момент інерції якоря.

М<sub>с</sub> – статичний момент ДПС.

В якості змінних стану вибираємо струм, частоту обертання і кут повороту якоря ДПС, а в якості змінних керування – напругу на якорі ДПС. Введемо наступні позначення для змінних стану та керування:  $i_{\pi}=x_{l}$ ,  $\Omega = x_2$ ,  $\theta = x_3$ ,  $u_n = u$  і обмеження на керуючий вплив:  $|u| \le u_m$ , оскільки у реальному пристрої напруга на якорі двигуна буде обмежена максимальною напругою на виході перетворювача. В деяких системах, для роботи перетворювача та двигуна в безпечному режимі, можливо прийдеться ще ввести і обмеження на змінну стану  $x_1$  (струм якоря)  $|x_1| \le i_{\text{max}}$ . З урахуванням прийнятих припущень та обмежень система рівнянь (1) прийме вигляд:

$$\begin{cases}
\frac{dx_1}{dt} = a_1 u - a_2 x_1 - a_3 x_2 = \varphi_1, \\
\frac{dx_2}{dt} = a_4 x_1 - a_5 = \varphi_2, \\
\frac{dx_3}{dt} = x_2 = \varphi_3,
\end{cases}$$
(2)

de:  $a_1 = \frac{1}{L_{_{_{_{_{_{}}}}}}}, a_2 = \frac{1}{T_{_{_{_{_{}}}}}} = \frac{R_{_{_{_{_{}}}}}}{L_{_{_{_{}}}}}, a_3 = \frac{C}{L_{_{_{_{}}}}}, a_4 = \frac{C}{J}, a_5 = \frac{M_{_{_{_{}}}}}{J}.$ 

Для змінних стану маємо початкові:  $x_1(0)=0$ ,  $x_2(0)=0$ ,  $x_3(0)=0$  і кінцеві значення:  $x_1(T)=0$ ,  $x_2(T)=0$ ,  $x_3(T)=\theta_0$ .

Введемо три допоміжні функції часу  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ , і  $\Psi_3$ , та складемо функцію Гамільтона для системи рівнянь (2):

$$H = \varphi_1 \Psi_1 + \varphi_2 \Psi_2 + \varphi_3 \Psi_3 = (a_1 u - a_2 x_1 - a_3 x_2) \Psi_1 + (a_4 x_1 - a_5) \Psi_2 + x_3 \Psi_3.$$
(3)

Складаємо спряжені рівняння для допоміжних функцій:

$$\frac{d\Psi_{3}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_{3}} = -\left(\Psi_{1}\frac{d\varphi_{1}}{dx_{3}} + \Psi_{2}\frac{d\varphi_{2}}{dx_{3}} + \Psi_{3}\frac{d\varphi_{3}}{dx_{3}}\right) = \\ = -\left[\Psi_{1}\frac{d(a_{1}u - a_{2}x_{1} - a_{3}x_{2})}{dx_{3}} + \Psi_{2}\frac{d(a_{4}x_{1} - a_{5})}{dx_{3}} + \Psi_{3}\frac{dx_{2}}{dx_{3}}\right] = 0; \\ \begin{cases} \frac{d\Psi_{1}}{dt} = \Psi_{1}a_{2} - \Psi_{2}a_{4}, \\ \frac{d\Psi_{2}}{dt} = \Psi_{1}a_{3} - \Psi_{3}, \\ \frac{d\Psi_{3}}{dt} = 0. \end{cases}$$
(4)

Вирішивши систему рівнянь (4), отримаємо:

$$\begin{cases}
\Psi_{1}(t) = \frac{1}{a_{3}} \left[ p_{1}C_{1}e^{-p_{1}t} + p_{2}C_{1}e^{-p_{2}t} + C_{3} \right], \\
\Psi_{2}(t) = C_{1}e^{-p_{1}t} + C_{2}e^{-p_{2}t}, \\
\Psi_{3}(t) = C_{3},
\end{cases}$$
(5)

де: С1, С2, С3 – константи інтегрування,

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_3 a_4} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{T_s} \pm \sqrt{\frac{1}{T_s^2} - 4\frac{C^2}{L_s J}} \right).$$

Підставляючи значення  $\Psi$  із (5) у (3), отримуємо функцію Гамільтона, а потім знайдемо закон зміни u, за яким ця функція досягає максимального значення.

Умова оптимальності за швидкодією має вигляд:

$$H = \Psi_1(t)a_1u + \Psi_1(t)(a_2x_1 - a_3x_2) + \Psi_2(t)a_4x_1 + \Psi_3(t)x_3 = \max.$$
(6)

Досліджуючи вираз (6), можна побачити, що *H* є лінійною функцією змінної *u*, від якої залежить тільки один доданок:

$$H_u = \Psi_1(t)a_1u. \tag{7}$$

Очевидно, що функція Гамільтона буде мати максимум, коли максимальний вираз (7), що можливе за максимальним керуючим впливом:

$$u = \begin{cases} u_m, & \text{якщо } \Psi_1(t) > 0, \\ -u_m, & \text{якщо } \Psi_1(t) < 0; \end{cases}$$

або:

$$u = u_m sign(\Psi_1(t)).$$
(8)

Розглянемо випадок, коли струм якоря не перевищує граничного зна-

чення, тобто не будемо враховувати умову обмеження змінної  $x_1$ . Криві керуючого впливу та змінних стану для цього випадку приведені на рисунку 2.

У відповідності з теоремою про *n* інтервалів [4] кількість перемикань керуючого впливу, в нашому випадку, буде не більше трьох. Необхідно знайти моменти часу  $t_1$ , t<sub>2</sub>, t<sub>3</sub>, коли треба змінювати керуючий вплив *u(t)*. В загальному випадку, ці моменти залежать від багатьох факторів: параметрів системи, від векторів станів у початковій  $(x_{\mu})$  і кінцевій  $(x_{\nu})$  точках фазової траекторії, допустимого граничного керуючого впливу, від вектора впливів збурення. Для спрощення задачі будемо шукати моменти перемикань як функції  $x_{\mu}$  і  $x_{\kappa}$  за відсутності впливів збурення та за незмінних параметрів системи.

Розкриваючи систему рівнянь (2) відносно змінної  $x_3$ , отримаємо диференційне рівняння третього порядку:



Рисунок 2 – Криві керуючого впливу та змінних стану

$$\frac{d^3(x_3(t))}{dt^3} + a_2 \frac{d^2(x_3(t))}{dt^2} + a_3 a_4 \frac{d(x_3(t))}{dt} = a_1 a_4 u - a_2 a_5.$$
(9)

Вирішенням рівняння (9) для третього інтервалу  $(t_2 - t_3) \in \phi$ ункція  $x_{33}(t)$ :

$$x_{33}(t) = \frac{A_{31}}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_{32}}{p_2} e^{p_2 t} + \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_s M_c}{C^2}\right) t + A_{33}, \quad (10)$$

де: *А*<sub>31</sub>, *А*<sub>32</sub>, *А*<sub>33</sub> – константи, які необхідно визначити за граничними умовами.

Тут враховано, що керуючий вплив на третьому інтервалі додатній, у відповідності з (8).

Взявши першу і другу похідні від рівняння (10) та врахувавши саме рівняння, отримаємо систему рівнянь для трьох змінних стану на третьому інтервалі:

$$\begin{cases} x_{33}(t) = \frac{A_{31}}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_{32}}{p_2} e^{p_2 t} + \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_n M_c}{C^2}\right) t + A_{33}, \\ x_{33}'(t) = A_{31} e^{p_1 t} + A_{32} e^{p_2 t} + \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_n M_c}{C^2}\right), \\ x_{33}''(t) = A_{31} p_1 e^{p_1 t} + A_{32} p_2 e^{p_2 t}. \end{cases}$$
(11)

Граничні умови для системи (11) в кінці третього інтервалу:

$$\begin{cases} x_{33} (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) = \theta_0, \\ x'_{33} (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) = 0, \\ x''_{33} (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) = 0. \end{cases}$$
(12)

Рішенням рівняння (9) для другого інтервалу  $(t_1 - t_2)$  буде функція  $x_{32}(t)$ , яка враховує ту обставину, що керуючий вплив на цьому інтервалі від'ємний, у відповідності з (8). Взявши першу і другу похідні від цієї функції, отримаємо систему рівнянь для трьох змінних стану на другому інтервалі:

$$\begin{cases} x_{32}(t) = \frac{A_{21}}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_{22}}{p_2} e^{p_2 t} - \left(\frac{u_m}{C} + \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) t + A_{23}, \\ x_{32}'(t) = A_{21} e^{p_1 t} + A_{22} e^{p_2 t} - \left(\frac{u_m}{C} + \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right), \\ x_{32}''(t) = A_{21} p_1 e^{p_1 t} + A_{22} p_2 e^{p_2 t}. \end{cases}$$
(13)

Граничні умови для системи (13) на границі другого і третього інтервалу:

$$\begin{cases} x_{32}(\Delta t_1 + \Delta t_2) = x_{33}(\Delta t_1 + \Delta t_2), \\ x'_{32}(\Delta t_1 + \Delta t_2) = x'_{33}(\Delta t_1 + \Delta t_2), \\ x''_{32}(\Delta t_1 + \Delta t_2) = x''_{33}(\Delta t_1 + \Delta t_2). \end{cases}$$
(14)

Рішенням рівняння (9) для першого інтервалу  $(0 - t_1)$  буде функція  $x_{31}(t)$  (15), котра враховує, що керуючий вплив на цьому інтервалі додатній, у відповідності з (8). Взявши першу і другу похідні цієї функції, отримаємо систему рівнянь для трьох змінних стану на першому інтервалі:

$$\begin{cases} x_{31}(t) = \frac{A_{11}}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_{12}}{p_2} e^{p_2 t} + \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) t + A_{13}, \\ x_{31}'(t) = A_{11} e^{p_1 t} + A_{12} e^{p_2 t} + \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right), \\ x_{31}''(t) = A_{11} p_1 e^{p_1 t} + A_{12} p_2 e^{p_2 t}. \end{cases}$$
(15)

Граничні умови для системи (15) на границі першого та другого інтервалу:

$$\begin{cases} x_{31}(\Delta t_1) = x_{32}(\Delta t_1), \\ x'_{31}(\Delta t_1) = x'_{32}(\Delta t_1), \\ x''_{31}(\Delta t_1) = x''_{32}(\Delta t_1). \end{cases}$$
(16)

Для системи рівнянь (15) враховуємо нульові початкові умові:

$$\begin{cases} x_{31}(0) = 0, \\ x'_{31}(0) = 0, \\ x''_{31}(0) = 0. \end{cases}$$
(17)

Виходячи з початкових і граничних умов, визначимо невідомі константи  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{31}$ ,  $A_{32}$ ,  $A_{33}$ .

Вирішивши систему (15), з урахуванням (17), знайдемо константи A<sub>11</sub>, A<sub>12</sub>, A<sub>13</sub>:

$$\begin{cases}
A_{11} = \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) \frac{p_2}{(p_1 - p_2)}, \\
A_{12} = -\left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) \frac{p_1}{(p_1 - p_2)}, \\
A_{13} = \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) \frac{(p_1 + p_2)}{p_1 p_2}.
\end{cases}$$
(18)

Вирішуючи систему (11), з урахуванням (12), знайдемо константи  $A_{3l}$ ,  $A_{32}$ ,  $A_{33}$ :

$$\begin{cases} A_{31} = \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} e^{-p_1(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)}, \\ A_{32} = -\left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) \frac{p_1}{(p_1 - p_2)} e^{-p_2(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)}, \\ A_{33} = \left(\frac{u_m}{C} - \frac{R_{\pi}M_c}{C^2}\right) \frac{(p_1 + p_2 - p_1p_2(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3))}{p_1p_2} + \theta_0. \end{cases}$$
(19)

Із систем (11), (13), враховуючи (14), знайдемо A<sub>21</sub>, A<sub>22</sub>, A<sub>23</sub>:

r

$$\begin{cases}
A_{21} = A_{31} - 2 \frac{u_m}{C} \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} e^{-p_1(\Delta t_1 + \Delta t_2)}, \\
A_{22} = A_{32} + 2 \frac{u_m}{C} \frac{p_1}{(p_1 - p_2)} e^{-p_2(\Delta t_1 + \Delta t_2)}, \\
A_{23} = A_{33} - 2 \frac{u_m}{C} \frac{(p_1 + p_2 - p_1 p_2(\Delta t_1 + \Delta t_2))}{p_1 p_2}.
\end{cases}$$
(20)

Значення A<sub>21</sub>, A<sub>22</sub>, A<sub>23</sub> знайдемо з (13), (15), з урахуванням (16):

$$\begin{cases}
A_{21} = A_{11} - 2\frac{u_m}{C} \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} e^{-p_1 \Delta t_1}, \\
A_{22} = A_{12} + 2\frac{u_m}{C} \frac{p_1}{(p_1 - p_2)} e^{-p_2 \Delta t_1}, \\
A_{23} = A_{13} - 2\frac{u_m}{C} \frac{(p_1 + p_2 - p_1 p_2 \Delta t_1)}{p_1 p_2}.
\end{cases}$$
(21)

Віднявши із системи (20) систему (21), з урахуванням (15) і (19), отримаємо нелінійну систему рівнянь (22):

$$\begin{cases} \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} \left( \frac{u_m}{C} \left( 2e^{-p_1 \Delta t_1} - 2e^{-p_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} + e^{-p_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)} - 1 \right) - \frac{R_{\pi} M_c}{C^2} \left( e^{-p_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)} - 1 \right) \right) = 0, \\ \frac{-p_2}{(p_1 - p_2)} \left( \frac{u_m}{C} \left( 2e^{-p_1 \Delta t_1} - 2e^{-p_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} + e^{-p_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)} - 1 \right) + \frac{R_{\pi} M_c}{C^2} \left( e^{-p_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)} - 1 \right) \right) = 0, \\ \frac{u_m}{C} \left( \Delta t_1 - \Delta t_2 + \Delta t_3 \right) - \frac{R_{\pi} M_c}{C^2} \left( \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 \right) = \theta_0. \end{cases}$$

$$(22)$$

Знайдемо тривалість інтервалів  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ ,  $\Delta t_3$ . Для цього вирішимо систему рівнянь (22). З третього рівняння системи (22):

$$\Delta t_3 = \frac{\theta_0 C - u_m C (\Delta t_1 - \Delta t_2) + R_s M_c (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{u_m C - R_s M_c}.$$
(23)

Підставимо (23) у перше і друге рівняння системи (22), і знайшовши  $\Delta t_1$ , отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta t_{1} = -\Delta t_{2} - \frac{1}{p_{1}} \ln \left( \frac{\left(R_{g}M_{c} - u_{m}C\right) \left(e^{p_{1}\frac{2u_{m}C\Delta t_{2} + \theta_{0}C^{2}}{R_{g}M_{c} - u_{m}C} - 1\right)}{2u_{m}C\left(e^{p_{1}\Delta t_{2}} - 1\right)} \right), \quad (24) \\ \Delta t_{1} = -\Delta t_{2} - \frac{1}{p_{2}} \ln \left( \frac{\left(R_{g}M_{c} - u_{m}C\right) \left(e^{p_{2}\frac{2u_{m}C\Delta t_{2} + \theta_{0}C^{2}}{R_{g}M_{c} - u_{m}C} - 1\right)}{2u_{m}C\left(e^{p_{2}\Delta t_{2}} - 1\right)} \right). \end{cases}$$

Систему (24) неможливо вирішити в загальному вигляді, тому знайдемо її чисельне рішення, для ДПС HSM-150 з наступними параметрами:  $u_m=24B$ ,  $R_n=1 Om$ ,  $L_n=100 \ m\kappa\Gamma h$ ,  $1/C=20 \ pad/B c$ ,  $M_c=0.02 \ Hm$ ,  $J=16e-06 \ \kappa cm^2$ . Вирішивши систему (24) чисельним методом за допомогою програми Марle, отримаємо для кута повороту  $\theta_0=0.1 \ pad$ :

$$\Delta t_1 = 1.276 \text{ mc}, \ \Delta t_2 = 1.099 \text{ mc}, \ \Delta t_3 = 0.072 \text{ mc}.$$
 (25)

На рисунку 3 приведені розраховані криві напруги на якорі (a), струму кола якоря (b), частоти обертання (b) та кута повороту якоря (c).

Очевидно, що для повороту якоря ДПС на кут  $\theta_0 = 0.1 \, pad$ , необхідно

у нульовий момент часу подати на двигун 24 В, потім в момент часу  $t1=0+\Delta t_1=1.276 \ mc$  змінити напругу з 24 В на -24 В, в момент часу  $t2=t1+\Delta t_2=2.375 \ \text{мс}$  подати 24 B а в момент часу  $t3 = t2 + \Lambda t_2 = 2.447 \text{ мс}$  зняти напругу з якоря двигуна. Загальний час повороту якоря ДПС на кут  $\theta_0$  буде дорівнювати загальній тривалості трьох інтервалів Т=2.447 мс.

На рисунку 4 приведені осцилограми для напруги на якорі, за розрахованого керуючого впливу, та струму якоря ДПС, зняті на макеті системи позиціювання. Результати розрахунку співпали з експериментальними даними з розходженням не більше 5 відсотків. Розбіжність пояснюється прийнятими припущеннями.

Для практичного застосування результатів розрахунку треба враховувати, що вихідна напруга КРІП значно залежить від навантаження, тому для зберігання точності позиціювання для широкого діапазону зміни кута повороту, треба застосовувати КРІП зі стабі-



Рисунок 3 – Розраховані криві напруги на якорі, струму кола якоря, частоти обертання, кута повороту якоря

лізацією вихідної напруги.

Вирахування моментів перемикання для довільного кута повороту в реальних системах доволі складна задача. Для практичного застосування заздалегіль можна рекомендувати порахувати моменти перемикання для деякої кількості фіксованих значень кутів, а для решти – брати проміжне значення з отриманої таблиці. Також можливий варіант, коли керування в межах двох сусідніх значень фіксованих кутів відбувається за допомогою зміни максимального значення напруги на якорі.



Рисунок 4 – Осцилограми напруги та струму якоря ДПС

## **Л**ІТЕРАТУРА

- Денисов Ю.А., Ревко А.С., Прохоренко А.Д. Электромагнитная совместимость с сетью стабилизаторов с квазирезонансными импульсными преобразователями. // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск. Системи керування та контролю напівпровідникових перетворювачів. Київ, –1999. –С. 24 – 27.
- Денисов Ю.А., Ревко А.С. Анализ электромагнитных процессов в системе квазирезонансный импульсный преобразователь, переключаемый при нулевом токе – двигатель постоянного тока. // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск. Проблеми сучасної електротехніки, Ч. 4. Київ, –2000. –С. 29 – 33.
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматиз, 1961.
- Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. 2-е изд., перераб. и доп. – К. :Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 431 с.